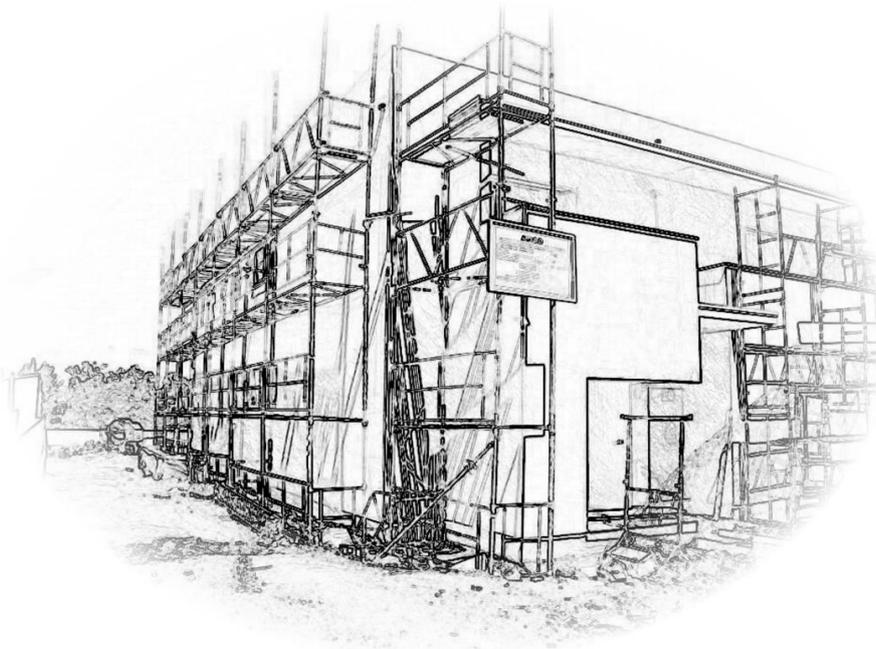


INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE



Estabilidade das CONSTRUÇÕES

Técnico em Edificações

MÓDULO 4 – Esforços Solicitantes Internos

OBJETIVOS

Ao final deste módulo o aluno deverá ser capaz de:

- conhecer, identificar e quantificar os tipos de cargas atuantes em uma estrutura;
- compreender os mecanismos de funcionamento dos apoios estruturais;
- saber classificar as estruturas quanto à sua estaticidade;
- calcular as reações (incógnitas) de apoios em vigas isostáticas;
- compreender o surgimento dos esforços solicitantes internos provenientes dos carregamentos estruturais;
- determinar os esforços solicitantes internos em vigas isostáticas.

4. CARGAS ATUANTES NAS ESTRUTURAS

4.1. CARGAS EXTERNAS

Uma estrutura pode estar sujeita à ação de diferentes tipos de carga, tais como pressão do vento, reação de um pilar ou viga, as rodas de um veículo, o peso de mercadorias (depósitos), maquinários (industrias), etc. Estas cargas podem ser classificadas quanto à ocorrência em relação ao **tempo** e quanto às **leis de distribuição**.

4.2. OCORRÊNCIA EM RELAÇÃO AO TEMPO

4.2.1. Cargas Permanentes

Atuam constantemente na estrutura ao longo do tempo e são devidas ao seu peso próprio, dos revestimentos e materiais que a estrutura suporta. Tratam-se de cargas com posição e valor conhecidos e invariáveis (Figura 59).

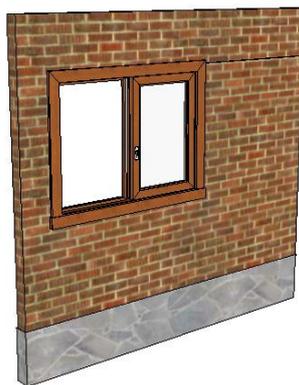


FIGURA 59. Exemplo carga Permanente.

4.2.2. Cargas Acidentais

São aquelas que podem ou não ocorrer na estrutura e são provocadas por ventos, empuxo de terra ou água, impactos laterais, frenagem ou aceleração de veículos (Figura 60), sobrecargas em edifícios, peso de materiais que preencherão a estrutura no caso de reservatórios de água e silos, efeitos de terremotos, peso de neve acumulada (regiões frias), etc. Estas cargas são previstas pelas Normas em vigor.



FIGURA 60. Exemplo carga Acidental.

4.2.3. Quanto às leis de distribuição

Quanto às leis de distribuição, as cargas podem ser classificadas em cargas concentradas e cargas distribuídas.

a. Cargas concentradas:

São cargas distribuídas aplicadas a uma parcela reduzida da estrutura, podendo-se afirmar que são áreas tão pequenas em presença da dimensão da estrutura que podem ser consideradas pontualmente. Pode-se citar como exemplo a carga de uma viga servindo de apoio para outra viga (Figura 61).

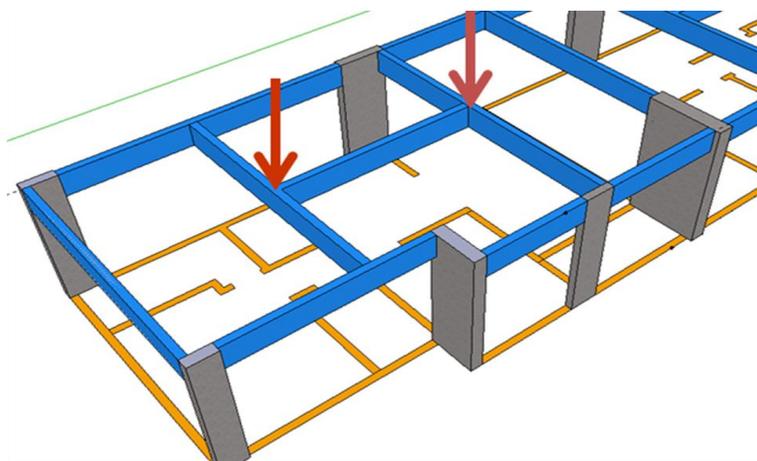


FIGURA 61. Exemplo de carga concentrada.

b. Cargas distribuídas:

As cargas distribuídas, por sua vez, podem ser classificadas em Cargas Uniformemente Distribuídas e Cargas Variáveis:

➤ **Cargas uniformemente distribuídas:**

São cargas constantes ao longo da estrutura (Figura 62), ou em trechos da estrutura (ex.: peso próprio, peso de uma parede sobre uma viga, reação de uma laje sobre uma viga, ação do vento sobre placa outdoor, etc.).

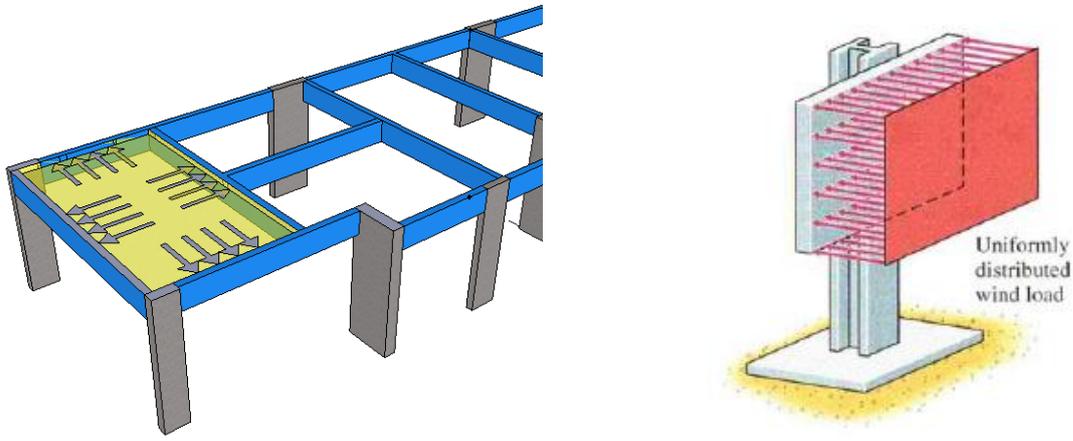


FIGURA 62. Exemplo de carga uniformemente distribuída.

➤ **Cargas variáveis:**

São cargas triangulares. São exemplos de cargas variáveis: carga em paredes de reservatório de líquido (Figura 63), carga de grãos a granel, empuxo de terra ou água, vento ao longo da altura da edificação, etc.

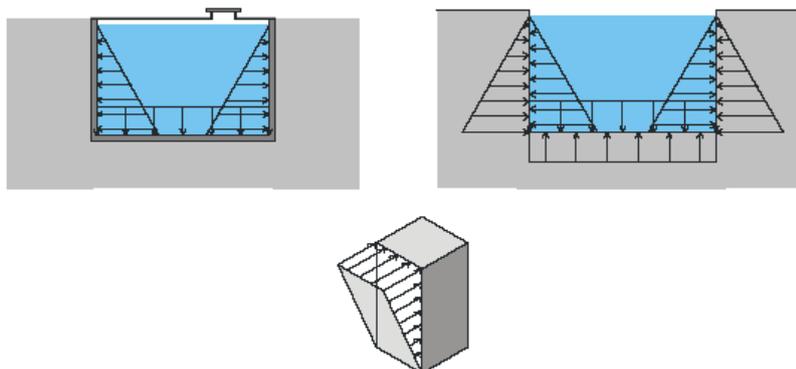


FIGURA 63. Exemplo de cargas uniformemente variável.

4.3. GRAUS DE LIBERDADE DE UMA ESTRUTURA

Um corpo qualquer submetido a um sistema de forças está em equilíbrio estático caso não haja qualquer tendência à translação ou à rotação.

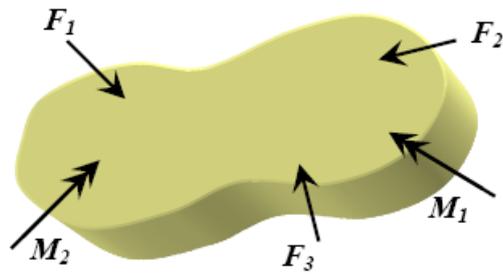


FIGURA 64. Sistema de forças atuando sobre um corpo (elemento estrutural).

No espaço, uma estrutura espacial possui seis graus de liberdade: três translações e três rotações segundo três eixos ortogonais. As equações universais da Estática que regem o equilíbrio de um sistema de forças no espaço são:

$$\begin{array}{ll} \sum F_x = 0 & \sum M_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \sum M_y = 0 \\ \sum F_z = 0 & \sum M_z = 0 \end{array}$$

A fim de evitar a tendência de movimento da estrutura, estes graus de liberdade precisam ser restringidos, ocasionando no impedimento desses movimentos. Esta restrição é dada pelos apoios (vínculos), que são dispositivos mecânicos que, por meio de esforços reativos, impedem certos deslocamentos da estrutura. Estes esforços reativos (reações), juntamente com as ações (cargas aplicadas à estrutura) formam um sistema em equilíbrio estático.

No plano, uma estrutura bidimensional possui apenas três graus de liberdade, que será objeto de estudo da disciplina, a saber:

$$\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{array}$$

4.4. APARELHOS DE APOIOS

A função básica dos vínculos ou apoios é de restringir o **grau de liberdade** das estruturas por meio de reações nas direções dos movimentos impedidos, ou seja, restringir as tendências de movimento de uma estrutura. Esses vínculos são dispositivos

mecânicos que, por meio de esforços reativos, impedem certos deslocamentos da estrutura. Os vínculos têm a função física de ligar elementos que compõem a estrutura, além da função estática de transmitir as cargas ou forças.

Os vínculos ou apoios são classificados em função de número de movimentos impedidos. Para estruturas planas existem três tipos de vínculos:

4.4.1. VÍNCULOS DE PRIMEIRA ORDEM (APOIO SIMPLES ou APOIO DO 1º GÊNERO):

São aqueles que impedem deslocamento somente em uma direção, produzindo reações equivalentes a uma força com linha de ação conhecida. Apenas uma reação será a incógnita (Figura 65).

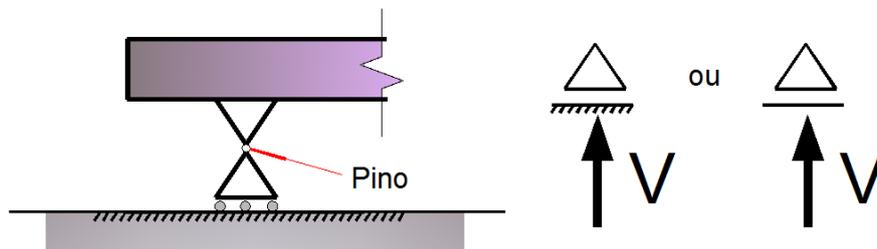


FIGURA 65. Aparelho de Apoio do 1º Gênero (BORJA).

O deslocamento na direção y é impedido. A representação esquemática indica a reação de apoio V na direção do único movimento impedido (deslocamento vertical).

4.4.2. VÍNCULOS DE SEGUNDA ORDEM (2º GÊNERO ou RÓTULA):

São aqueles que restringem a translação de um corpo livre em todas as direções, mas não podem restringir a rotação em torno da conexão (Figura 66). Portanto, a reação produzida equivale a uma força com direção conhecida, envolvendo duas incógnitas, geralmente representadas pelas componentes H e V da reação.

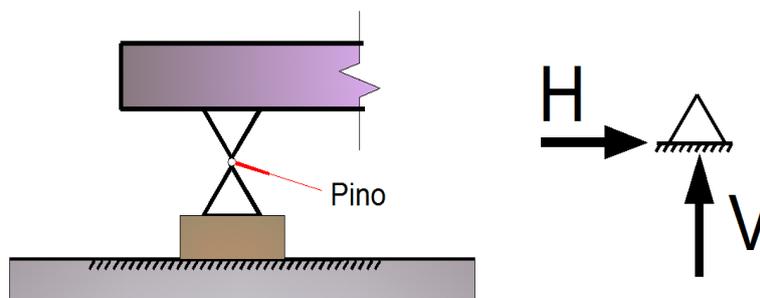


FIGURA 66. Aparelho de Apoio do 2º Gênero (BORJA).

Os deslocamentos nas direções x e y são impedidos, logo, nestas direções, têm-se duas reações de apoio H (horizontal) e V (vertical).

4.4.3. VÍNCULOS DE TERCEIRA ORDEM (ENGASTE OU APOIO FIXO):

São aqueles que impedem qualquer movimento de corpo livre, imobilizando-o completamente (Figura 67).

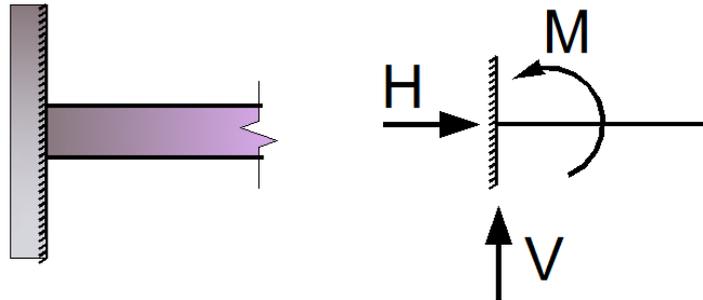


FIGURA 67. Aparelho de Apoio do 3º Gênero.

Os deslocamentos nas direções x , y e a rotação em z são impedidos, logo, nestas direções, têm-se três reações de apoio H (horizontal), V (vertical) e M (momento).

Observação: Os vínculos podem ser chamados de 1ª, 2ª e 3ª ordem ou classe ou gênero ou tipo.

4.5. CLASSIFICAÇÃO DA ESTRUTURA QUANTO À VINCULAÇÃO:

- **Isostática:** Em uma estrutura isostática o número de incógnitas é igual ao número de equações, ou seja, bastam as equações fundamentais da estática para determinar as suas reações de apoio (Figura 68).

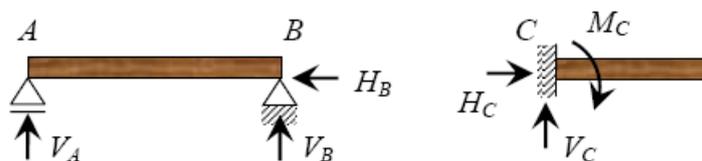


FIGURA 68. Número de reações = número de equações de equilíbrio.

- **Hipostática:** Nas estruturas hipostática os apoios são em menor número que o necessário para restringir todos os movimentos possíveis da estrutura. O número de reações é inferior ao número de equações de equilíbrio (Figura 69).

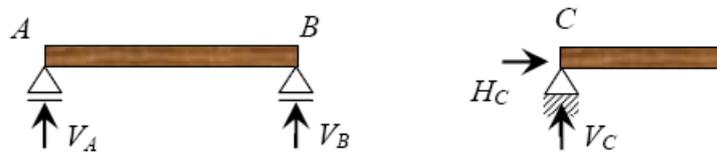


FIGURA 69. Número de reações menor que o número de equações de equilíbrio

- **Hiperstática:** Estrutura hiperestática tem número de vínculos maior que o necessário. O número de reações de apoio excede o das equações fundamentais da estática (Figura 70).

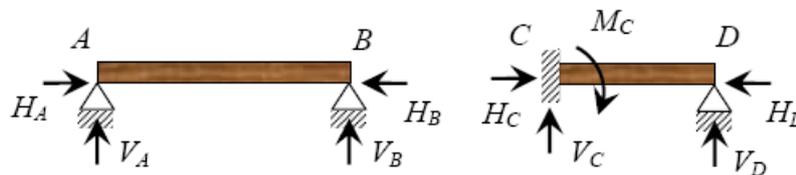


FIGURA 70. Número de reações maior que o número de equações de equilíbrio.

4.6. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE – ANALOGIA PRÁTICA/TEÓRICA – CÁLCULO DAS REAÇÕES

A Figura 71 representa uma viga metálica biapoiada, com três cargas concentradas atuantes. A Figura 72 ilustra, esquematicamente esta viga com seus respectivos apoios. Na Figura 73 tem-se o diagrama de corpo livre da viga.



FIGURA 71. Viga metálica biapoiada.

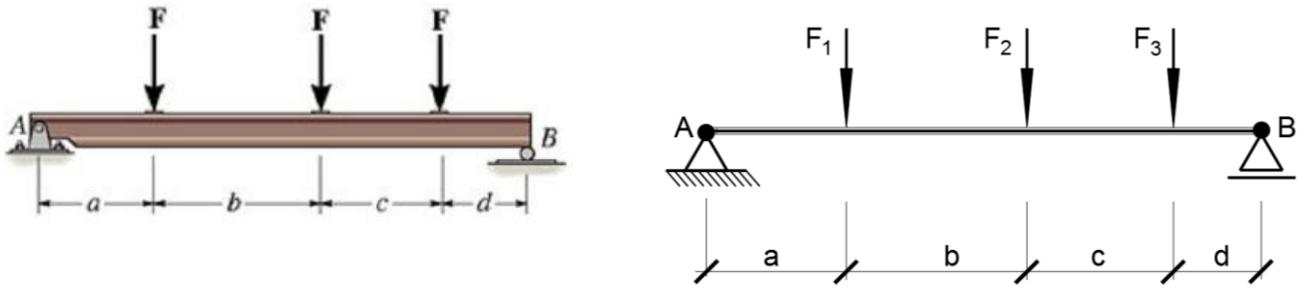


FIGURA 72. Representação gráfica dos Apoios.

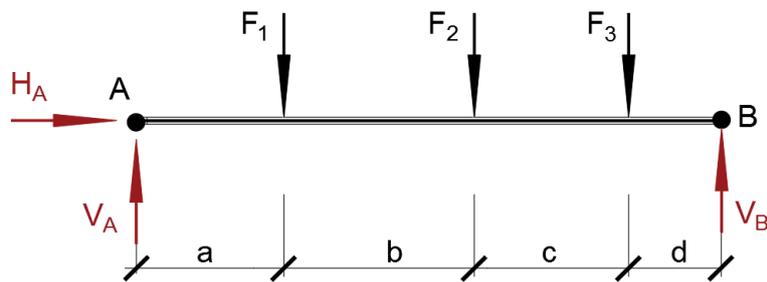
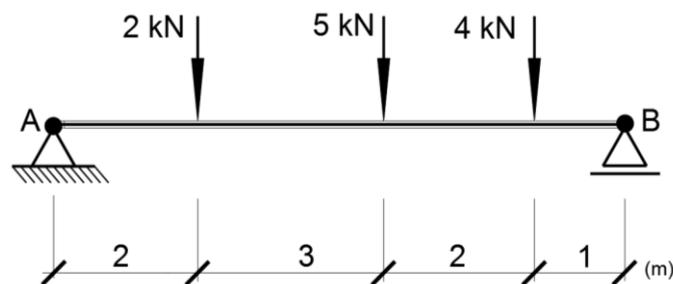


FIGURA 73. Diagrama de corpo livre.

4.7. EXEMPLOS DE CÁLCULO DE REAÇÕES DE APOIO DE VIGAS ISOSTÁTICAS

a)

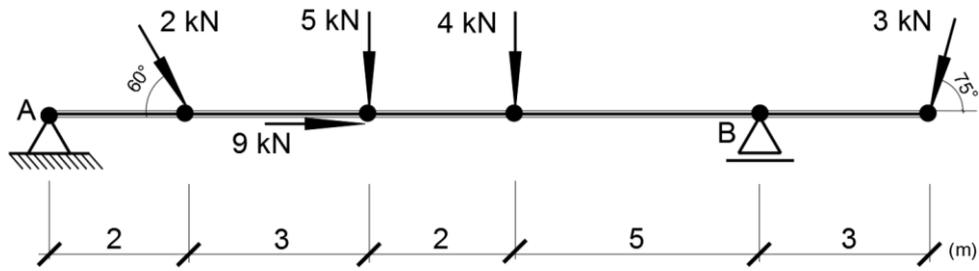


$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_A = 0 \\ 2 \times 2 + 5 \times 5 + 4 \times 7 - 8 \times V_B = 0 \\ V_B = 7,125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \oplus \sum V = 0 \\ -2 - 5 - 4 + 7,125 + V_A = 0 \\ V_A = 3,875 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \oplus \sum H = 0 \quad \therefore H_A = 0$$

b)

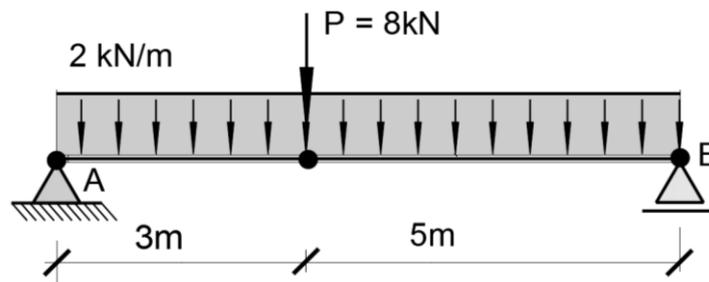


$$\begin{aligned} \curvearrowright + \sum M_A = 0 \\ 1,73 \times 2 + 5 \times 5 + 4 \times 7 + 2,9 \times 15 - 12 \times V_B = 0 \\ V_B = 8,33 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \oplus \sum V = 0 \\ -1,73 - 5 - 4 - 2,9 + V_A + 8,33 = 0 \\ V_A = 5,30 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \oplus \sum H = 0 \\ 1 + 9 - 0,78 + H_A = 0 \\ H_A = -9,22 \text{ kN} (\leftarrow) \end{aligned}$$

c)

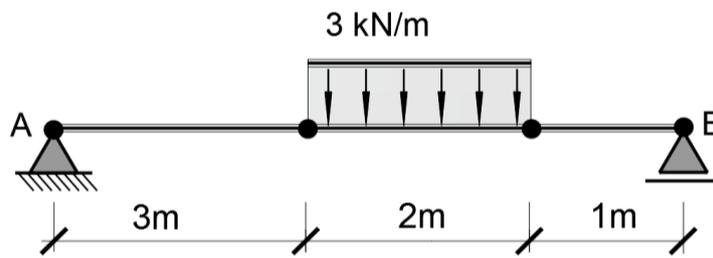


$$\begin{aligned} \curvearrowright + \sum M_A = 0 \\ 8 \times 3 + 2 \times 8 \times 4 - 8 \times V_B = 0 \\ V_B = 11 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \oplus \sum V = 0 \\ -8 - 2 \times 8 + 11 + V_A = 0 \\ V_A = 13 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \oplus \sum H = 0 \quad \therefore H_A = 0$$

d)

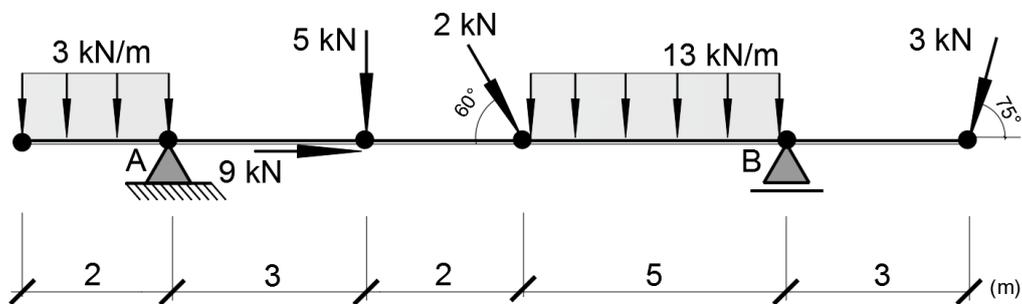


$$\begin{aligned} \curvearrowright + \sum M_A = 0 \\ + 3 \times 2 \times 4 - 6 \times V_B = 0 \\ V_B = 4 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \oplus \sum V = 0 \\ - 3 \times 2 + V_A + 4 = 0 \\ V_A = 2 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \oplus \sum H = 0 \\ H_A = 0 \end{aligned}$$

e)



$$\begin{aligned} \curvearrowright + \sum M_A = 0 \\ - 3 \times 2 \times 1 + 5 \times 3 + 1,73 \times 5 + 13 \times 5 \times 7,5 + 2,90 \times 13 - 10 \times V_B = 0 \\ V_B = 54,285 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \oplus \sum V = 0 \\ - 3 \times 2 - 5 - 1,73 - 13 \times 5 - 2,9 + V_A + 54,285 = 0 \\ V_A = 26,345 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \oplus \sum H = 0$$

$$9 + 1 - 0,78 + H_A = 0$$

$$H_A = - 9,22 \text{ kN} (\leftarrow)$$

4.8. ESFORÇOS SOLICITANTE INTERNOS (ESI) OU SECCIONAIS NAS ESTRUTURAS

VIGAS são elementos estruturais projetados para suportar carregamentos aplicados perpendicularmente a seus eixos. Em geral, são barras retilíneas e longas, com área de seção transversal constante.

Um sistema de forças (solicitações exteriores) atuando sobre um corpo (viga), encontra seu equilíbrio através das reações de apoio que provocam nos seus apoios (vínculos externos), desenvolvendo no seu interior um outro sistema de forças resultantes do estado de deformação a que fica sujeita, sendo o seu conhecimento fundamental para o estudo do comportamento em serviço e para o seu dimensionamento.

O efeito dessas forças internas poderá ser posto em evidência através do **método das seções**, que consiste em cortar imaginariamente o corpo em equilíbrio por um plano qualquer e, isoladamente, analisar o equilíbrio de cada uma das duas partes resultantes (Figura 74).

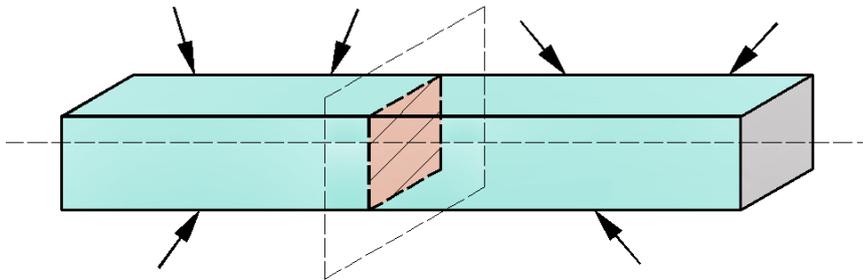


FIGURA 74. Seccionamento do corpo (aplicação Método das Seções).

Secionemos o corpo por um plano **P**, que o intercepta segundo uma seção **S**, dividindo-o em duas partes, **A** e **B** (Figura 75).

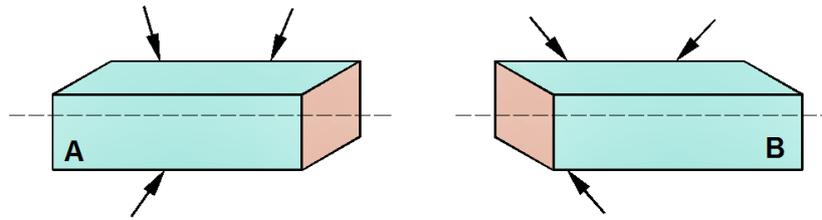


FIGURA 75. Divisão imaginária do corpo em 2 partes.

Uma vez que na seção do corte desapareceram as ligações entre as duas partes em que o corpo foi dividido, será necessário substituir a ação de cada uma delas sobre a outra por um sistema de forças aplicado na seção, de modo que o equilíbrio seja preservado.

Pelo princípio da ação e reação, os sistemas de forças interiores são sempre recíprocos, isto é, as resultantes do sistema de forças associado à seção da esquerda são iguais, porém de sinais contrários às associadas à seção da direita. Isto de forma que a soma das projeções dessas forças e dos momentos por elas produzidos, sejam na seção iguais a zero, já que de outro modo o corpo não estaria em equilíbrio.

Para se manter o equilíbrio numa seção qualquer, as forças da esquerda devem ser iguais às da direita.

Embora sem se conhecer a natureza e a distribuição das forças interiores ao longo de uma seção pode-se determinar a sua resultante e o seu momento resultante em relação a um ponto qualquer por intermédio de forças exteriores situadas de um mesmo lado da seção (Figura 76).

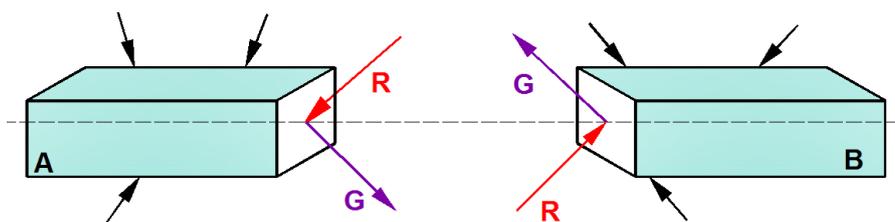


FIGURA 76. Representação das forças resultantes na seção de corte (lados A e B).

A força **R** que atua na parte da esquerda é a resultante das forças exteriores que ficaram à direita, e reciprocamente, a força **R** que atua na parte da direita é a resultante das forças exteriores que ficaram à esquerda.

O Momento **G** que atua na parte da esquerda é o momento resultante das forças exteriores que ficaram à direita, e reciprocamente. Cada seção do corpo em equilíbrio

está, portanto, sujeita a forças iguais e opostas e momentos iguais e opostos, a que a seção tem de resistir.

4.9. CLASSIFICAÇÃO DOS ESFORÇOS SIMPLES

Considerando inicialmente apenas a resultante R , ela pode ser sempre decomposta em uma componente normal N ao plano da seção e uma componente tangencial V ao plano da seção (componentes ortogonais), ilustradas na Figura 77.

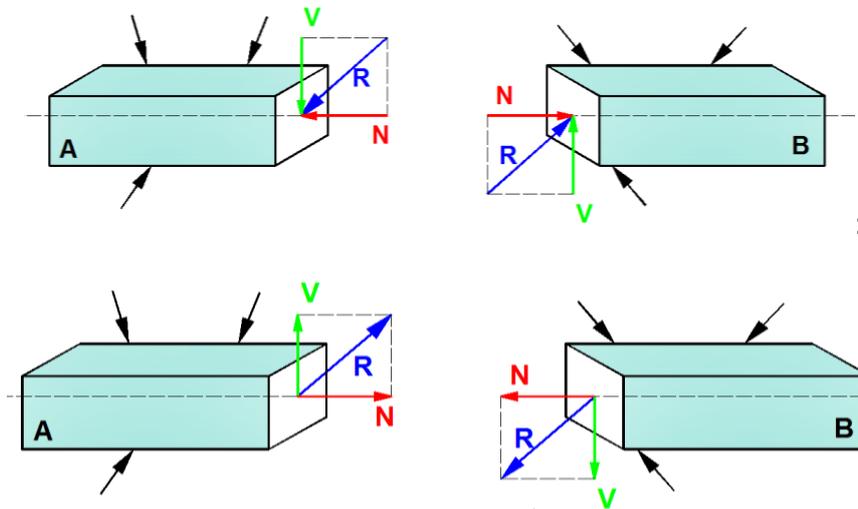


FIGURA 77. Componentes ortogonais da força resultante representadas nos lados A e B.

A projeção segundo a normal à seção, em geral referenciada com a letra N , é chamada de **esforço Normal** ou **esforço axial** e produz o deslocamento da seção numa direção perpendicular ao plano que a contém (afastando ou aproximando as seções) (Figura 78).

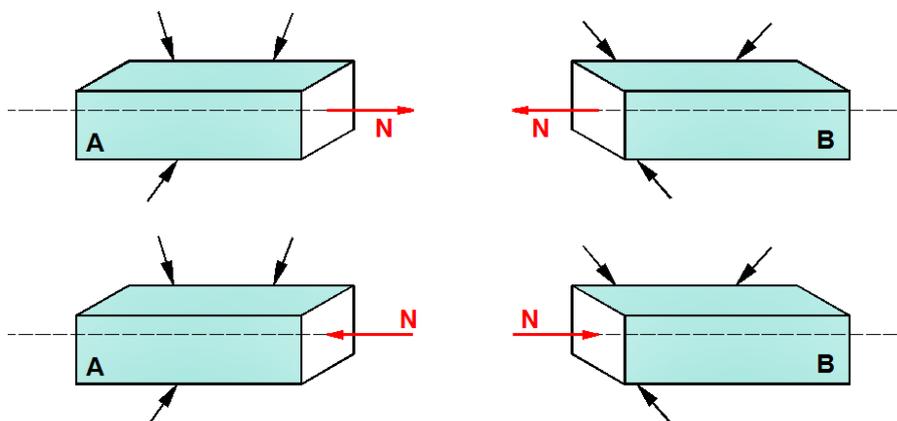


FIGURA 78. Esforço Normal (componente normal à seção imaginária de corte).

A tendência desse esforço é:

Esforço Normal N - é a soma algébrica dos componentes na direção normal (perpendicular) à seção, de cada uma das forças atuantes **de um dos lados da seção**. Aproxima ou afasta as seções próximas, isto é, age no sentido de comprimir ou tracionar a seção (Figura 79).

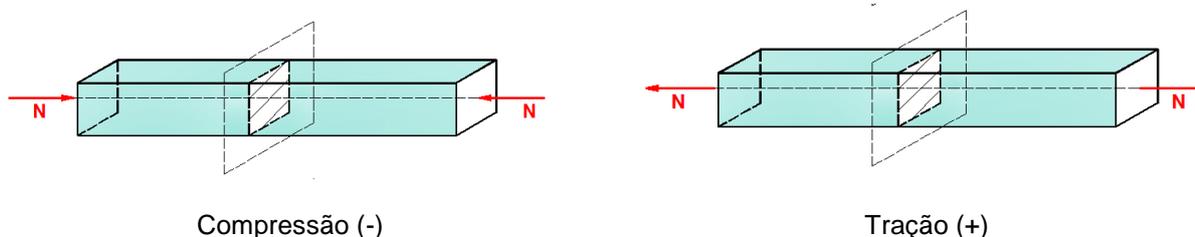


FIGURA 79. Esforço Normal (compressão e ou tração).

Já a componente vertical, denominada por **V** , é chamada de **esforço de Cortante** ou **esforço cisalhante** e produz o deslizamento entre as seções, como ilustrado na Figura 80.

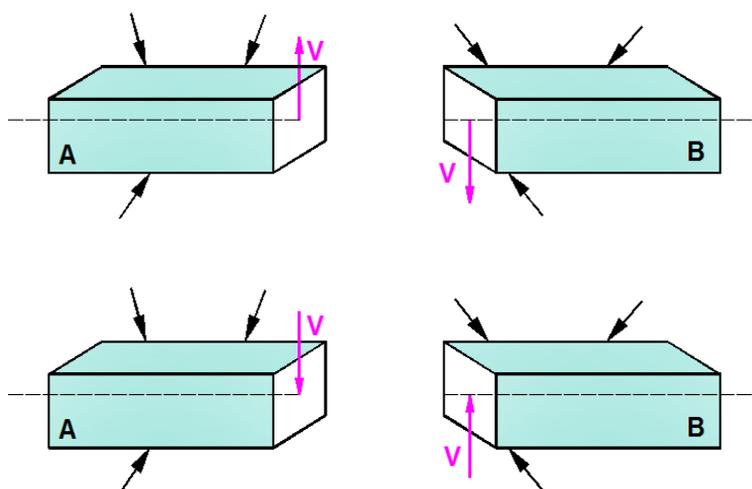


FIGURA 80. Esforço Cortante (componente tangencial à seção imaginária de corte).

A tendência desse esforço é:

Esforço Cortante V - é a soma vetorial das componentes sobre o plano da seção das forças situadas **de um dos lados da seção**. O esforço cortante é positivo (+) quando calculado pelas forças situadas do lado esquerdo da seção, tiver o sentido positivo do eixo ou quando calculado pelas forças situadas do lado

direito da seção, tiver o sentido negativo do eixo perpendicular à peça. O contrário dessa ação, será considerado esforço cortante negativo (-). Ele tende a cortar a seção, daí a designação de ESFORÇO CORTANTE (Figura 81).

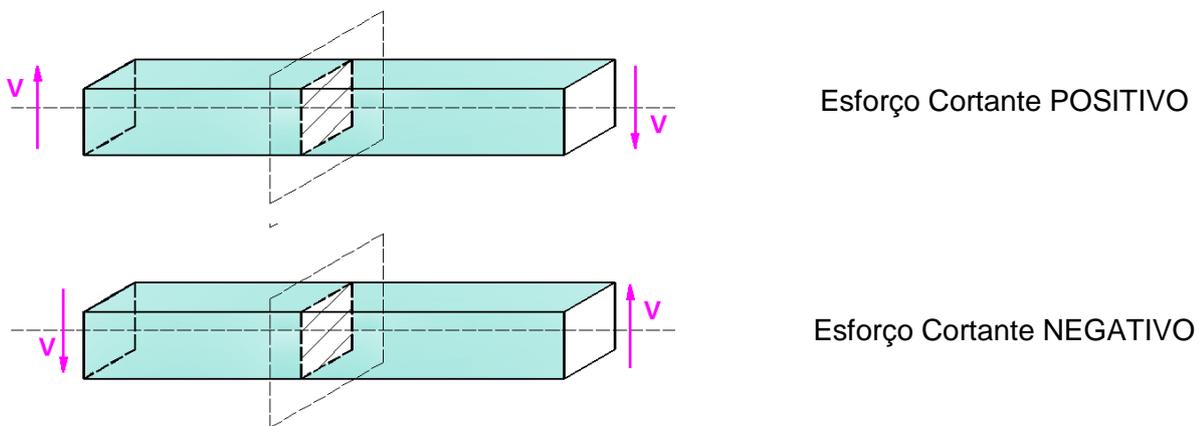


FIGURA 81. Representação do Esforço Cortante.

Considerando agora apenas o Momento resultante **G**, teremos suas componentes ortogonais: uma componente normal **T** e uma componente tangencial **M**, representados na Figura 82.

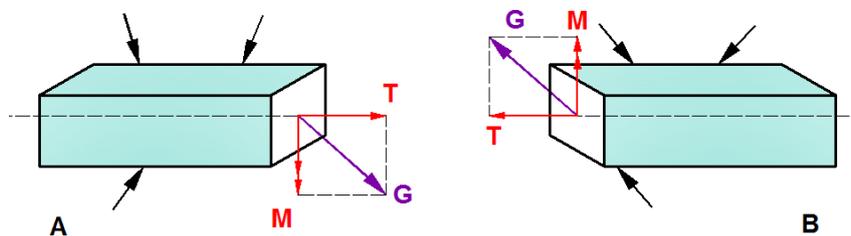


FIGURA 82. Componentes ortogonais do Momento resultante **G**.

A tendência desse esforço é:

Momento Fletor *M* – tende a provocar uma rotação da seção em torno de um eixo situado em seu próprio plano. Como um momento pode ser substituído por um binário, o feito de **M** pode ser assimilado ao binário ilustrado na Figura 83, que provoca uma tendência de alongamento em uma das partes da seção e uma tendência de encurtamento na outra parte, deixando a peça fletida.

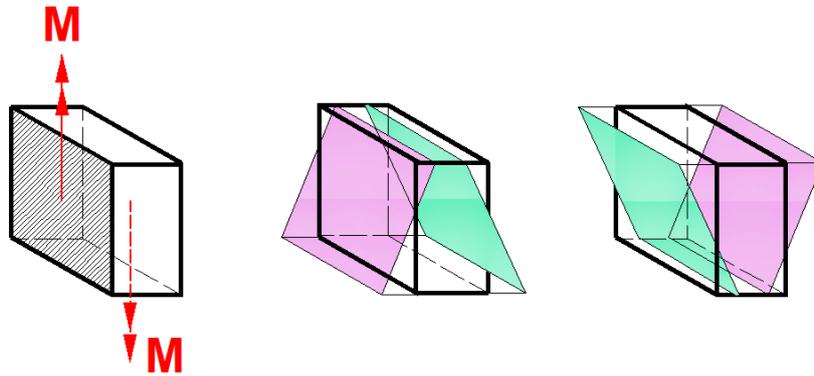


FIGURA 83. Efeito do momento fletor na seção.

Momento Torçor T – tende a promover uma rotação relativa entre duas seções infinitamente próximas em torno de um eixo que lhes é perpendicular, passando pelo seu centro de gravidade (tendência de torcer a peça) (Figura 84).

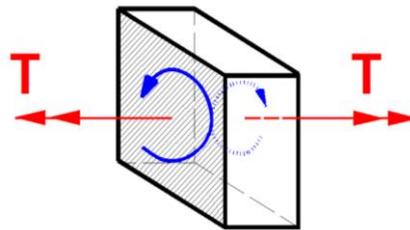


FIGURA 84. Efeito do momento torçor.

4.10. CONVENÇÕES DOS ESFORÇOS SIMPLES

Para determinar os valores desses esforços numa seção, basta estudar as forças que atuam de **um lado ou de outro**, pois os valores são iguais, apenas os sentidos diferem, o que implica no estabelecimento de convenções para que cheguemos ao mesmo sinal, quer trabalhem com forças de um lado ou de outro da seção. Assim temos:

- **Esforço Normal (N):** Tanto pelo lado esquerdo como pelo lado direito, se houver tração, o sinal será positivo e no caso de compressão, será negativo.

- **Esforço Cortante (V)** : O esforço cortante será positivo quando calculado pelas forças situadas à esquerda da seção for voltado para cima. Para não haver dualidade de sinal, é necessário inverter a convenção, se forem utilizadas no cálculo as forças situadas à direita da seção.
- **Momento Fletor (M)**: O momento fletor será positivo quando, calculado pelas forças situadas à esquerda da seção, tender a uma rotação no sentido horário. Para não haver dualidade de sinal, é necessário inverter a convenção, se forem utilizadas no cálculo as forças situadas à direita da seção, isto é, o momento será positivo pelas forças da direita, quando tender a uma rotação no sentido anti-horário.

4.11. DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES INTERNOS DE VIGAS ISOSTÁTICAS

Tendo-se em mente que os Esforços Internos Solicitantes (EIS) são funções de x (eixo local), os diagramas ou linhas de estado desses esforços constituem uma forma objetiva de indicar a variação destes ao longo da estrutura. Em termos de projetos estruturais, os diagramas são extremamente importantes, uma vez que fornecem os valores dos esforços em diferentes seções (pontos do elemento estrutural) além dos seus valores máximos (em módulo).

LINHAS DE ESTADO – chama-se linhas de estado ao estudo gráfico dos esforços seccionais ou esforços simples;

Frequentemente, os esforços internos são obtidos através de seus valores em determinadas seções, conhecidas como seções-chave. As seções-chaves delimitam os diferentes trechos de validade das funções dos EIS, constituindo-se como pontos nos quais os valores devem ser obrigatoriamente registrados nos diagramas para o seu completo entendimento, uma vez que são essenciais para o dimensionamento dos elementos estruturais. São consideradas seções-chaves todas as seções em que ocorrem alterações da estrutura e da configuração do carregamento a ela aplicado, tais como:

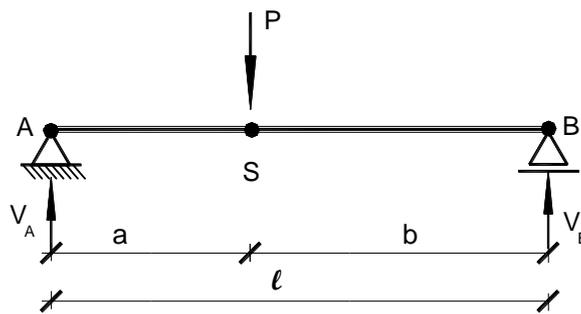
- Início e fim da estrutura;
- Início e final dos elementos (mudança de eixo local por mudança de direção);
- Seções em que ocorrem forças ou momentos concentrados, as quais incluem os apoios devido às forças reativas;

- Seções onde se iniciam ou terminam os carregamentos de forças ou momentos distribuídos;
- Em trechos submetidos a forças e momentos distribuídos, as seções onde ocorrem mudanças das funções que expressam tais carregamentos;
- Seções onde ocorrem os valores máximos e mínimos dos ESI. Atenção especial deve ser dedicada a estas seções, pois embora não possam ser identificadas à priori como as demais, elas são importantíssimas de serem convenientemente indicadas nos diagramas.

4.12. REGRAS BÁSICAS PARA O TRAÇADO DOS DIAGRAMAS

1. Determinar os valores dos esforços simples para as seções principais (*seções-chave*);
2. Marcar os valores dos esforços simples nas seções principais tendo em vista que para esforços cortantes e normais, os valores positivos são marcados para cima em barras horizontais. Para os momentos fletores esta convenção é invertida;
3. Para esforço normal, os valores das seções principais serão ligados por linhas retas. Para esforço cortante, os valores achados serão ligados por linhas retas paralelas ao eixo da peça, nos trechos descarregados. Para momento fletor, os valores encontrados para as seções, serão ligados por linhas retas, em geral inclinadas em relação ao eixo da peça, sob trechos descarregados.
4. Aparecerá descontinuidade no diagrama de esforço cortante, onde houver carga concentrada, que não seja paralela ao eixo da barra e no diagrama de esforço normal onde houver carga concentrada não perpendicular ao eixo da barra.
5. Sob uma carga concentrada o diagrama de momentos fletores apresenta um ponto anguloso e sob carregamento distribuído a representação do diagrama dos momentos fletores é uma parábola.

4.12.1. CARGA CONCENTRADA



A. REAÇÕES

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot l - P \cdot a = 0 \rightarrow V_B = \frac{Pa}{l}$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_B + V_A - P = 0$$

$$\rightarrow V_A = P - V_B \rightarrow V_A = P - \frac{Pa}{l} = \frac{Pl - Pa}{l} = \frac{P(l-a)}{l} \text{ como: } l-a=b$$

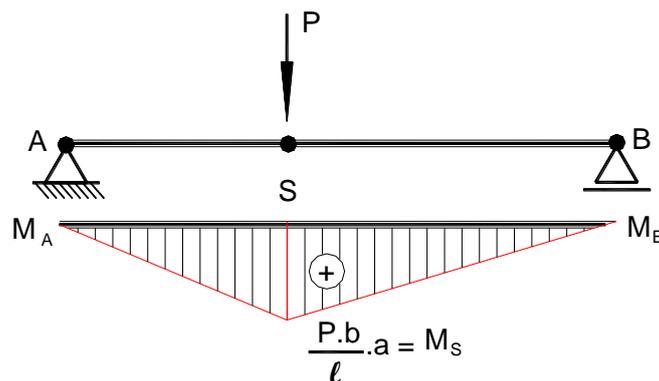
$$\rightarrow V_A = \frac{Pb}{l}$$

B. MOMENTO FLETOR

$$M_A = 0$$

$$M_B = 0$$

$$M_S = V_A \cdot a = \frac{P \cdot b}{l} \cdot a$$



C. ESFORÇO CORTANTE

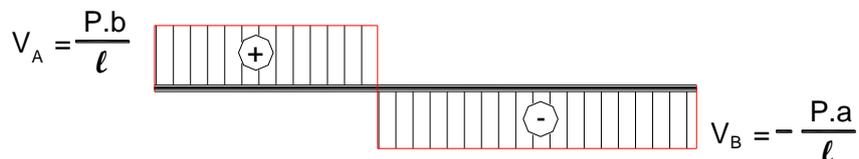
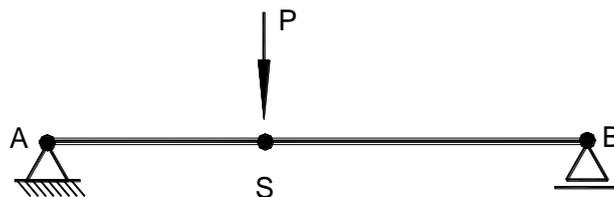
$$V_A = \frac{Pb}{l}$$

$$V_B = -\frac{Pa}{\ell}$$

$$V_S^{\text{esq}} = +V_A = \frac{Pb}{\ell}$$

$$V_S^{\text{dir}} = +V_A - P = \frac{P \cdot b}{\ell} - P = \frac{P \cdot b - P \cdot \ell}{\ell} = \frac{P(b - \ell)}{\ell} = \frac{-P(\ell - b)}{\ell}$$

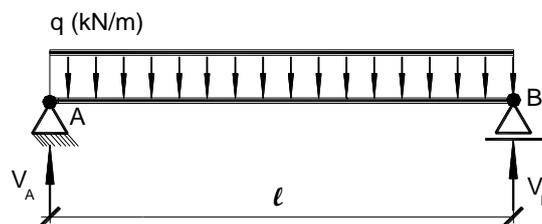
$$\rightarrow \text{como } \ell - b = a \rightarrow V_S^{\text{dir}} = \frac{-P \cdot a}{\ell}$$



OBS.:

- ① O diagrama de momento fletor apresenta um ponto anguloso em S;
- ② O diagrama de esforço cortante apresenta uma descontinuidade em S igual ao valor desta carga;

4.12.2. CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA



D. REAÇÕES

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot \ell - q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \rightarrow V_B = \frac{q\ell}{2}$$

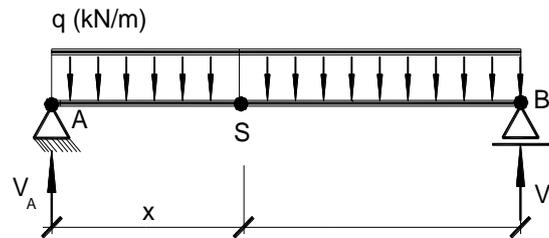
$$\sum V = 0 \rightarrow V_B + V_A - q \cdot \ell = 0$$

$$\rightarrow V_A = q \cdot \ell - V_B \rightarrow V_A = q \cdot \ell - \frac{q \cdot \ell}{2} = \frac{2q \cdot \ell - q \cdot \ell}{2} = \frac{q \cdot \ell}{2}$$

$$V_A = \frac{q \cdot \ell}{2}$$

E. MOMENTO FLETOR

O momento fletor numa seção qualquer (S) de abscissa x, vale:



$$M_A = 0$$

$$M_B = 0$$

$$M_S = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot \ell}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \rightarrow \text{função parabólica.}$$

Derivando esta expressão, temos:

$$\frac{dM_S}{dx} = \frac{q \cdot \ell}{2} - q \cdot x = V_S \rightarrow \text{a derivada do momento fletor é igual ao esforço cortante.}$$

Quando $V=0$ (esforço cortante igual a zero), o momento fletor será MÁXIMO. Assim sendo, temos:

$$\frac{dM_S}{dx} = 0 \rightarrow \frac{q \cdot \ell}{2} - q \cdot x = 0 \rightarrow \frac{q \cdot \ell}{2} = q \cdot x \therefore$$

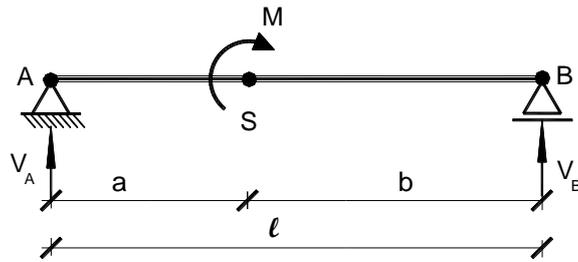
$$x = \frac{\ell}{2}, \text{ ou seja: no meio da viga o momento fletor é máximo.}$$

Cálculo do momento máximo:

$$M_{\text{máx}} = \frac{q \cdot \ell}{2} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot \ell}{2} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right) - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{q \cdot \ell^2}{4} - \frac{q \cdot \ell^2}{8} = \frac{2q \ell^2 - q \ell^2}{8} = \frac{q \ell^2}{8}$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{q \ell^2}{8}$$

4.12.3. CARGA MOMENTO



F. REAÇÕES

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot l - M = 0 \rightarrow V_B = \frac{M}{l}$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_B + V_A = 0$$

$$\rightarrow V_A = -V_B \rightarrow V_A = -\frac{M}{l}$$

$$V_A = -\frac{M}{l}$$

G. MOMENTO FLETOR

$$M_A = 0$$

$$M_B = 0$$

$$M_S^{\text{esq}} = V_A \cdot a = -\frac{M}{l} \cdot a$$

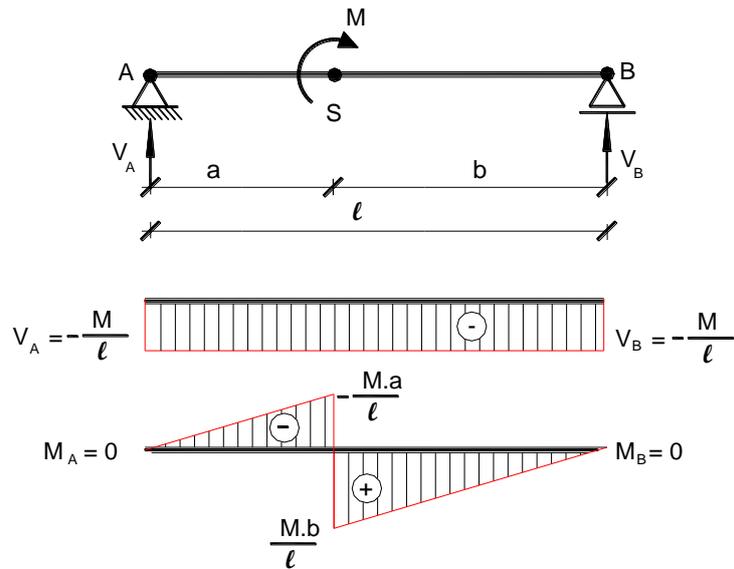
$$M_S^{\text{dir}} = V_A \cdot a + M = -\frac{M}{l} \cdot a + M = \frac{-M \cdot a + M \cdot l}{l} = \frac{M(l - a)}{l} = \frac{M}{l} \cdot b$$

H. ESFORÇO CORTANTE

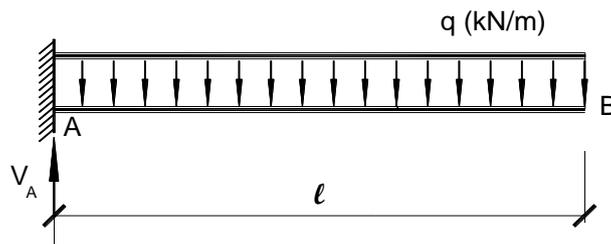
$$V_A = + V_A = -\frac{M}{l}$$

$$V_B = - V_B = -\frac{M}{l}$$

I. DIAGRAMAS



4.12.4. VIGAS ENGASTADAS (1 BORDO LIVRE)



A. REAÇÕES

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \rightarrow M = q \cdot \frac{l^2}{2}$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A - q \cdot l = 0 \rightarrow V_A = q \cdot l$$

B. MOMENTO FLETOR

$$M_A = -\frac{q \cdot l^2}{2}$$

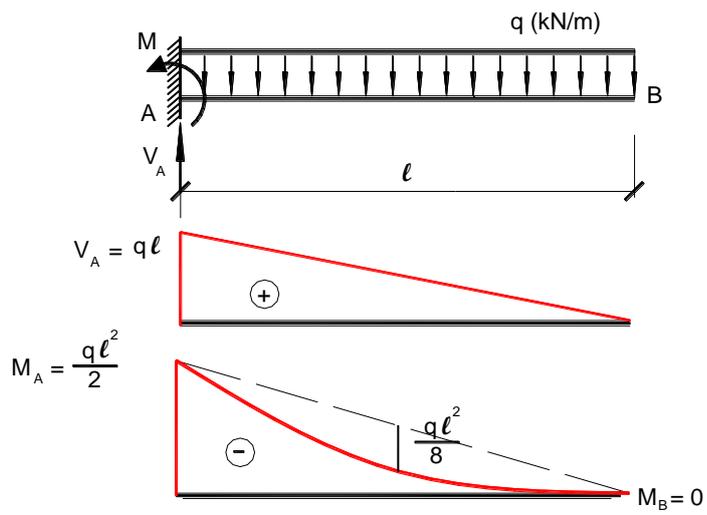
$$M_B = 0$$

C. ESFORÇO CORTANTE

$$V_A = + V_A = q \cdot l$$

$$V_B = 0$$

D. DIAGRAMAS



MÓDULO 4 – Exercícios

1. Traçar os diagramas dos esforços seccionais das vigas isostáticas a seguir:

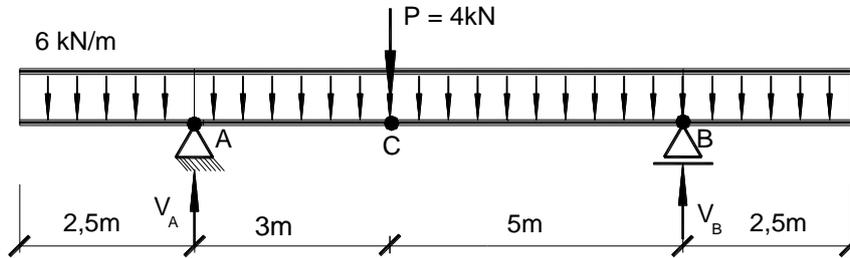


FIGURA 94.

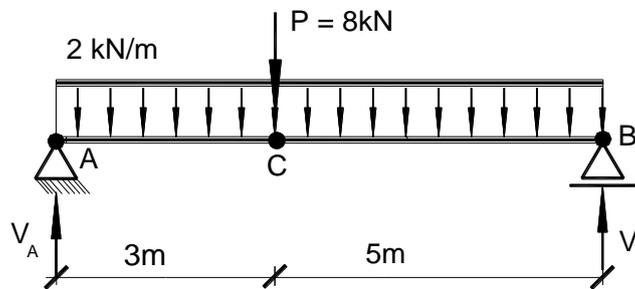


FIGURA 95.

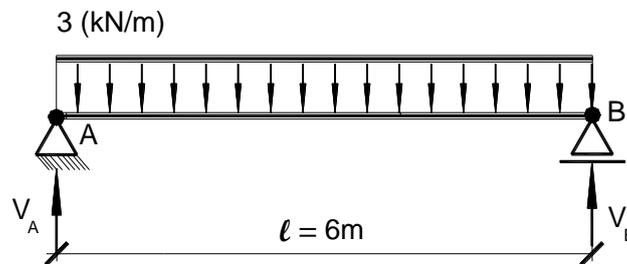


FIGURA 96.

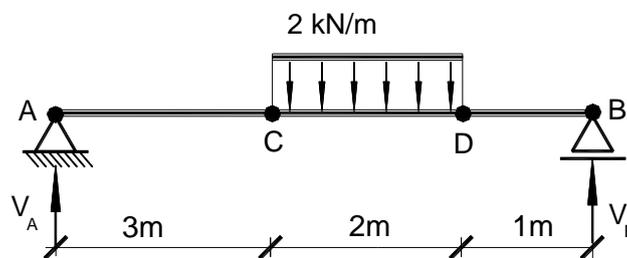


FIGURA 97.

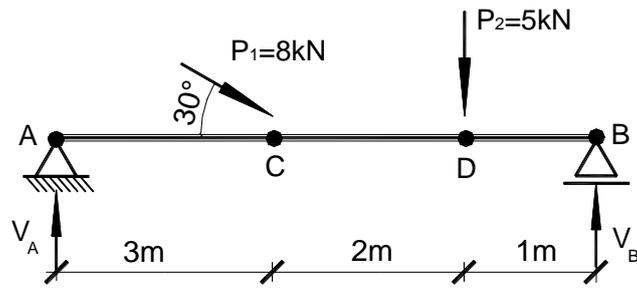


FIGURA 98.

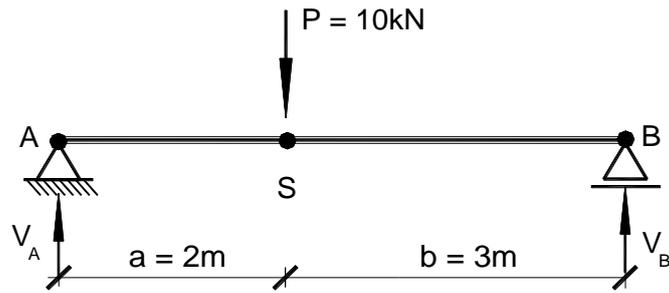


FIGURA 99.