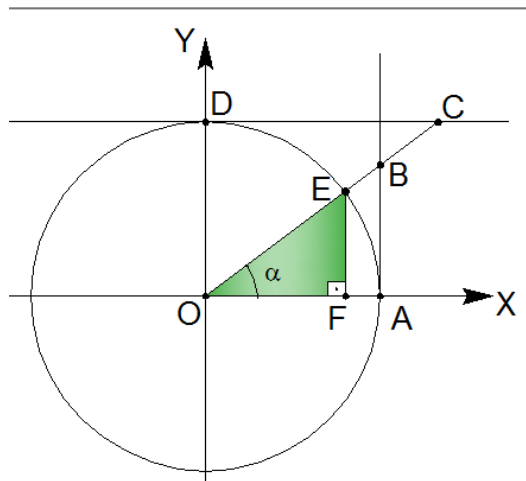


RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



NOTAS DE AULA:

- Prof. **Borja**

MÓDULO 1 – Relações Trigonométricas

OBJETIVOS

Ao final deste módulo o aluno deverá ser capaz de:

- resolver problemas que envolvam relações trigonométricas;
- determinar ângulos e comprimentos dos lados de um triângulo qualquer;
- decompor forças em suas componentes ortogonais;
- determinar resultante de sistema de forças.

1. INTRODUÇÃO – REVISÃO

1.1. SISTEMA DE UNIDADES

As unidades adotadas na mecânica referem-se às unidades de comprimento, tempo, massa e força. A unidade de força é a unidade derivada, geralmente chamada de *Newton* (N), definida como a forma que imprime uma aceleração de 1m/s^2 à massa de 1kg , conforme ilustrado na Figura 1.



FIGURA 1. Corpo sob ação de uma força.

$$1\text{N} = (1\text{kg})(1\text{m/s}^2) = 1\text{kg.m/s}^2$$

Na tabela 1 apresentam-se as unidades do Sistema Internacional (SI).

Tabela 1. Sistema Internacional de Unidade.

Quantidade	Símbolo dimensional	Unidade básica
Comprimento	L	metro (m)
Tempo	T	segundo (s)
Massa	M	quilograma (kg)
Força	F	Newton (N)

Na tabela 2 apresentam-se algumas conversões de unidades equivalentes.

Tabela 2 - Conversão de Unidades.

UNIDADE	EQUIVALENCIA
1 MPa	1 N/mm ²
1 MPa	1 x 10 ⁶ N/m ²
1 GPa	1 x 10 ⁹ N/m ²
1 kgf	9,81 N
1 kgf	2,20 lb
1 polegada (ou 1")	2,54 cm
1 m ²	10000 cm ²

1.2. TRIGONOMETRIA

A trigonometria é uma ferramenta poderosa para soluções de problemas que envolvam áreas, ângulos, decomposição de forças, em todas as áreas técnicas.

O nome trigonometria significa medida dos três ângulos de um triângulo e determina um ramo da matemática que estuda as relações entre esses ângulos e as medidas dos lados de um triângulo. As relações trigonométricas podem ser observadas na Figura 2.

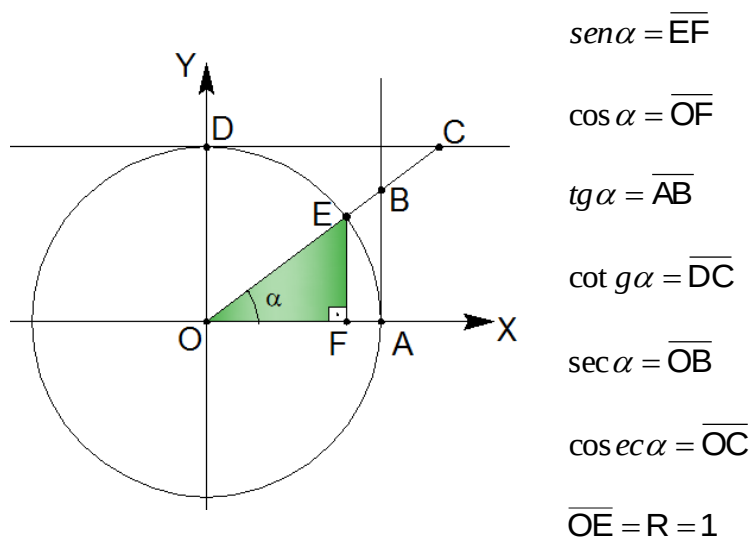
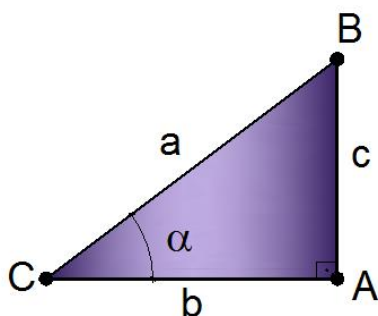


FIGURA 2. Círculo e funções trigonométricas.

1.3. TRIÂNGULO RETÂNGULO

No triângulo retângulo, Figura 3, os catetos são os lados que formam o ângulo de 90° . A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90° e é determinada pela relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \text{conhecida como TEOREMA DE PITÁGORAS.}$$



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{c}{b}\right) = \arcsen\left(\frac{c}{a}\right) = \arccos\left(\frac{b}{a}\right)$$

FIGURA 3. Relações Trigonômicas de um Triângulo Retângulo.

Relação fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

1.4. TRIÂNGULO QUALQUER

Para a solução de problemas de triângulo qualquer, utilizamos as relações trigonométricas conhecidas como Lei do Seno e Lei do Cosseno, apresentadas a seguir e representada graficamente na Figura 4.

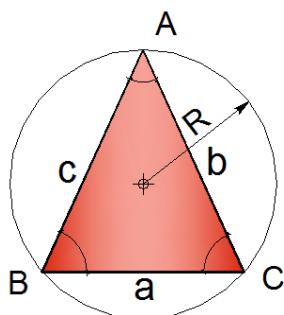


FIGURA 4. Triângulo Qualquer.

LEI DOS SENOS:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

LEI DOS COSSENOS:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

2. NOÇÕES FUNDAMENTAIS – ESTATICA DOS PONTOS MATERIAIS

2.1. FORÇAS NO PLANO

Uma força representa a ação de um corpo sobre outro, capaz de alterar o estado de movimento ou provocar deformações. Sua representação é feita através de vetores, caracterizada por seu ponto de aplicação, sua intensidade, direção e sentido.

A intensidade de uma força é definida por sua *linha de ação*. A linha de ação é a reta ao longo da qual a força atua, sendo caracterizada pelo ângulo que forma com algum eixo fixo (Figura 5). A força é representada por um segmento desta linha; usando uma escala apropriada, o comprimento desse segmento pode ser escolhido para representar a intensidade da força. As duas forças nesta figura têm a mesma intensidade e a mesma linha de ação, mas sentidos diferentes, provocando efeitos opostos sobre um ponto material **A**.

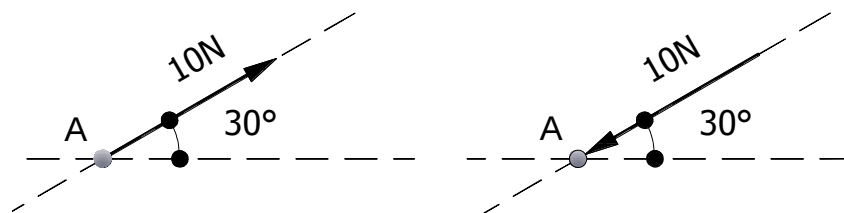


FIGURA 5. Linha de ação de uma força.

2.2. ADIÇÃO DE VETORES

Todas as quantidades vetoriais obedecem à *Lei do paralelogramo da adição*. Para ilustrar, os dois vetores componentes **A** e **B** na Figura 6a são somados para formar um vetor resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ usando o seguinte procedimento:

- Primeiro, uma as origens dos vetores componentes em um ponto de modo que se tornem concorrentes (Figura 6b);
- A partir da extremidade de **B**, desenhe uma linha paralela a **A**. Desenhe outra linha a partir da extremidade de **A** que seja paralela a **B**. Essas duas linhas se interceptam no ponto *P* para formar os lados adjacentes de um paralelogramo.
- A diagonal desse paralelogramo que se estende até *P* forma **R**, que então representa o vetor $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ (Figura 6c).

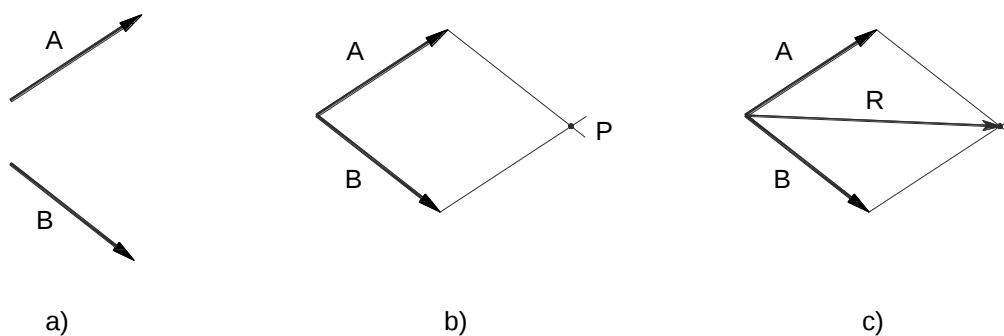


FIGURA 6. Resultante de duas forças concorrentes – Lei do Paralelogramo.

Diante do exposto, pode-se afirmar que duas forças que atuam sobre um ponto material podem ser substituídas por uma única força **R** que tenha o mesmo efeito sobre esse ponto. Essa força é chamada de resultante das forças e pode ser obtida pela construção de um paralelogramo, como visto acima. Este procedimento é conhecido como a lei do paralelogramo para a adição de duas forças, podendo ser deduzida matematicamente ou experimentalmente.

2.3. REGRA DO TRIÂNGULO

Também podemos somar **B** a **A** (Figura 7a) usando a *Regra do Triângulo*, que é um caso especial da lei do paralelogramo, em que o vetor **B** é somado ao vetor **A** da forma “extremidade-para-origem”, ou seja, conectando a extremidade de **A** com a origem **B** (Figura 7b). O **R** resultante se estende da origem de **A** à extremidade de **B**. De modo semelhante, **R** também pode ser obtido somando **A** a **B** (Figura 7c). Por comparação, vemos que a adição de vetores é comutativa; em outras palavras, os vetores podem ser somados em qualquer ordem, ou seja, $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

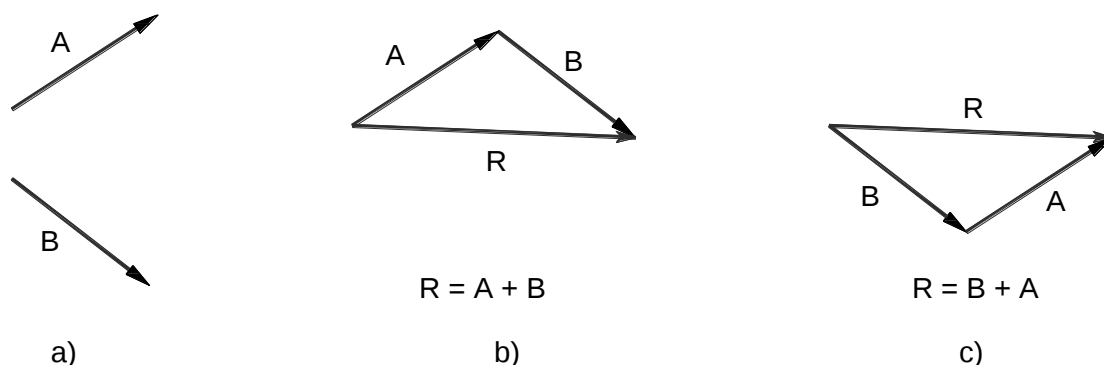


FIGURA 7. Regra do Triângulo.

No caso especial em que os dois vetores **A** e **B** são colineares, ou seja, ambos possuem a mesma linha de ação, a lei do paralelogramo reduz-se a uma adição algébrica ou escalar $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, como ilustrado na figura 8.

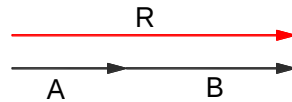


FIGURA 8. Adição de vetores colineares.

2.4. SUBTRAÇÃO DE VETORES

A resultante da diferença entre dois vetores **A** e **B** do mesmo tipo pode ser expressa como:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Essa soma de vetores é mostrada graficamente na Figura 9. A subtração é definida, portanto, como um caso especial da adição, de modo que as regras da adição vetorial também se aplicam à subtração de vetores.

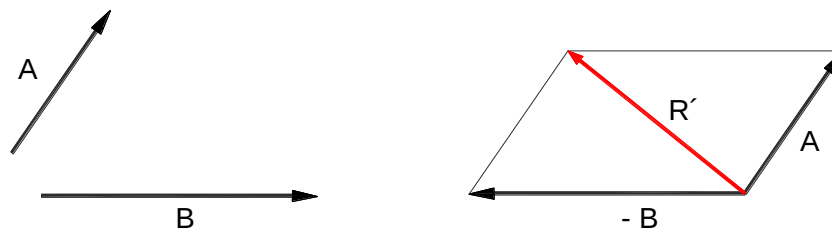


FIGURA 9. Lei do Paralelogramo – Subtração de Vetores.

2.5. ADIÇÃO DE VÁRIAS FORÇAS (RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS CONCORRENTES - SISTEMA DE FORÇAS)

Se mais de duas forças precisam ser somadas, aplicações sucessivas da lei do paralelogramo podem ser realizadas para obter a força resultante. Por exemplo, se três forças, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ atuam em um ponto **O** (Figura 10), a resultante de quaisquer duas das forças é encontrada (por exemplo, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$) e, depois, essa resultante é somada à terceira força, produzindo a resultante das três forças, ou seja, $\mathbf{F}_R = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_3$. O uso da lei do paralelogramo para adicionar mais de duas forças, como mostrado, normalmente requer cálculos extensos de geometria e trigonometria para determinar os valores numéricos da intensidade e direção da resultante. Em vez disso, problemas desse tipo podem facilmente ser resolvidos usando o “método das componentes retangulares”.

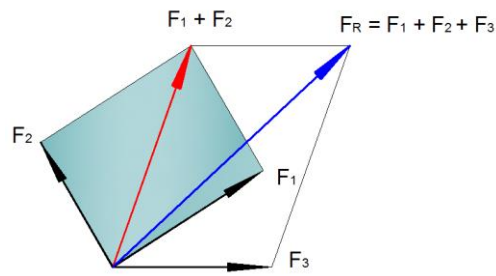


FIGURA 10. Método das componentes retangulares.

2.6. PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

- Duas forças “componentes” F_1 e F_2 na Figura 11 se somam conforme a lei do paralelogramo, dando uma força resultante F_R que forma a diagonal do paralelogramo.

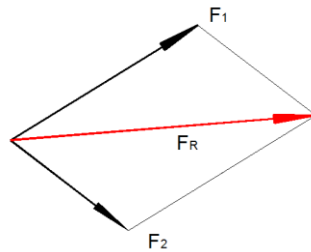


FIGURA 11. Lei do paralelogramo.

- Se uma força F precisar ser decomposta em componentes ao longo de dois eixos u e v (Figura 12), então iniciando na extremidade da força F , construa linhas paralelas aos eixos, formando, assim, o paralelogramo. Os lados do paralelogramo representam as componentes, F_u e F_v .

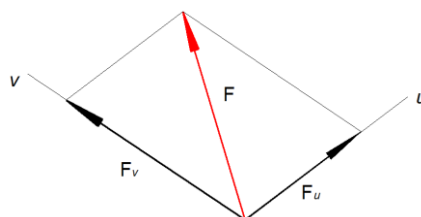


FIGURA 12. Decomposição de forças.

- Rotule todas as intensidades das forças conhecidas e desconhecidas e os ângulos no esquema e identifique as duas forças desconhecidas quanto à intensidade e à direção de F_R ou às intensidades de suas componentes.

MÓDULO 1 – Exercícios

1. O gancho ilustrado na Figura 13 está sujeito a duas forças, F_1 e F_2 . Determine a intensidade e a direção da força resultante.

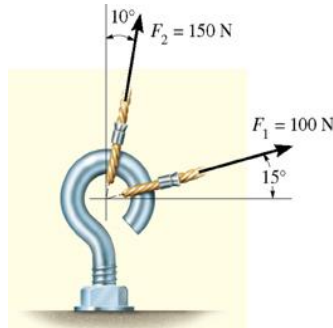


Figura 13.

2. A resultante F_R das duas forças que atuam sobre a tora de madeira (Figura 14) deve estar orientada ao longo do eixo x positivo e ter uma intensidade de 10 kN . Determine o ângulo θ do cabo acoplado a B para que a intensidade da força F_B nesse cabo seja mínima. Qual a intensidade da força em cada cabo, nessa situação.

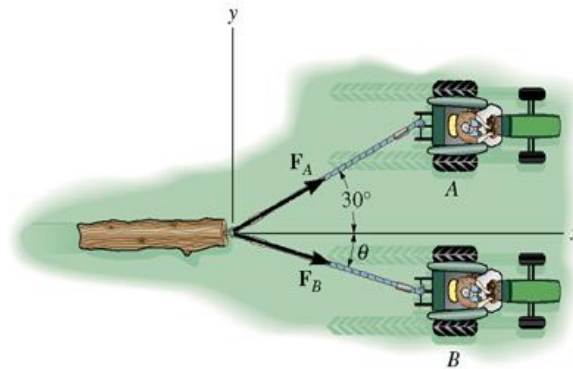


Figura 14.

3. Três cabos puxam um tubo de tal modo que geram uma força resultante com intensidade de 1800 N . Se dois dos cabos estiverem submetidos a forças conhecidas, como mostra a Figura 15, determine o ângulo θ do terceiro cabo, de modo que a intensidade da força F neste cabo seja mínima. Todas as forças estão localizadas no plano x - y . Qual é a intensidade de F ? *Dica: determine primeiro a resultante das forças conhecidas*

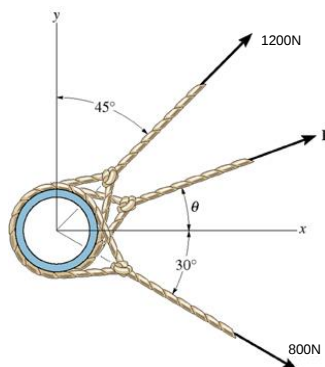


Figura 15.

4. Três correntes atuam sobre o suporte, de modo a criarem uma força resultante com intensidade de 1000N. Se duas das correntes estão submetidas a forças conhecidas, como mostra a Figura 16, determine o ângulo θ da terceira corrente, medida no sentido horário a partir do eixo x positivo, de modo que a intensidade da força F nessa corrente seja mínima. Todas as forças estão localizadas no plano x - y . Qual é a intensidade de F ? *Dica: determine primeiro a resultante das duas forças conhecidas. A força F atua nessa direção.*

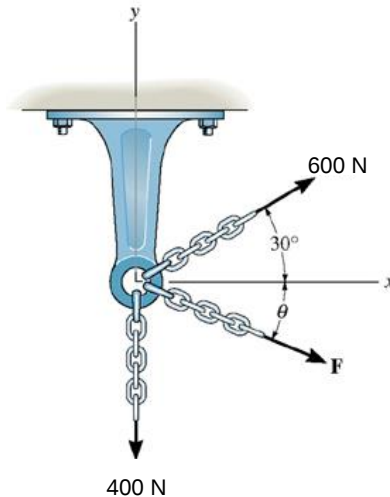


Figura 16.

5. A viga ilustrada na Figura 17 deve ser içada usando-se duas correntes. Se a força resultante for de 600N, orientada ao longo do eixo y positivo, determine as intensidades das forças F_A e F_B que atuam em cada corrente e o ângulo θ de F_B para que a intensidade F_B seja mínima. F_A atua a 30° do eixo y .

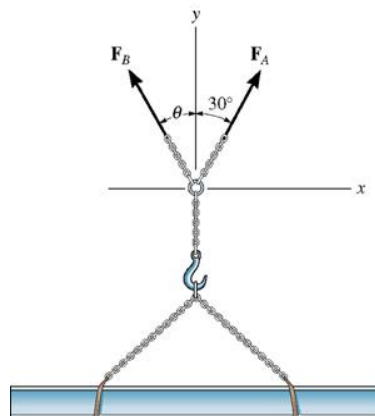


Figura 17.

6. Sabendo-se que $\alpha = 40^\circ$, determine a resultante das três forças ilustradas na Figura 18.

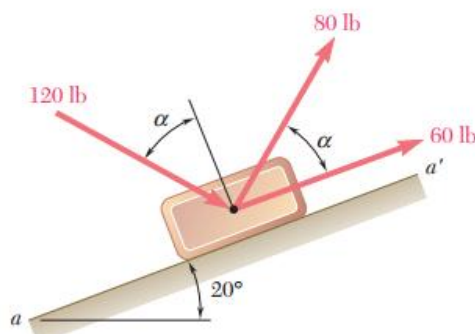


Figura 18.

7. Referindo-se à Figura 19, determine as componentes da força **P** e **F** ao longo dos eixos *x* e *y* os quais são respectivamente, paralelo e perpendicular aos planos.

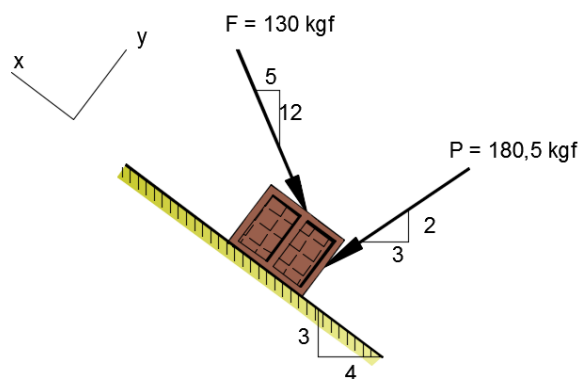


Figura 19.

8. Com base na Figura 20, determine os componentes *x* e *y* da força de 800lb.

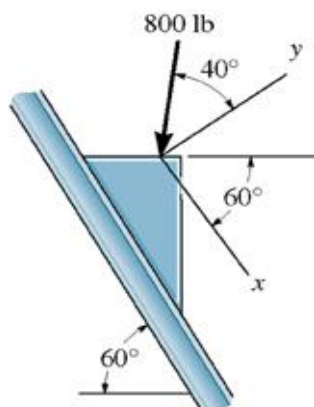


Figura 20.

9. Determine a intensidade da força resultante e sua direção, medida no sentido horário a partir do eixo *x* positivo, das forças atuantes no aro ilustrado na Figura 21.

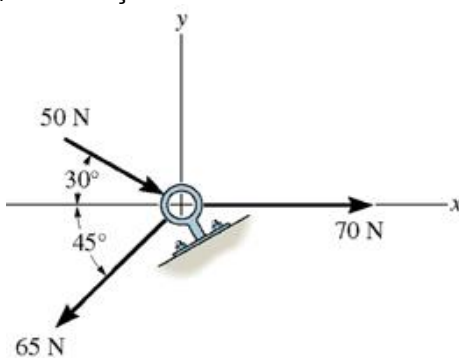


Figura 21.

10. Determine a intensidade da força **F**, de modo que a resultante **F_R** das três forças seja a menor possível na conexão apresentada na Figura 22.

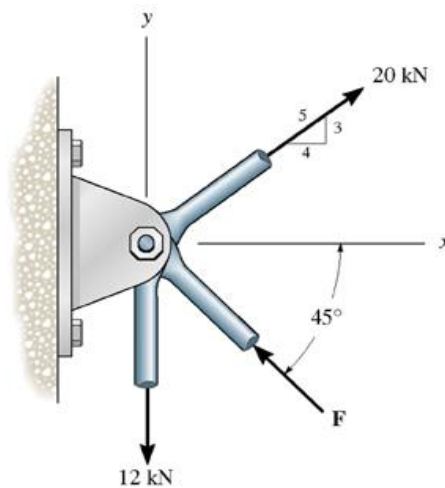


Figura 22.

11. Determine a intensidade da força resultante e sua direção, medida no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo, das forças ilustradas na Figura 23.

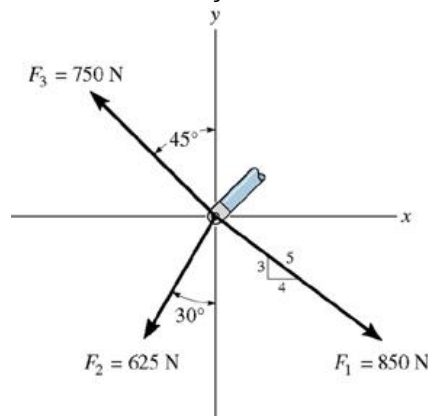


Figura 23.

12. Três forças atuam sobre o suporte da Figura 24. Determine a intensidade e a direção θ de $\mathbf{F}_1$, de modo que a força resultante seja orientada ao longo do eixo x' positivo e tenha intensidade de 1 kN.

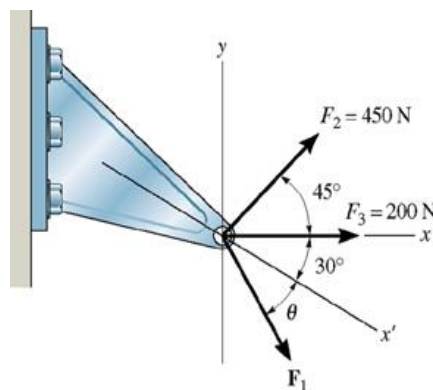


Figura 24.

13. Ainda com base na Figura 24, se $\mathbf{F}_1 = 300\text{ N}$ e $\theta = 20^\circ$, determine a intensidade e a direção, medida no sentido anti-horário, a partir do eixo x' , da força resultante das três forças que atuam sobre o suporte.
14. Determine a intensidade e a direção de θ de $\mathbf{F}_1$, de modo que a força resultante seja orientada verticalmente para cima e tenha intensidade de 800 N (Figura 25).

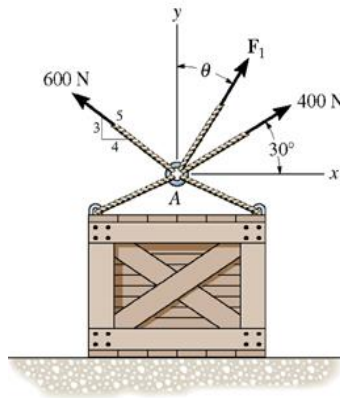


Figura 25.

15. Determine a intensidade e a direção, medida no sentido anti-horário, a partir do eixo x , da força resultante das três forças que atuam sobre o anel A (Figura 25). Considere que $F_1 = 500\text{ N}$ e $\theta = 20^\circ$.
16. Expresse F_1 e F_2 como vetores cartesianos. (Figura 26).
17. Determine a intensidade da força resultante e sua direção, medida no sentido anti-horário, a partir do eixo x positivo (Figura 26).

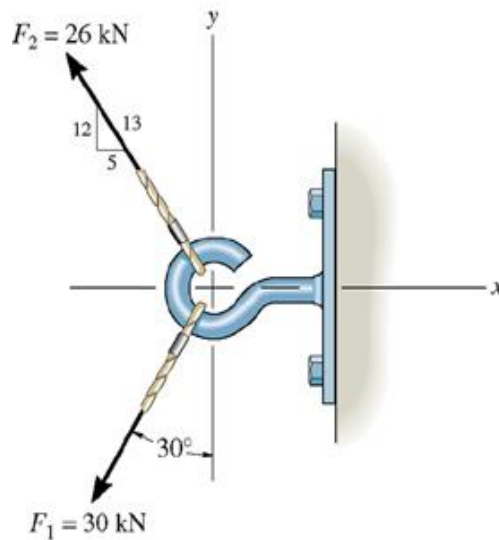


Figura 26.

18. Determine a intensidade e a orientação θ de F_B , de modo que a força resultante seja orientada ao longo do eixo y positivo e tenha intensidade de 1500 N (Figura 27).
19. Determine a intensidade e a orientação, medida no sentido anti-horário, a partir do eixo y positivo, da força resultante que atua sobre o suporte, se $F_B = 600\text{ N}$ e $\theta = 20^\circ$ (Figura 27).

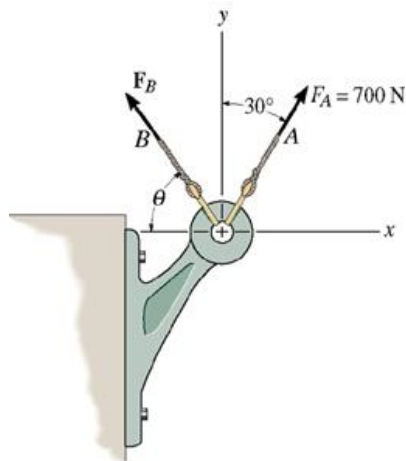


Figura 27.

20. Determine as componentes x e y de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ das forças atuantes no suporte da Figura 28.

21. Determine a grandeza da força resultante e sua direção, medida no sentido anti-horário, a partir do eixo x positivo.

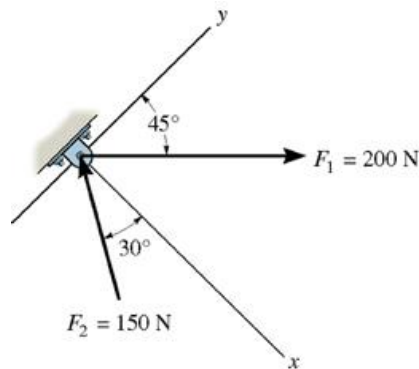


Figura 28.

22. Determine os componentes x e y de cada força que atua sobre a chapa de ligação da estrutura tipo treliça que sustenta a ponte. Demonstre que a força resultante é nula.

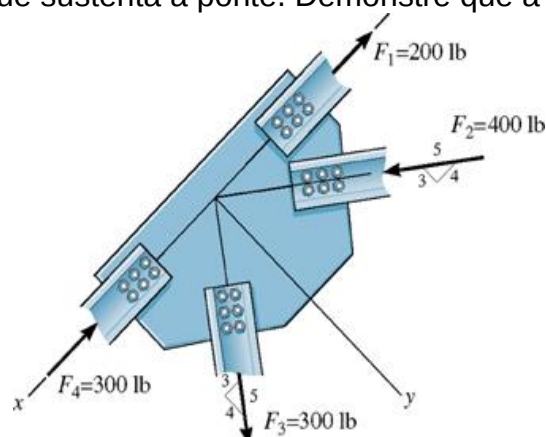


Figura 29.

23. Se $\theta = 60^\circ$ e $\mathbf{F} = 20\text{kN}$, determine a intensidade da força resultante e sua direção, medida no sentido horário, a partir do eixo x positivo.

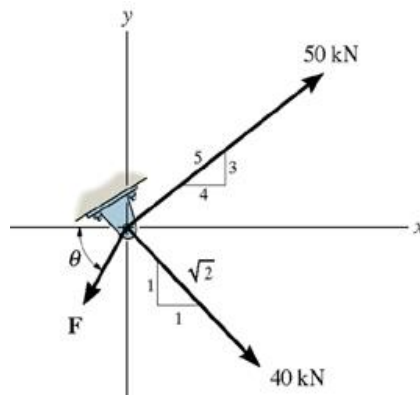


Figura 30.

24. Determine a intensidade e a orientação θ de $\mathbf{F}_A$, de modo que a força resultante seja orientada ao longo do eixo x positivo e tenha intensidade de 1250N (Figura 31).
25. Determine a intensidade e a orientação, medida no sentido anti-horário, a partir do eixo x positivo, da força resultante que atua sobre o anel em O, se $\mathbf{F}_A = 750\text{N}$ e $\theta = 45^\circ$.

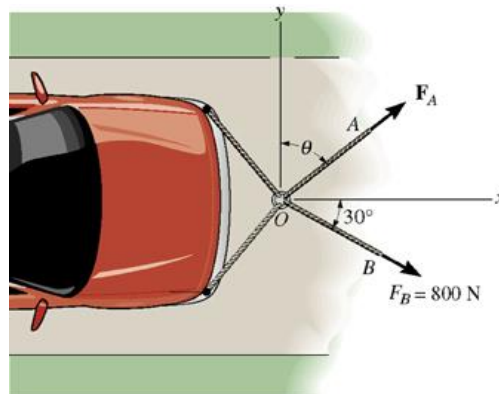


Figura 31.

26. Expresse cada uma das três forças que atuam sobre a coluna da Figura 32, na forma vetorial cartesiana e calcule a intensidade da força resultante.

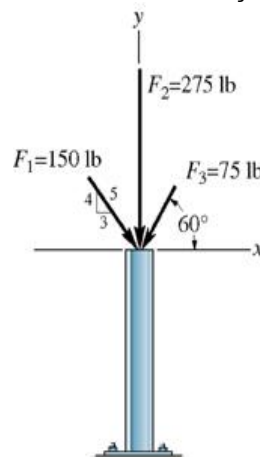


Figura 32.

27. As três forças concorrentes que atuam sobre o olhal (Figura 33) produzem uma força resultante $\mathbf{F}_R = 0$. Se $\mathbf{F}_R = \frac{2}{3} \mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_1$ estiver a 90° de $\mathbf{F}_2$, como mostrado, determine a intensidade necessária de $\mathbf{F}_3$ expressa em termos de $\mathbf{F}_1$ e do ângulo θ .

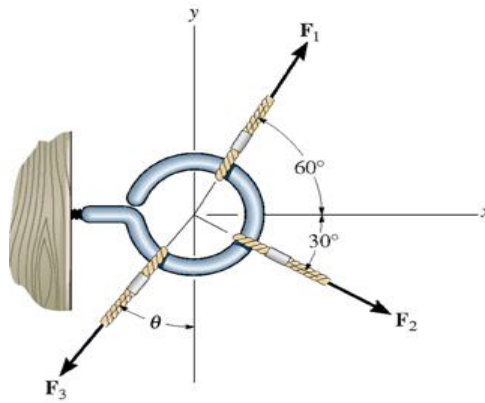


Figura 33.

28. Com base na peça de suporte ilustrada na Figura 34, determine a intensidade da força F , de modo que a resultante das três forças F_R seja a menor possível. Qual é a intensidade mínima de F_R ?

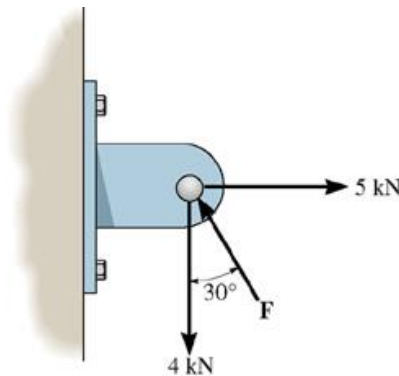


Figura 34.

29. Expresse cada uma das três forças que atuam sobre o suporte em forma vetorial cartesiana (Figura 35) em relação aos eixos x e y . Determine a intensidade e a orientação θ de F_1 , de modo que a força resultante seja orientada ao longo do eixo x' positivo e tenha intensidade $F_R = 600\text{ N}$.

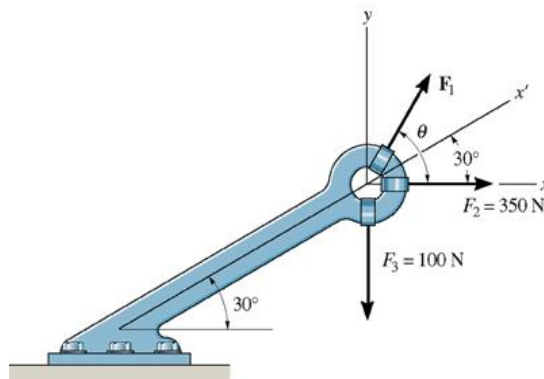


Figura 35.

30. As três forças concorrentes que atuam sobre o poste produzem uma força resultante $F_R = 0$, conforme ilustrado na Figura 36. Se $F_2 = \frac{1}{2} F_1$ e F_1 estiver a 90° de F_2 , determine a intensidade necessária de F_3 expressa em termos de F_1 e do ângulo θ .

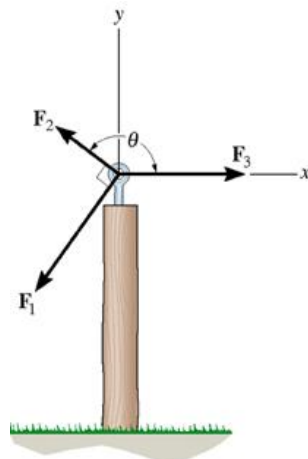


Figura 36.

31. Três forças F_1 , F_2 e F_3 atuam sobre um olhal, como ilustrado na Figura 37. Com base nessa figura, determine a intensidade e a orientação θ de F_2 , de modo que a força resultante seja orientada ao longo do eixo u positivo e tenha intensidade de 50 lb.

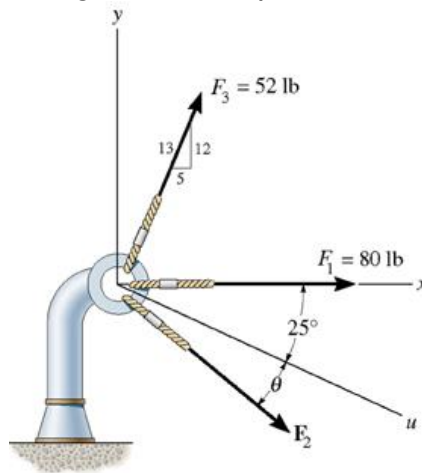


Figura 37.

32. Se $F_2 = 150$ lb e $\theta = 55^\circ$, determine a intensidade e a orientação, medida no sentido horário, a partir do eixo x positivo, da força resultante das três forças que atuam sobre o suporte da Figura 37.
33. Determine a intensidade da força F atuante no suporte da Figura 38, de modo que a força resultante das três forças seja a menor possível. Qual é a intensidade da força resultante?

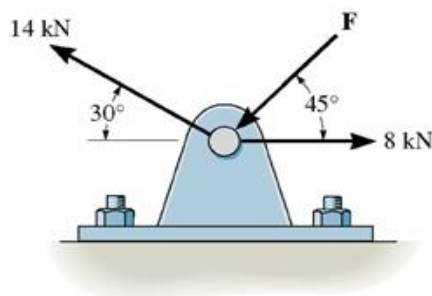


Figura 38.