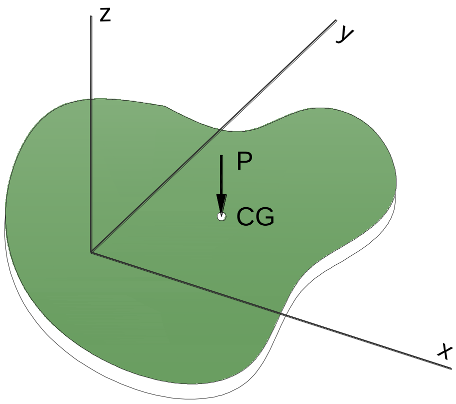
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA e TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA ACADÊMICA DE CONSTRUÇÃO CIVIL

TEC. EM CONSTR. DE EDIFICIOS – EDIFICAÇÕES TÉCNICO SUBSEQUENTE

ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES

MÓDULO 03 – CENTRO DE GRAVIDADE



NOTAS DE AULA:

- Prof. Edilberto Vitorino de Borja

2016.2

MÓDULO 03 – CENTRO DE GRAVIDADE

OBJETIVOS

Ao final deste módulo o aluno deverá ser capaz de:

- compreender o significado de centro de massa (centro de gravidade, centroide) de figuras planas e linhas;
- visualizar e identificar o centro de massa de figuras planas conhecidas;
- dividir figuras planas complexas em figuras planas conhecidas;
- entender e determinar de Momento ESTÁTICO (de área);
- determinar o centro de massa de figuras planas complexas;
- determinar o centro de massa de figuras de linha..

1. CENTRO DE MASSA - CENTRÓIDE

O <u>*centro de massa ou de gravidade*</u> (CG) é um ponto no qual se localiza o <u>peso</u> (**P**) resultante de um sistema de pontos materiais (Figura 1).

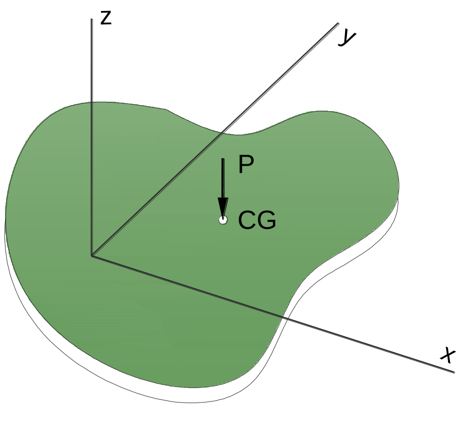


FIGURA 1. Placa homogênea.

Para mostrar como determinar esse ponto, consideremos uma placa horizontal, dividiremos essa placa em ***n*** pequenos elementos (Figura 2).

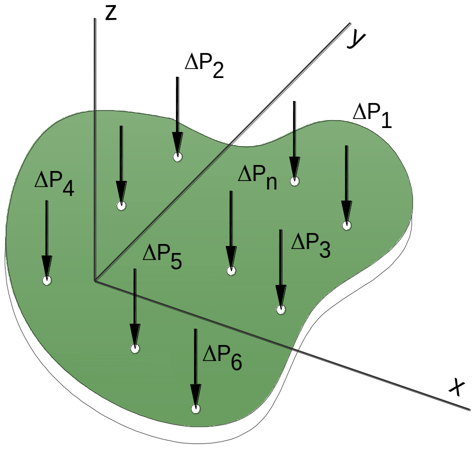


FIGURA 2. Divisão placa em **n** elementos.

As coordenadas do primeiro elemento são denominadas $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{y_1}$**,** e as coordenadas do segundo elemento $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{y_2}$**,** e assim, sucessivamente (Figura 3).

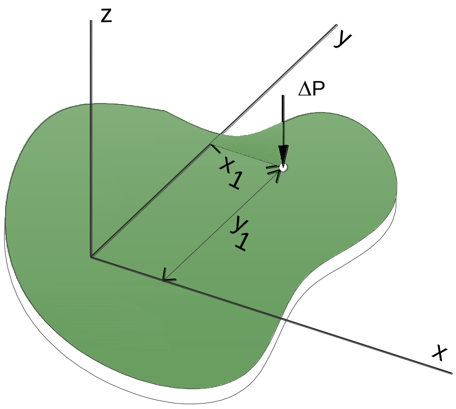


FIGURA 3. Coordenadas dos elementos (finitesimais) de uma placa homogênea.

Sobre cada elemento ($n_{ésimo}$) age a ação da gravidade. A força exercida pela Terra sobre esse pequeno elemento de placa é denominada de $\mathbf{\Delta P_1}$ (força peso do elemento 1).

Essas forças (ou pesos) estão orientados em direção ao centro da Terra; porém, por finalidades práticas, elas podem ser consideradas paralelas (figura 2).

A resultante dessas pequenas forças é igual ao peso total de todos os **n** elementos que foi dividido a placa. Isto é:

$$\sum F_z \rightarrow P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + ... + \Delta P_n \text{, ou seja} \quad \text{(eq. 01)}$$

$$\sum F_z \rightarrow P = \int dp \quad \text{(eq. 02)}$$

A soma dos ***momentos dos pesos*** (Figura 4) de todos os elementos materiais, em relação aos eixos ***x,y***, é então igual ao momento do peso resultante em relação a esses eixos.

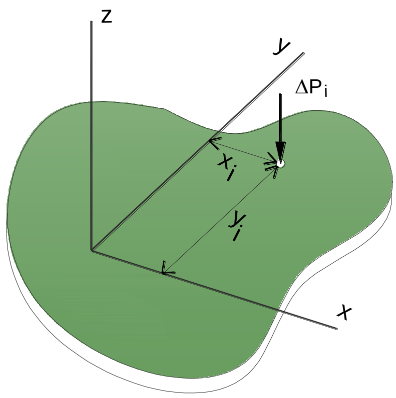


FIGURA 4. Momentos dos pesos.

$$\sum M_y^P = x_1 . \Delta P_1 + x_2 . \Delta P_2 + ... + x_n . \Delta P_n \qquad \text{(eq. 04)}$$

$$\sum M_x^P = y_1 . \Delta P_1 + y_2 . \Delta P_2 + ... + y_n . \Delta P_n \qquad \text{(eq. 05)}$$

Então, para determinar a coordenada **x** do centro de gravidade, podemos somar os momentos em relação ao eixo **y** e obter a seguinte equação:

$$\sum M_y^P = \bar{x} . P = \sum x . \Delta P \qquad \text{(eq. 06)}$$

De maneira semelhante, efetuando o somatório dos momentos em relação ao eixo x obtemos a coordenada y do centro de gravidade, isto é:

$$\sum M_x^P = \bar{y} . P = \sum y . \Delta P \qquad \text{(eq. 07)}$$

Podem-se generalizar essas fórmulas e escrevê-las simbolicamente na seguinte forma:

$$\bar{x} = \frac{\sum x . \Delta P}{P} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum y . \Delta P}{P} \qquad \text{(eq. 08)}$$

Ou seja,

$$\bar{x} = \int x dp / \int dp \quad ; \quad \bar{y} = \int y dp / \int dp \qquad \text{(eq. 09)}$$

Exemplo 1.1. Uma laje de 5m x 7,5m suporta cinco colunas que exercem sobre ela as forças indicadas na Figura 5. Determine o módulo e o ponto de aplicação da única força equivalente às forças dadas.

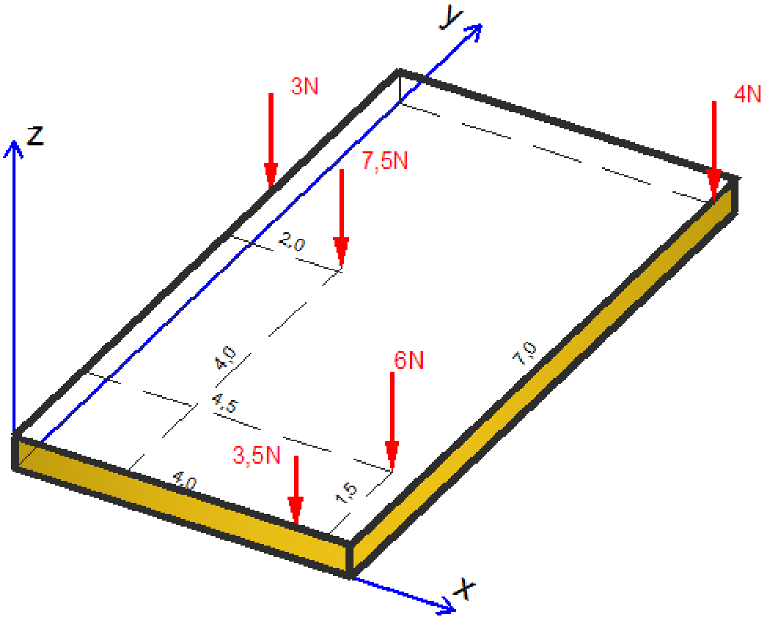


FIGURA 5. Laje com forças aplicadas.

2. BARICENTRO - CENTRO DE GRAVIDADE DE FIGURAS PLANAS

Se levarmos em consideração que a placa trata-se apenas de uma figura plana (Figura 6), ou seja, não tem massa, pode-se reescrever a equação 08 correlacionando o momento de peso com o **momento estático** (de área), ou seja, troca-se a força aplicada pela área, obtendo-se a seguinte equação:

$$\bar{x} = \frac{\sum x.dA}{A} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum y.dA}{A} \qquad \text{(eq. 10)}$$

Ou seja,

$$\bar{x} = \int xdA / \int dA \quad ; \quad \bar{y} = \int ydA / \int dA \qquad \text{(eq. 11)}$$

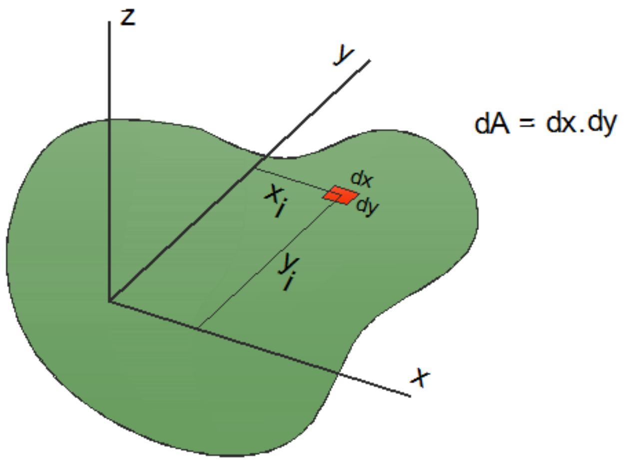


FIGURA 6. Momento estático de área.

Adotaremos, a partir de então, as seguintes definições:

- Baricentro ou centro de gravidade: **CG**.
- Eixos baricêntricos: $\bar{x}\,;\bar{y}$
- Momentos estáticos: **M_{sx} e M_{sy}**
- Área da figura plana: **A**

Admitindo a figura plana da figura 6, posicionada em relação a um par de eixos de referência (x,y), pode-se definir seu baricentro, de coordenadas ($\bar{x}\,;\bar{y}$), como sendo o único ponto da figura plana, que obedece simultaneamente a duas condições:

$$\bar{x} = \frac{M_{sy}}{A} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_{sx}}{A} \qquad \text{(eq. 12)}$$

Da definição da equação 12, pode-se concluir, qualquer que seja a figura plana:

$$M_{sy} = \bar{x}.A \quad ; \quad M_{sx} = \bar{y}.A \qquad \text{(eq. 13)}$$

Se a figura plana for composta por diversas figuras básicas, o resultado dos momentos estáticos são a soma algébrica dos momentos das figuras componentes, bem como, a área total da figura composta é a soma das áreas das figuras componentes.

$$\bar{x} = \frac{(x_1.A_1 + x_2.A_2 + x_3.A_3 + x_4.A_4 + \ldots + x_n.A_n)}{(A_1 + xA_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_n)}$$
$$\bar{y} = \frac{(y_1.A_1 + y_2.A_2 + y_3.A_3 + y_4.A_4 + \ldots + y_n.A_n)}{(A_1 + xA_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_n)} \qquad \text{(eq. 14)}$$

Nessas condições, qualquer que seja a figura plana, o cálculo do CG ($\bar{x}$; $\bar{y}$), será:

$$\bar{x} = \frac{\sum M_{sy_i}.A_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum M_{sx_i}.A_i}{\sum A_i} \qquad \text{(eq. 15)}$$

3. SIMETRIA

Simetria relativamente a eixo. Quando uma superfície é simétrica relativamente a um eixo, o seu momento estático relativamente ao eixo é nulo e o seu centroide situa-se sobre o eixo, conforme ilustrado na Figura 7.

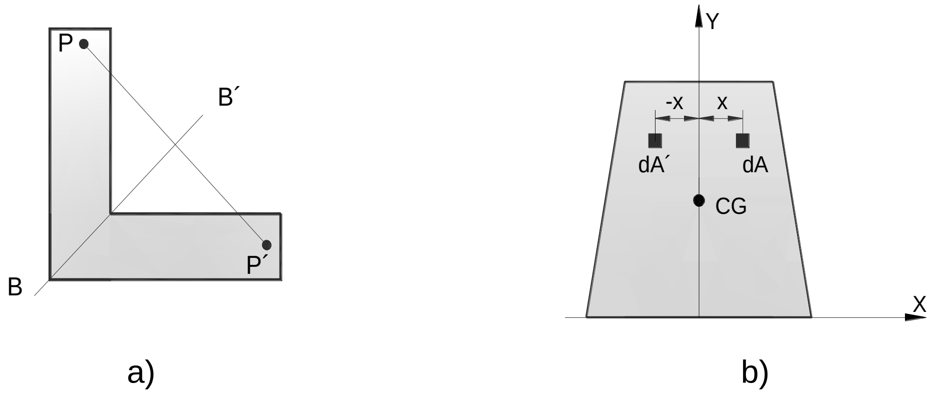


FIGURA 7. CG com um eixo de simetria de superfícies planas relativamente a um eixo.

Caso a superfície apresente dois eixos de simetria, o centroide situa-se no ponto de intersecção destes eixos, como observado na Figura 8.

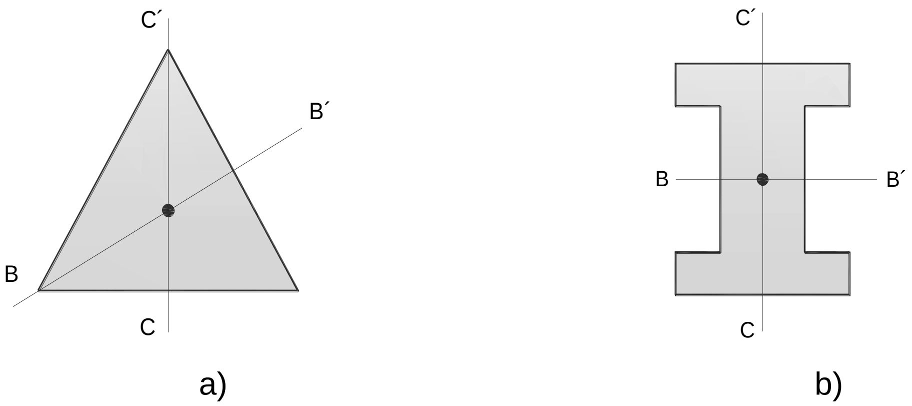


FIGURA 8. CG com dois eixos de simetria de superfícies planas.

__Simetria relativamente a ponto__. Quando uma superfície é simétrica relativamente a um ponto, o seu centroide situa-se nesse ponto (ver Figura 9).

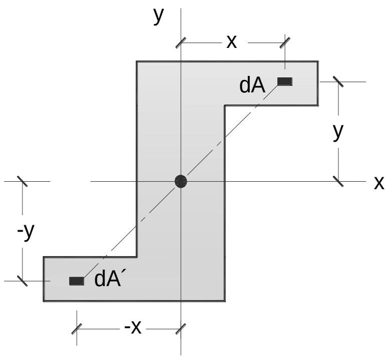
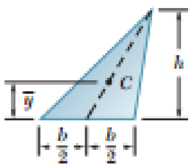
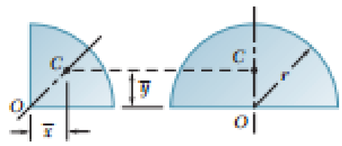
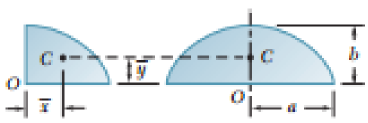
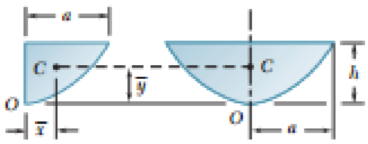
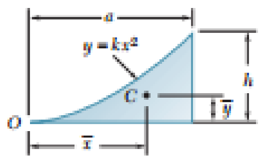
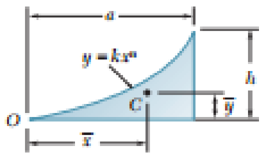
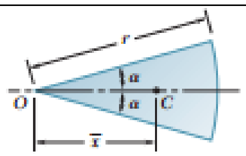


FIGURA 9. CG com eixo de simetria de superfícies planas relativamente a um ponto.

4. CENTROIDES DE FIGURAS PLANAS DE FORMATOS USUAIS

Figura		$\bar{x}$	$\bar{y}$	área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
¼ de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semi-círculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
¼ de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semi-elipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semi-parabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Arco de parábola		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$

Arco geral		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\frac{2r\,\text{sen}\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

5. CENTROIDES DE LINHAS

O centro de gravidade de uma linha coincide com o centroide ***C*** de uma linha de comprimento ***L*** definido pelo formato da linha (Figura 10). As coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centroide da linha L são obtidos a partir das equações (16) e (17).

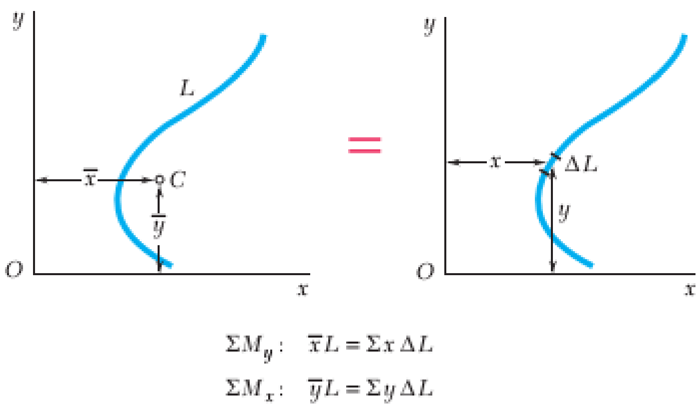
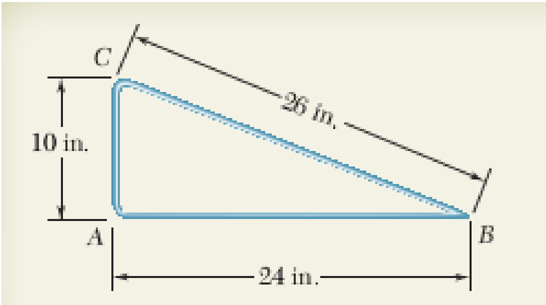


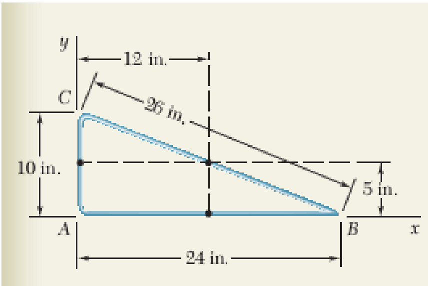
FIGURA 10. Centróide de uma Linha.

$$\bar{x}L = \int x\,dL$$ .... eq. (16)

$$\bar{y}L = \int y\,dL$$ .... eq. (17)

Exemplo 5.1. A figura abaixo mostra o formato de uma peça fina e homogenia (fio). Determine as coordenadas de localização do centro de gravidade.





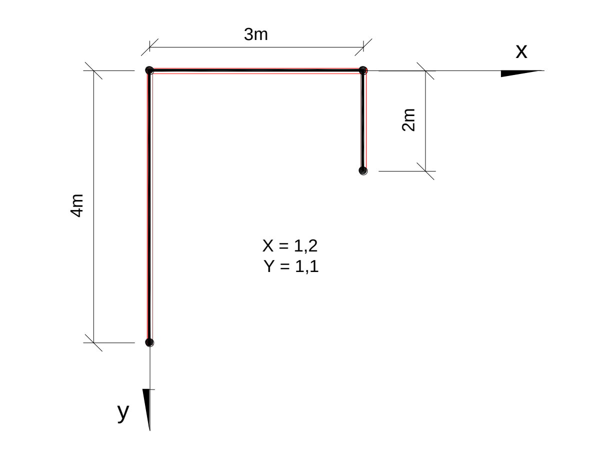
Segmento	L (in)	$\bar{x}$ (in)	$\bar{y}$ (in)	$\bar{x}$. L (in^2)	$\bar{y}$ .L (in^2)
AB	24	12	0	288	0
BC	26	12	5	312	130
CA	10	0	5	0	50
	ΣL = 60			$\Sigma \bar{x}$ L = 600	$\Sigma \bar{y}$ L = 180

Introduzindo os valores obtidos, na tabela acima, nas equações define-se o centróide da forma de linha, obtendo-se:

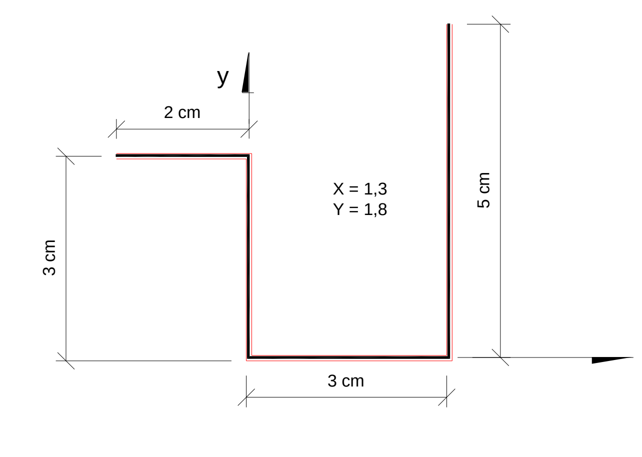
$$\bar{X}..\Sigma\ L = \Sigma \bar{x}.L \;\rightarrow\; \bar{X} = \frac{600}{60} = 10\,in$$

$$\bar{Y}..\Sigma\ L = \Sigma \bar{y}.L \;\rightarrow\; \bar{Y} = \frac{180}{60} = 3\,in$$

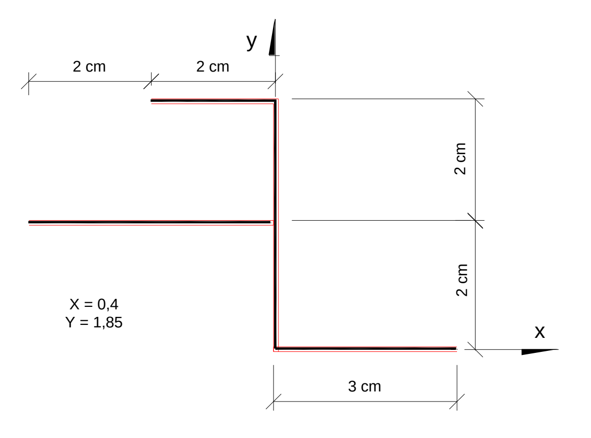
Exercícios 1: Determinar o centro de gravidade das linhas das figuras abaixo.



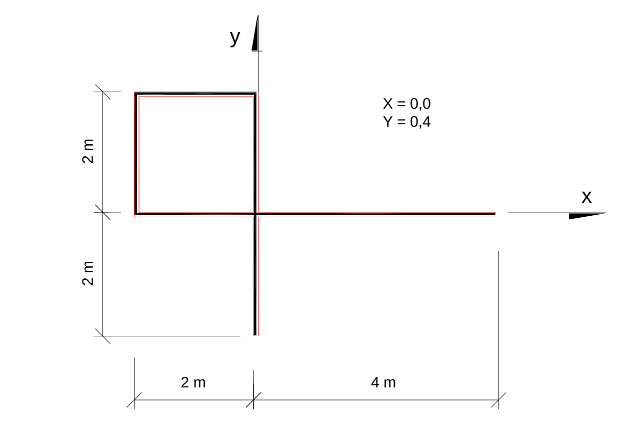
(a)



(b)

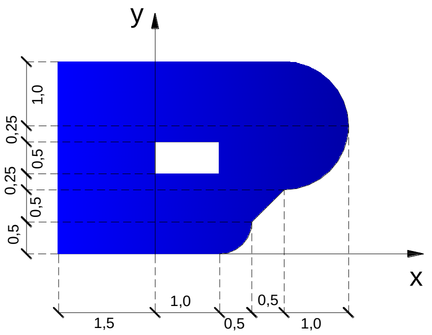


(c)

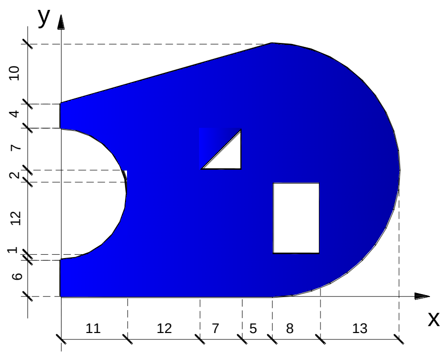


(d)

Exercício 2: Determinar o centro de gravidade das superfícies planas (região hachurada).

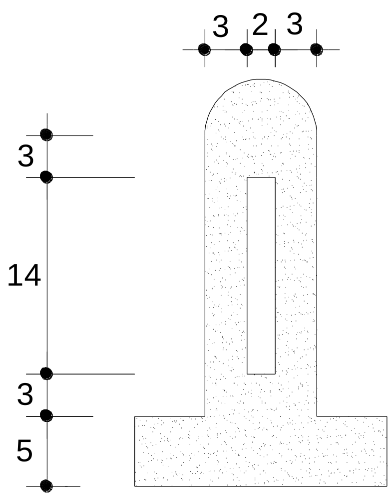


a)

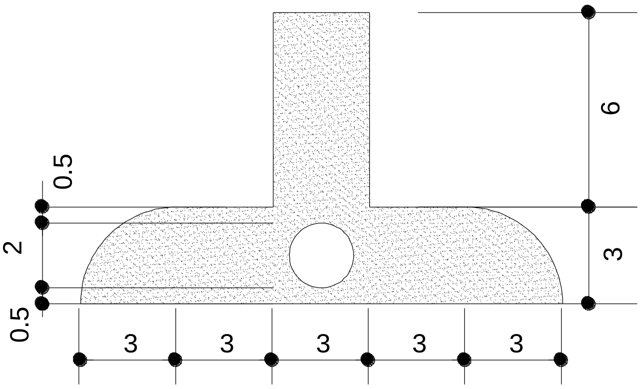


b)

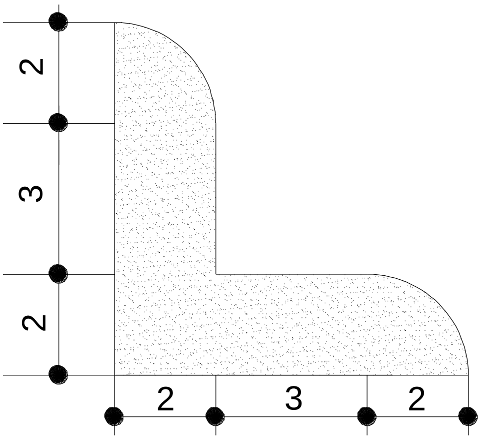
a)



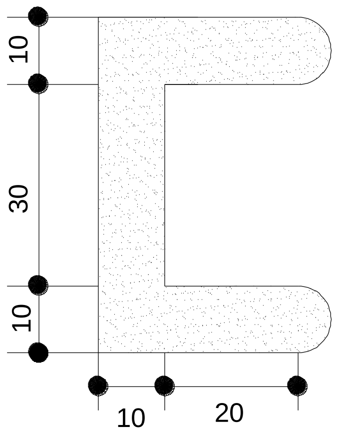
b)



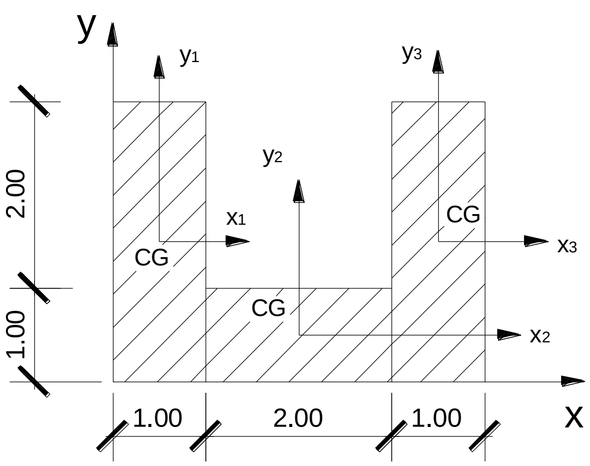
c)



d)



e)

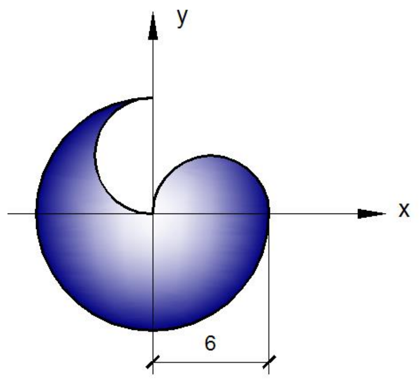


$$I_{x1} = I_{x3} = \frac{b.h^3}{12} = \frac{1.3^3}{12} = \frac{9}{4}$$

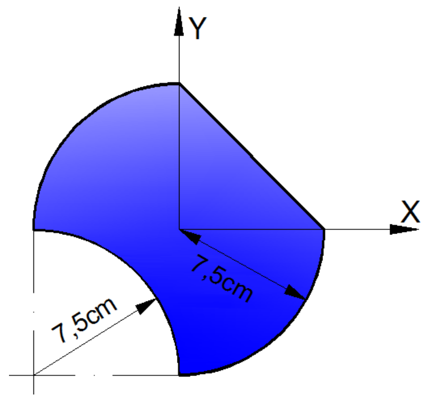
$$I_{x2} = \frac{b.h^3}{12} = \frac{2.1^3}{12} = \frac{1}{6}$$

Exercício 3: Calcular, para as figuras planas abaixo, o baricentro posicionando os eixos na figura.

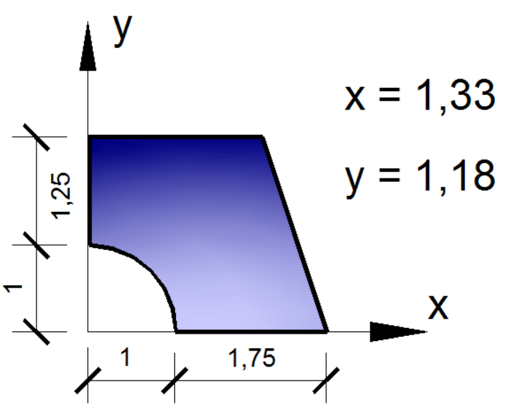
a)



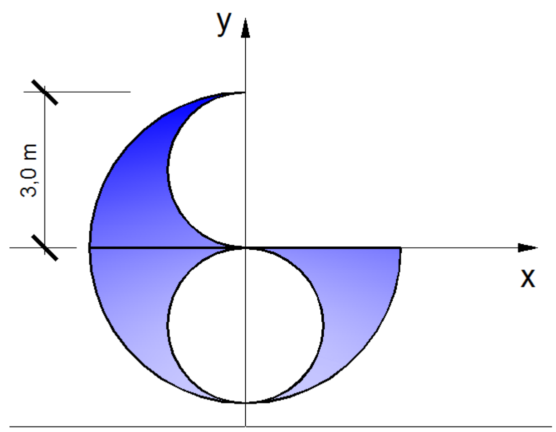
b)



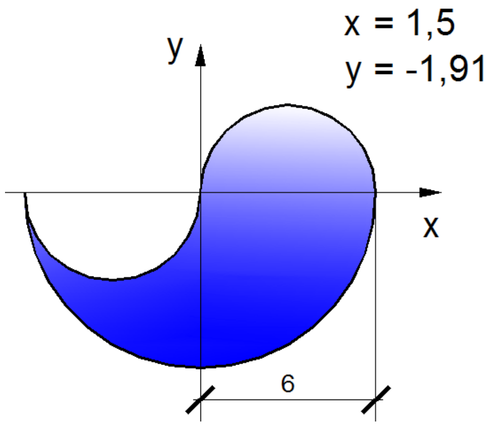
c)



d)



e)


x = 1,5
y = -1,91
y
x
6