INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Apodi

Curso de Nivelamento

Matemática Subzero

Módulo 1: Divisibilidade

Autores
Antonio Edson Pereira da Silva Filho
Francisco Derilson de Melo
José Ueslei Marques Pascoal
Welton Batista dos Santos

Maio/2016

Apresentação

Este módulo destina-se ao estudo do conceito de divisibilidade entre números naturais, que é conceito primordial para o desenvolvimento da **Aritmética**. Dessa forma, define-se o multiplos e divisores de um número natural, e daí, desenvolvem-se outros conceitos de imensa relevância para a resolução de situações-problema, como máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

A Aritmética teve como principal marco inicial a obra *Os Elementos*, de Euclides (aproximadamente 300 a.C.), alcançando o seu auge nos trabalhos de Pierre de Fermat (1601 – 1665) e Leonhard Euler (1707 – 1783), o que levou a se tornar um dos principais pilares da Matemática. A partir do século XIX, graças a obra de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), a Aritmética transforma-se em **Teoria dos Números** e começa a ter um desenvolvimento extraordinário.

O módulo é organizado como segue: seis seções, divididas em subseções. Cada seção contém diversos exemplos e, ao seu final, alguns exercícios para fixação dos conceitos abordados. A última seção, entitulada *Exercícios Gerais*, contém exercícios complementares que tem por objetivo apresentar um panorama geral dos assuntos abordados no módulo.

1

Divisibilidade

O Problema dos Armários

Na sala dos professores do IFRN - *Campus* Apodi há 60 armários, numerados de 1 a 60, inicialmente todos fechados. Um certo dia, os 60 professores do *campus* foram numerados de 1 a 60 para realizar a seguinte brincadeira: o professor número 1 passa pelo corredor e abre todos os armários; em seguida, o professor número 2 passa e fecha todos os armários de número par; depois passa o professor de número 3, inverte a posição das portas de todos os armários "múltiplos de 3", isto é, ele os fecha se estiverem abertos e os abre se estiverem fechados; depois, é a vez do professor número 4 que inverte a posição das portas dos armários "múltiplos de 4", e assim sucessivamente. Após a passagem dos 60 professores, quais armários ficarão abertos?

Esse problema requer o conceito de *divisibilidade*, especialmente, os múltiplos e os divisores de um número natural, conteúdos abordados neste capítulo.

1.1 Múltiplos e Divisores

Sejam a e b números naturais, com $b \neq 0$, se a divisão a por b é exata, dizemos que a é **divisível** por b, e ainda que:

- ☞ a é **múltiplo** de b;
- ☞ b é **divisor** de a.

Assim, por exemplo, na operação $28 \div 4 = 7$, podemos dizer que 28 é **divisível** por 4, que 28 é **múltiplo** de 4 e que 4 é **divisor** de 28.

Exercício 1.1 *Quais são as sentenças verdadeiras? Justifique sua resposta.*

(a) 35 é múltiplo de 7.
(b) 180 é divisível por 40.
(c) 7 é divisor de 42.
(d) 24 é múltiplo de 144.
(e) 252 é divisível por 12.
(f) 10 é divisor de 5.
(g) 69 é múltiplo de 31.
(h) 510 é divisível por 34.
(i) 17 é divisor de 34.
(j) 764 é múltiplo de 12.

1.1.1 Conjunto dos Múltiplos de um Número Natural

Para encontrar um múltiplo de um número natural, basta multiplicar esse número por um natural qualquer. Por exemplo, multiplicando 4 por 7, obtemos 28, que é múltiplo de 7. Com a sequência dos números naturais, podemos obter tantos múltiplos de 7 quantos quisermos. Observe:

$$\begin{gathered}0 \cdot 7 = 0\\ 1 \cdot 7 = 7\\ 2 \cdot 7 = 14\\ 3 \cdot 7 = 21\\ 4 \cdot 7 = 28\\ 5 \cdot 7 = 35\\ \vdots\end{gathered}$$

Assim, os múltiplos naturais de 7 são $0, 7, 14, 21, 28, 35, \ldots$, o que sugere a seguinte definição.

O conjunto dos múltiplos de um natural qualquer $a \neq 0$ indica-se por $M(a)$, isto é:

$$\boxed{M(a) = \{m \in \mathbb{N};\ m \text{ é divisível por } a\}.}$$

Da mesma forma, podemos escrever que, por exemplo:

- ☞ $M(1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- ☞ $M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$
- ☞ $M(15) = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, \ldots\}$
- ☞ $M(23) = \{0, 23, 46, 69, 92, 115, \ldots\}$

Observações:

❶ Dado um número natural *diferente de zero*. Temos que:

- ➢ esse número tem infinitos múltiplos;
- ➢ zero é múltiplo desse número;
- ➢ esse número é múltiplo de si mesmo.

❷ O número **zero** constitui um caso especial: o zero é o único múltiplo de zero. Isso porque, apesar de qualquer número natural multiplicado por zero resultar em zero, **não podemos dizer que um número é divisível por zero, porque não existe divisão por zero.**

Exercício 1.2 *Determine os cinco primeiros múltiplos de:*

(a) 3

(b) 8

(c) 12

(d) 29

Exercício 1.3 *Determine:*

(a) os múltiplos de 9 menores que 50;
(b) os múltiplos de 6 maiores que 20;
(c) os múltiplos de 14 entre 40 e 90;
(d) os múltiplos de 10 entre 12 e 50.

1.1.2 Conjunto dos Divisores de um Número Natural

O conjunto de todos os divisores de um natural qualquer a indica-se por $D(a)$, isto é:

$$\boxed{D(a) = \{d \in \mathbb{N} - \{0\};\ a \text{ é divisível por } d\}.}$$

Da mesma forma, podemos escrever que, por exemplo:

☞ $D(0) = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

☞ $D(1) = \{1\}$

☞ $D(2) = \{1, 2\}$

☞ $D(5) = \{1, 5\}$

☞ $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

☞ $D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Observações:

❶ Todo número natural maior do que 1 possui pelo menos dois divisores o número 1 e ele mesmo.

❷ O maior divisor de um número natural não nulo é o próprio número. Desse modo, todo número natural não nulo possui uma quantidade finita de divisores.

❸ O zero não é divisor de nenhum número natural, pois não é definida divisão por zero nos números naturais.

Exercício 1.4 *Determine os divisores naturais de:*

(a) 3
(b) 8
(c) 12
(d) 90

Exercício 1.5 *Quais são os divisores de 80 que também são divisores de 120?*

Exercício 1.6 *Você já reparou que os laboratórios preparam remédios para serem tomados a cada 6, 8 ou 12 horas? Por que será que eles não sugerem doses de 5 em 5 horas, por exemplo?*

1.2 Critérios de Divisibilidade

Vimos anteriormente que a regra geral para saber se um número natural é divisível por outro é efetuar a divisão entre eles e verificar se ela é exata. Entretanto, em alguns casos podemos descobrir se um número é divisível por outro sem ter de efetuar a divisão. Vamos ver como isso é possível estudando os **critérios de divisibilidade**.

Divisibilidade por 2

Um número natural é divisível por 2 somente quando ele é par, isto é, termina em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemplo 1.2.1 *:*

São divisíveis por 2:

✔ *974, pois termina em 4.*

✔ *1.798, pois termina em 8.*

✔ *201.670, pois termina em 0.*

Não divisíveis por 2:

✗ *437, pois termina em 7.*

✗ *2.019, pois termina em 9.*

✗ *11.111, pois termina em 1.*

Divisibilidade por 3

Um número natural é divisível por 3 somente quando a soma dos valores de seus algarismos é um número divisível por 3.

Exemplo 1.2.2 *:*

São divisíveis por 3:

✔ *972, pois* $9 + 7 + 2 = 18$ *que é divisível por 3.*

✔ *1.701, pois* $1 + 7 + 0 + 1 = 9$ *que é divisível por 3.*

✔ *201.270, pois* $2 + 0 + 1 + 2 + 7 + 0 = 12$ *que é divisível por 3.*

Não divisíveis por 3:

✗ *437, pois* $4 + 3 + 7 = 14$ *que não é divisível por 3.*

✗ *2.003, pois* $2 + 0 + 0 + 3 = 5$ *que não é divisível por 3.*

✗ *12.319, pois* $1 + 2 + 3 + 1 + 9 = 16$ *que não é divisível por 3.*

Divisibilidade por 4

Um número natural é divisível por 4 somente quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos à direita é divisível por 4.

Exemplo 1.2.3 *:*

São divisíveis por 4:

- ✔ *972, pois 72 é divisível por 4.*
- ✔ *1.708, pois 08 é divisível por 4.*
- ✔ *201.200, pois 00 é divisível por 4.*

Não divisíveis por 4:

- ✗ *437, pois 37 não é divisível por 4.*
- ✗ *2.003, pois 03 não é divisível por 4.*
- ✗ *12.314, pois 14 não é divisível por 4.*

Divisibilidade por 5

Um número natural é divisível por 5 somente quando termina em 0 ou em 5.

Exemplo 1.2.4 *:*

São divisíveis por 5:

- ✔ *970, pois termina em 0.*
- ✔ *2.705, pois termina em 5.*
- ✔ *201.200, pois termina em 0.*

Não divisíveis por 5:

- ✗ *437, pois termina em 7.*
- ✗ *2.003, pois termina em 3.*
- ✗ *12.314, pois termina em 4.*

Divisibilidade por 6

Um número natural é divisível por 6 somente quando é divisível simultaneamente por 2 e por 3.

Exemplo 1.2.5 *:*

São divisíveis por 6:

- ✔ *930, pois é par e* $9 + 3 + 0 = 12$.
- ✔ *2.706, pois é par e* $2 + 7 + 0 + 6 = 15$.
- ✔ *202.200, pois é par e* $2 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 = 6$.

Não divisíveis por 6:

- ✗ *537, pois não é par.*
- ✗ *2.002, pois* $2 + 0 + 0 + 2 = 4$.
- ✗ *12.313, pois não é par e* $1 + 2 + 3 + 1 + 3 = 10$.

Divisibilidade por 7

Um número natural é divisível por 7 quando a subtração entre esse número sem o algarismo das unidades e o dobro do algarismo das unidades, resultar em um número divisível por 7.

Exemplo 1.2.6 *:*

São divisíveis por 7:

✔ *343, pois* $34 - 2 \times 3 = 28$ *que é divisível por 7.*

✔ *126, pois* $12 - 2 \times 6 = 0$ *que é divisível por 7.*

✔ *3.045, pois* $304 - 2 \times 5 = 294$ *e* $29 - 2 \times 4 = 21$ *que é divisível por 7.*

Não divisíveis por 7:

✗ *537, pois* $53 - 2 \times 7 = 39$ *que não é divisível por 7.*

✗ *205, pois* $20 - 2 \times 5 = 10$ *que não é divisível por 7.*

✗ *2.200, pois* $220 - 2 \times 0 = 220$ *e* $22 - 2 \times 0 = 22$ *que não é divisível por 7.*

Divisibilidade por 8

Um número natural é divisível por 8 somente quando o número formado pelos seus três últimos algarismos à direita é divisível por 8.

Exemplo 1.2.7 *:*

São divisíveis por 8:

✔ *4.120, pois 120 é divisível por 8.*

✔ *23.008, pois 008 é divisível por 8.*

✔ *201.000, pois 000 é divisível por 8.*

Não divisíveis por 8:

✗ *3.028, pois 028 não é divisível por 8.*

✗ *12.003, pois 003 não é divisível por 8.*

✗ *324.122, pois 122 não é divisível por 8.*

Divisibilidade por 9

Um número natural é divisível por 9 somente quando a soma dos valores de seus algarismos é um número divisível por 9.

Exemplo 1.2.8 *:*

São divisíveis por 9:

✔ *972, pois* $9 + 7 + 2 = 18$ *que é divisível por 9.*

✔ *1.701, pois* $1 + 7 + 0 + 1 = 9$ *que é divisível por 9.*

✔ *681.273, pois* $6 + 8 + 1 + 2 + 7 + 3 = 27$ *que é divisível por 9.*

São divisíveis por 9:

✗ *437, pois* $4 + 3 + 7 = 14$ *que não é divisível por 9.*

✗ *2.681, pois* $2 + 6 + 8 + 1 = 17$ *que não é divisível por 9.*

✗ *12.319, pois* $1 + 2 + 3 + 1 + 9 = 16$ *que não é divisível por 9.*

Divisibilidade por 10

Um número natural é divisível por 10 somente quando termina em 0.

Exemplo 1.2.9 :

São divisíveis por 10:

- ✔ *970, pois termina em 0.*
- ✔ *1.790, pois termina em 0.*
- ✔ *201.000, pois termina em 0.*

Não divisíveis por 10:

- ✗ *437, pois termina em 7.*
- ✗ *2.019 pois termina em 9.*
- ✗ *11.111 pois termina em 1.*

Divisibilidade por 11

Um número natural é divisível por 11 quando a diferença entre soma dos algarismos de ordem par S_p e a soma dos algarismos de ordem ímpar S_i é um número divisível por 11.

Exemplo 1.2.10 :

São divisíveis por 11:

- ✔ *792, pois* $S_p = 9$ *e* $S_i = 2 + 7 = 9$, *logo* $S_p - S_i = 0$ *que é divisível por 11.*
- ✔ *1.716, pois* $S_p = 1 + 1 = 2$ *e* $S_i = 6 + 7 = 13$, *logo* $S_i - S_p = 11$ *que é divisível por 11.*
- ✔ *611.171, pois* $S_p = 7 + 1 + 6 = 14$ *e* $S_i = 1 + 1 + 1 = 3$, *logo* $S_p - S_i = 11$ *que é divisível por 11.*

São divisíveis por 11:

- ✗ *437, pois* $S_p = 3$ *e* $S_i = 4 + 7 = 11$, *logo* $S_i - S_p = 8$ *que não é divisível por 11.*
- ✗ *2.611, pois* $S_p = 2 + 1 = 3$ *e* $S_i = 1 + 6 = 7$, *logo* $S_i - S_p = 4$ *que não é divisível por 11.*
- ✗ *11.111, pois* $S_p = 1 + 1 = 2$ *e* $S_i = 1 + 1 + 1 = 3$, *logo* $S_i - S_p = 1$ *que não é divisível por 11.*

Divisibilidade por 12

Um número natural é divisível por 12 somente quando é divisível simultaneamente por 3 e por 4.

Exemplo 1.2.11 *:*

São divisíveis por 12:

✔ *720, pois* $7 + 2 + 0 = 9$ *e 20 é divisível por 4.*

✔ *2.736, pois* $2 + 7 + 3 + 6 = 18$ *e 36 é divisível por 4.*

✔ *202.200, pois* $2 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 = 6$ *e 00 é divisível por 4.*

Não divisíveis por 12:

✗ *537, pois 37 não é divisível por 4.*

✗ *2.008, pois* $2 + 0 + 0 + 8 = 10$*.*

✗ *12.313, pois* $1 + 2 + 3 + 1 + 3 = 10$ *e 13 não é divisível por 4.*

Exercício 1.7 *Dentre os números 213, 324, 1.172, 3.612, 4.744, 6.720 e 11.804, identifique quais são divisíveis por:*

(a) 2	*(d) 5*	*(g) 8*	*(j) 11*
(b) 3	*(e) 6*	*(h) 9*	*(k) 12*
(c) 4	*(f) 7*	*(i) 10*	

Exercício 1.8 *Para a festa junina de um colégio foram feitas 10.890 bandeirinhas, que serão usadas para enfeitar as barracas. Elas podem ser distribuídas igualmente se o número de barracas for 11? E se for 12? E se for 15? Justifique suas respostas.*

Exercício 1.9 *Determinar os algarismos x e y para que:*
(a) o número $56x21y$ *seja divisível por 9 e por 10.*
(b) o número $3452xy$ *seja divisível por 2 e por 5, mas não por 3.*

1.3 Números primos e compostos

Os números naturais podem ser primos ou compostos. Um número é dito **composto** se for igual ao produto de dois números naturais menores. Por exemplo, $6 = 2 \times 3$. Caso contrário ele é **primo**, com exceção do 1 que não é primo e nem composto.

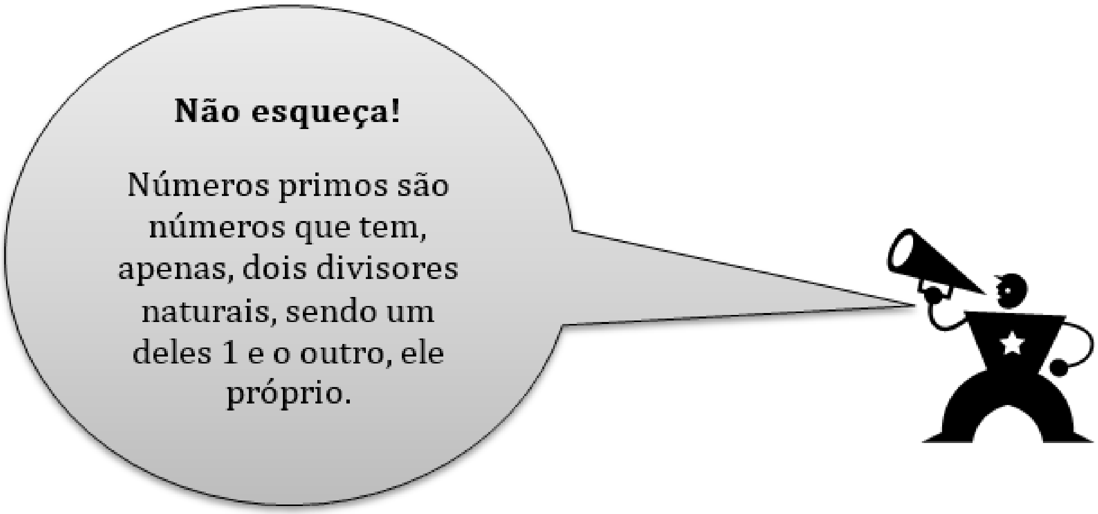
Exercício 1.10 *Classifique os números a seguir em primo ou composto.*

(a) 4	*(c) 14*	*(e) 37*
(b) 13	*(d) 21*	*(f) 297*

Exercício 1.11 *Existe um número que é par e é primo ao mesmo tempo. Que número é esse? Existem outros números nessas condições? Justifique.*

Exercício 1.12 *Determine o menor divisor primo de:*

(a) 64 *(b) 75* *(c) 85* *(d) 49*



Decomposição em fatores primos

Números primos são como os tijolos com os quais podemos construir todos os números naturais, visto que todo número natural composto pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores diferentes de 1. Quando nessa decomposição aparecem apenas números primos, dizemos que esse número está decomposto em fatores primos.

Dessa forma, o produto $2^2 \cdot 3^2$ é a decomposição em fatores primos do número 36. Observe que, independentemente do modo como foi feita, a decomposição em fatores primos sempre é igual, ou seja, única. A decomposição de um número natural em fatores primos pode ser feita da seguinte maneira:

❶ divide-se o número dado pelo seu menor divisor primo;

❷ divide-se o resultado obtido pelo seu menor divisor primo;

❸ repete-se o procedimento anterior até se encontrar o quociente 1.

Vamos ver como decompor o número 120 em fatores primos usando esse procedimento.

$$\begin{array}{r|l}
120 & 2 \\
60 & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

Logo, a decomposição em fatores primos do 120 é $2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Exercício 1.13 *Decomponha os números a seguir em fatores primos.*

(a) 144 *(b) 168* *(c) 540* *(d) 1.470*

Exercício 1.14 *Um número natural decomposto em fatores primos é representado por* $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. *Que número é esse?*

1.4 Máximo Divisor Comum

O maior divisor comum de dois ou mais números, não ambos nulos, é chamado de máximo divisor comum (*mdc*).

Por exemplo, para determinar o *mdc* entre 96 e 60 basta olhar os seus divisores:
$D(96) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96\}$
$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
Logo, o $mdc(96, 60)$ é igual a 12.

1.5 Mínimo Multiplo Comum

O menor múltiplo comum de dois ou mais números, diferentes de zero, é chamado de mínimo múltiplo comum (*mmc*).

Por exemplo, para determinar o *mmc* entre 8 e 12 basta olhar os seus múltiplos:
$M(8) = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, \ldots\}$
$M(12) = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \ldots\}$
Logo, o $mmc(8, 12)$ é igual a 24.

Calcular o *mdc* e o *mmc* pela decomposição em fatores primos

Vimos como calcular o *mdc* e o *mmc* de dois ou mais números naturais conhecendo os divisores e os múltiplos de cada um desses números. Vejamos, agora, outro processo, usando a decomposição em fatores primos.

Por exemplo, vamos calcular o $mdc(24, 30)$ e o $mmc(24, 30)$. Inicialmente, decompomos cada número em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad\qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Em seguida, para o *mdc* é preciso considerar os fatores comuns que apresentam o menor expoente para que eles sejam divisores dos dois números, nesse caso: 2 e 3.

Agora, multiplicando esses fatores, obtemos o mdc dos números, isto é,

$$mdc(24, 30) = 2 \cdot 3 = 6.$$

De maneira semelhante, para o *mmc* é preciso considerar os **fatores comuns e não comuns que apresentam o maior expoente** para que eles sejam múltiplos dos dois números, nesse caso: 2^3, 3 e 5.

Agora, multiplicando esses fatores, obtemos o mmc dos números, isto é,

$$mmc(24, 30) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Exercício 1.15 *Determine o mdc e o mmc dos seguintes números naturais:*

(a) 8 e 10	*(c) 45 e 120*	*(e) 16, 56 e 80*
(b) 40 e 50	*(d) 36 e 48*	*(f) 45, 54 e 75*

Exercício 1.16 *Duas ripas de madeira, uma com 120 centímetros de comprimento e outra com 180 centímetros, devem ser cortadas em pedaços iguais para montar uma pequena estante. Sabendo que os pedaços devem ser do maior tamanho possível, qual será o comprimento de cada pedaço?*

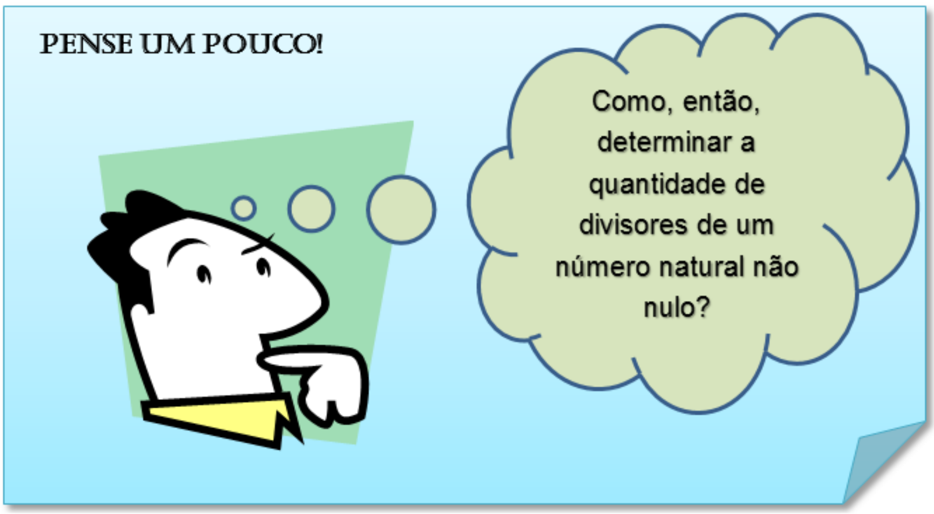
Exercício 1.17 *Em uma classe, há 28 meninos e 21 meninas. A professora quer formar grupos só de meninas ou só de meninos, com a mesma quantidade de alunos e usando a maior quantidade possível.*

(a) Quantos alunos terá cada um desses grupos?
(b) Quantos grupos de meninas podem ser formados?
(c) E quantos grupos de meninos é possível formar?

Exercício 1.18 *De uma rodoviária, parte um ônibus da empresa X a cada 20 minutos e um ônibus da empresa Y a cada 45 minutos. Supondo que esses dois ônibus partam juntos às 8 horas da manhã, depois de quantos minutos os ônibus das duas empresas partirão juntos novamente?*

Exercício 1.19 *Na fila em que fiquei para comprar ingresso para assistir a um filme havia 33 pessoas na minha frente. Notei que a cada 3 pessoas uma usava alguma peça de roupa branca, a cada 5, uma usava óculos, e a cada 4, uma estava com um saquinho de pipoca nas mãos. Determine quantas pessoas dessa fila:*

(a) estavam com uma peça de roupa branca e usavam óculos;
(b) estavam com uma peça de roupa branca e estavam comendo pipoca;
(c) estavam comendo pipoca e usavam óculos;
(d) estavam com uma peça de roupa branca, usavam óculos e estavam comendo pipoca.



Vejamos, então, como determinar a quantidade de divisores de um número natural, para isso precisaremos do **Princípio Fundamental da Contagem**. Determinaremos, por exemplo, a quantidade de divisores de 120.

Inicialmente, fatorando o número 120, encontramos que $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Assim, todos os divisores naturais do 120 serão da forma $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, onde $x = 0, 1, 2$ ou 3, $y = 0$ ou 1 e $z = 0$ ou 1.

Deste modo, há 4 possibilidades para o valor de x, 2 possibilidades para o valor de y e 2 possibilidades para o valor de z. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número total de possibilidades de escolhermos, simultaneamente, um valor para x, um valor para y e um para z será dado pelo produto $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Portanto, número 120 possui 16 divisores naturais.

O raciocínio acima, pode ser genericamente resumido da seguinte forma:

Dado um número natural n, $n > 1$, cuja forma fatorada seja $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \ldots$, com $x, y, z, \ldots$ números naturais, a quantidade de divisores de n será igual a

$$(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1) \ldots$$

Agora, voltaremos ao problema inicial.

Exemplo 1.5.1 *Na sala dos professores do IFRN - Campus Apodi há 60 armários, numerados de 1 a 60, inicialmente todos fechados. Um certo dia, os 60 professores do campus foram numerados de 1 a 60 para realizar a seguinte brincadeira: o professor número 1 passa pelo corredor e abre todos os armários; em seguida, o professor número 2 passa e fecha todos os armários de número par; depois passa o professor de número 3, inverte a posição das portas de todos os armários "múltiplos de 3", isto é, ele os fecha se estiverem abertos e os abre se estiverem fechados; depois, é a vez do professor número 4 que inverte a posição das portas dos armários "múltiplos de 4", e assim sucessivamente. Após a passagem dos 60 professores, quais armários ficarão abertos?*

Para fixar as ideias, vamos observar o armário de número 24. Perceba que apenas os professores com números 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24, que são os divisores de 24, alteram a sua disposição, e o mesmo ficará fechado após a passagens dos professores. Desse modo, note que quando o professor de número k passar pelos armários ele só alterará a disposição dos armários cuja numeração é divisível por k, isto é, altera a disposição apenas dos armários que tem k como divisor. Assim, após todos os professores passarem pelos armários, ficarão abertos apenas os armários cuja numeração possuir uma quantidade ímpar de divisores.

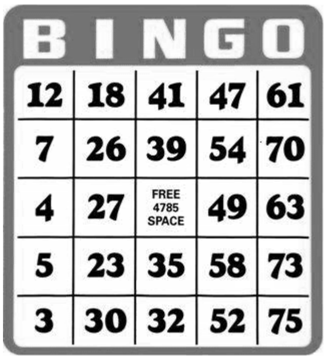
Logo, dado um armário de número n, cuja forma fatorada seja $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \ldots$, a quantidade de divisores de n é igual a $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1) \ldots$, e essa quantidade é ímpar quando $x, y, z, \ldots$ forem todos números naturais pares, ou seja, n é um quadrado perfeito. Portanto, ficarão abertos os armários 1, 4, 9, 16, 25, 36 e 49.

1.6 Exercícios Gerais

1. Marcos chegou na sala e viu na lousa um exercício com um número apagado.

   Ele imediatamente tentou descobrir o número que estava faltando. Qual número ele encontrou?

2. Durante um bingo que sua turma está promovendo, João marcou somente os número multiplos de 3 ou de 5. Quantos números João marcou?



B	I	N	G	O
12	18	41	47	61
7	26	39	54	70
4	27	FREE 4785 SPACE	49	63
5	23	35	58	73
3	30	32	52	75

3. (UFMG) O número de três algarismos divisível ao mesmo tempo por 2, 3, 5, 6, 9, 11 é:

   (a) 330 (b) 66 (c) 676 (d) 990 (e) 996

4. (Unifacs – BA) O número de alunos de uma sala de aula é menor que 50. Formando-se equipes de 7 alunos, sobram 6. Formando-se equipes de 9 alunos, sobram 5. Nessas condições, se forem formadas equipes de 8 alunos, o número de alunos que sobra é:

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

5. (PUC–Campinas – SP) Numa linha de produção, certo tipo de manutenção é feito na máquina A a cada 3 dias, na máquina B, a cada 4 dias, e na máquina C, a cada 6 dias. Se no dia 2 de dezembro foi feita a manutenção das três máquinas, a próxima vez em que a manutenção ocorreu no mesmo dia foi em:

   (a) 5 de dezembro (b) 6 de dezembro (c) 8 de dezembro (d) 14 de dezembro (e) 26 de dezembro

6. (PUC–Campinas – SP) Uma editora tem em seu estoque 750 exemplares de um livro A, 1.200 de um livro B e 2.500 de um livro C. Deseja-se remetê-los a algumas escolas em pacotes, de modo que cada pacote contenha os três tipos de livros em quantidades iguais e com o maior número possível de exemplares de cada tipo. Nessas condições, remetidos todos os pacotes possíveis, o número de exemplares que restarão no estoque é:

   (a) 1.500 (c) 1.750 (e) 2.200
   (b) 1.600 (d) 2.000

7. (UDESC – SC) Maria recebeu alta do hospital, mas deverá continuar o tratamento em casa por mais 30 dias completos. Para isso, ela deverá tomar o remédio A a cada 4 horas, o B a cada 5 horas e o C a cada 6 horas. Em casa, Maria iniciou o tratamento tomando o remédio A, o B e o C no mesmo horário. Supondo que ela atendera rigorosamente às recomendações médicas quanto ao horário da ingestão dos medicamentos, então o número de vezes em que os três remédios foram ingeridos simultaneamente foi:

   (a) 12 vezes (c) 1 vez (e) 7 vezes
   (b) 13 vezes (d) 6 vezes

8. (UNICID – SP) Dois ônibus, A e B, que fazem itinerários diferentes, partem simultaneamente de um mesmo terminal. O ônibus A retorna ao terminal a cada 40 minutos e o ônibus B retorna a cada 1 hora e 10 minutos. Então, o período de tempo com que os dois ônibus se encontrarão nesse terminal é a cada

   (a) 240 minutos. (c) 310 minutos. (e) 400 minutos.
   (b) 280 minutos. (d) 320 minutos.

9. Calcule a diferença $y - x$ de modo que o $2^x \cdot 3^4 \cdot 26^y$ possa ser expresso por uma potência de base 39.

10. (PUC – RJ) Um banco numera as contas-correntes de seus clientes por números de seis dígitos $ABCDEF$, seguidos por um dígito verificador X. X é o resto da divisão de $A + 4B + 2C + 3D + 5E - F$ por 10. A conta-corrente de Miguel é 807.?43 − 5.

    O dígito representado por ? vale:

    (a) 0 (c) 2 (e) 4
    (b) 1 (d) 3

11. (FCChagas – SP) Considere o número de 9 algarismos, dos quais o algarismo das unidades é n e todos os demais são iguais a 2. (Isto é: o número $22222222n$).

    O valor de n a fim de que este número seja divisível por 6 é:

(a) 2 ou 8
(b) 2 ou 7
(c) 0 ou 6
(d) 3 ou 9
(e) 4

DESAFIO

(ITA – SP) O número de divisores de 17 640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:
(a) 24
(b) 36
(c) 48
(d) 54
(e) 72

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Apodi

Curso de Nivelamento

Matemática Subzero

Módulo 2: Frações

Autores
Antonio Edson Pereira da Silva Filho
Francisco Derilson de Melo
José Ueslei Marques Pascoal
Welton Batista dos Santos

Maio/2016

2

Operações com Frações e Números decimais

O Problema da Divisão das Moedas

Pedro e Paulo viajavam e pararam por um momento na estrada para comer. Pedro tinha 5 maçãs e Paulo 4 maçãs. Antes que começassem o lanche, apareceu um outro viajante.

O novo participante da reunião pediu-lhes comida e disse que pagaria por aquilo que tivesse comido. Assim, os três homens dividiram a comida igualmente entre si. Todas as maçãs foram consumidas e quando terminaram – o viajante, satisfeito, deu-lhes 9 moedas de igual valor.

Paulo lembrou Pedro que tinha menos maçãs, deveria receber menos: disse que como só possuia 4 das 9 maçãs, receberia 4/9 das moedas, ou seja, 4 moedas.

Essa conta é justa? Como devem ser divididas as moedas?

2.1 Fração

Fração é uma palavra que vem do latim "fractus"e significa "partido", "quebrado", assim podemos dizer que fração é a representação das partes iguais de um todo.

Representamos uma fração por: $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais com $b \neq 0$.

- O número "de cima"da fração é o **numerador**;
- O número "de baixo"da fração é o **denominador**.

2.1.1 Leitura e Classificações das Frações

Para interpretarmos uma fração, a leitura do numerador é realizada de forma direta, já a leitura do denominador segue as regras descritas abaixo:

Para os denominadores $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9, utilizamos respectivamente os termos meio, terço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo e nono. Para denominadores a partir 10, devemos ler o numerador, o denominador e acrescentar o termo "avos". Os denominadores múltiplos de 10, de 10 a 90, também podem ser lidos segundo a leitura dos números ordinais.

a) $\frac{1}{2}$ um meio;

b) $\frac{1}{3}$ um terço;

c) $\frac{3}{10}$ três décimos;

d) $\frac{5}{11}$ cinco onze avos;

e) $\frac{7}{60}$ sete sexagésimos;

f) $\frac{1}{100}$ um centésimo;

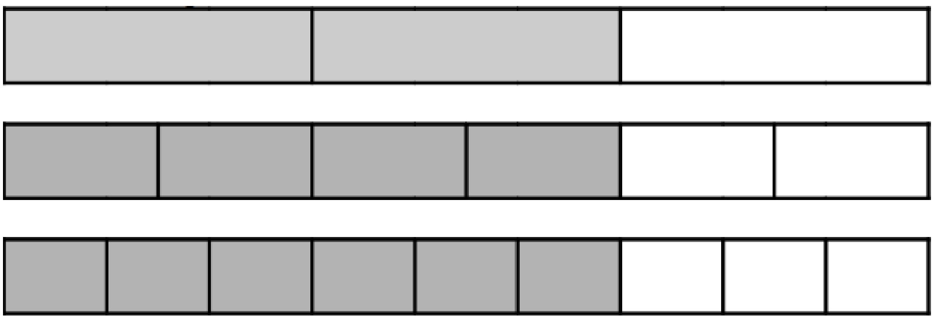
g) $\frac{3}{1000}$ três milésimos;

h) $\frac{11}{10000}$ onze décimos de milésimos.

2.1.2 Frações equivalêntes

São frações que quando simplificadas(reduzidas a fatores primos entre si), apresentam o mesmo numerador e o mesmo denominador.

Observe a figura abaixo:



$\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6}$

$\frac{6}{9}$

As frações, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ são chamadas de frações equivalentes, pois representam a mesma parte do inteiro, pórem os termos são números diferentes. Para obtermos uma fração equivalente a outra, basta multiplicar ou dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número (diferente de zero).

$$\frac{2}{5} \text{ é igual a } \frac{10}{25}, \text{ pois } \frac{2.5}{5.5} = \frac{10}{25}.$$

$$\frac{18}{21} \text{ é igual a } \frac{6}{7}, \text{ pois } \frac{18:3}{21:3} = \frac{6}{7}.$$

2.1.3 Números mistos

Podemos classificar frações em

- ☞ **Própria**⇛ numerador possui menor valor absoluto que o do seu denominador.

$$\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{7}, etc.$$

- ☞ **Imprópria**⇛ numerador com valor absoluto maior que o do seu denominador.

$$\frac{3}{2}, \frac{-22}{3}, \frac{8}{7}, etc.$$

- ☞ **Aparente**⇛ numerador é múltiplo do denominador.

$$\frac{12}{2}, \frac{-27}{3}, \frac{4}{-2}, etc.$$

Frações podem aparecer na forma de **números mistos**, formados por uma parte inteira e uma fração própria.

Números mistos são números como, $1\frac{1}{4}$.

Observe abaixo, uma figura com a representação de $1\frac{1}{4}$:

Veja o mesmo número em formas equivalentes.

$$1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = 1 + 0,25 = 1,25 = \frac{5}{4}$$

O processo pode ser invertido, podemos transformar $\frac{5}{4}$ em um número misto, verificando quantas vezes $\frac{4}{4}$ cabe em $\frac{5}{4}$ procedemos da seguinte maneira:

$$\frac{5}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$$

2.1.4 Simplificação de Frações

Simplificar uma fração significa transformá-la numa fração equivalente com os termos respectivamente menores. Para isso, divide-se o numerador e o denominador por um mesmo número natural **diferente** de 0 e de 1.

É importante simplificar frações para reduzir o numerador e o denominador, tornando as operações mais simples.

Exemplo 2.1.1 *Simplificar* $\frac{8}{16}$.

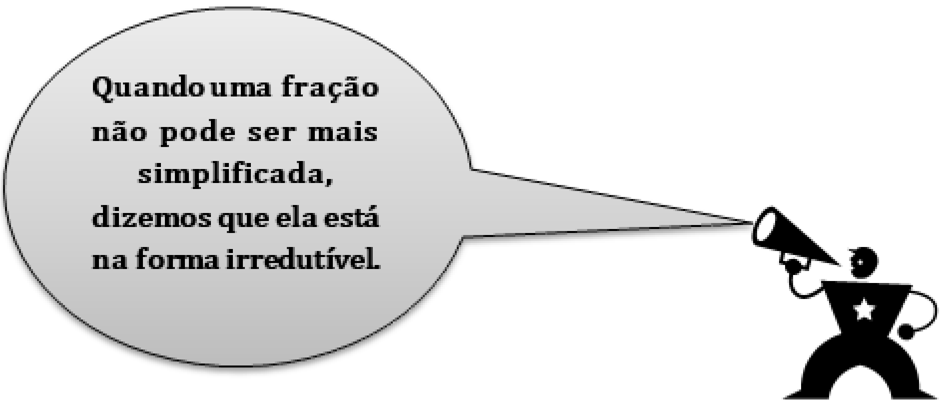
Note que, se dividimos por 2 o numerador e o denominador, obtemos a seguintes expressão:

$$\frac{8:2}{16:2} = \frac{4}{8} = \frac{4:2}{8:2} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}.$$

Obviamente poderiamos dividir diretamente por 8.

$$\frac{8:8}{16:8} = \frac{1}{2}.$$

Como regra geral, podemos obter uma fração irredutível da fração $\frac{a}{b}$, dividindo numerador e denominador pelo $mdc(a, b)$.



2.1.5 Redução de Frações ao mesmo Denominador

Reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador significa obter frações equivalentes às apresentadas e que tenham todas o mesmo número para denominador.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ e } \frac{3}{4} \text{ são equivalente a } \frac{6}{12}, \frac{8}{12} \text{ e } \frac{9}{12} \text{ respectivamente.}$$

Para reduzirmos duas ou mais frações ao mesmo denominador, seguimos os seguintes passos:

❶ Calcula-se o *mmc* dos denominadores das frações que será o menor denominador comum.

❷ Divide-se o *mmc* encontrado pelos denominadores das frações dadas.

❸ Multiplica-se o quociente encontrado em cada divisão pelo numerador da respectiva fração. O produto encontrado é o novo numerador.

Exemplo 2.1.2 *Reduzir ao menor denominador comum as frações:*

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \; e \; \frac{7}{6}$$

Solução:

Seguindo os passos acima,

❶ Obter o mínimo múltiplo comum de (2,4,6).

$$mmc(2,4,6) = 12$$

❷ Dividimos o m.m.c(2,4,6) pelos denominadores.

$$\begin{aligned} 12 : 2 &= 6 \\ 12 : 4 &= 3 \\ 12 : 6 &= 2. \end{aligned}$$

❸ Multiplicamos o resultado obtido pelos numeradores de cada fração.

$$\frac{1 \cdot 6}{12} = \frac{6}{12}, \frac{3 \cdot 3}{12} = \frac{9}{12} \text{ e } \frac{7 \cdot 2}{12} = \frac{14}{12}$$

Portanto:

$$\frac{6}{12}, \frac{9}{12} \text{ e } \frac{14}{12} \text{ é a resposta.}$$

2.2 Operações com frações

No tópico das quatro operações fundamentais com números fracionários, aparecem algumas dificuldades na compreensão e desenvolvimento dessas, por isso, é extremamente importante a compreensão de tudo o que foi exposto acima, pois será bastante usado para somar e subtrair frações.

2.2.1 Adição e Subtração

Adição e subtração de frações podem se feitas de duas maneiras, dependendo dos denominadores:

☞ **Denominadores são iguais**, devemos somar ou subtrair os numeradores diretamente.

☞ **Denominadores diferentes**, para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes, devemos obter frações com os mesmos denominadores, conforme descrito em 2.1.5 e em seguida somar ou subtrair os numeradores diretamente.

Observe os exemplos.

Exemplo 2.2.1 ***Denominadores iguais.***

a) $\frac{1}{7} + \frac{13}{7} = \frac{14}{7} = 2$ *b)* $\frac{4}{13} - \frac{7}{13} = -\frac{1}{13}$ *c)* $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ *d)* $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

Exemplo 2.2.2 ***Denominadores diferentes***

a) $\frac{1}{7} + \frac{7}{5}$

Calculamos $mmc(7,5) = 35$*, logo,* $\frac{1}{7} + \frac{7}{5} = \frac{5+49}{35} = \frac{54}{35}$.

b) $\frac{1}{7} - \frac{7}{5}$.

Calculamos $mmc(7,5) = 35$*, logo,*$\frac{1}{7} - \frac{7}{5} = \frac{5-49}{35} = \frac{-44}{35}$.

Exemplo 2.2.3 *Calcule:*

$$\left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{4}\right) \cdot \left(2 + \frac{5}{2}\right).$$

As frações enter parênteses tem denominadores diferentes, logo, para somar essas frações, devemos torná-los iguais. Isso pode ser feito, extraindo o *mmc* dos denominadores de cada expressão entre parênteses.

Como o $mmc(3,4) = 12$ e $mmc(1,2) = 2$, teremos:

$$\left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{4}\right) \cdot \left(2 + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{-4+15}{12}\right) \cdot \left(\frac{4+5}{2}\right) = \left(\frac{11}{12}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{99}{24} = \frac{33}{8}$$

Exercício 2.1 *Determine o valor de cada expressão.*

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$

b) $\frac{17}{7} + \frac{9}{7}$

c) $\frac{8}{3} - \frac{5}{3}$

d) $\frac{2}{2} - \frac{15}{3} - \frac{2}{6}$

e) $\frac{2}{2} - \frac{5}{3} + \frac{2}{6}$

f) $\frac{2}{3} + \frac{23}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$

g) $\frac{23}{7} - \frac{9}{7} + 2\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{3}\right)$

h) $\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\left(-\frac{2}{4} + \frac{3}{2}\right)$

2.2.2 Multiplicação

Diferentemente da adição e da subtração, a multiplicação não requer que tenhamos um denominador comum. Para realizarmos o produto de frações, basta que multipliquemos os seus numerados entre si, fazendo-se o mesmo em relação aos seus denominadores.

Exemplo 2.2.4 *Exemplos de multiplicação de frações.*

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8}$ *b)* $\frac{7}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{20}$ *c)* $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

2.2.3 Divisão

A divisão de frações resume-se a inversão das frações divisoras, trocando-se o seu numerador pelo seu denominador e realizando-se então a multiplicação das novas frações.

Exemplo 2.2.5 *Exemplos de divisão de frações.*

a) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ *b)* $\frac{-\frac{7}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$

2.3 Números decimais

São numerais que se usa uma vírgula, indicando que o algarismo a seguir pertence à ordem das décimas, ou casas decimais. Todos os números decimais finitos ou infinitos e periódicos podem ser escritos na forma de uma fração.

O francês Viète (1540 – 1603) desenvolveu um método para escrever as frações decimais; no lugar de frações, Viète escreveria números com vírgula. Esse método, modernizado, é utilizado até hoje.

2.3.1 Casas decimais

O número decimal $12,34563$ tem 5 casas decimais. Observe que no exemplo ao lado existem 5 algarismos (3,4,5,6, e 3 novamente) após a vírgula, formando os números: $0,3$; $0,04$; $0,005$; $0,0006$, e o $0,00003$.

Algumas nomenclaturas importantes

Valor	Nome	Casas decimais
10^{-1}	Décimo	1
10^{-2}	Centésimo	2
10^{-3}	Milesimo	3
10^{-4}	Décimo de milésimo	4
10^{-5}	Centésimo de milésimo	5
10^{-6}	Milionésimo	6
10^{-7}	Décimo de milionésimo	7
10^{-8}	Centésimo de milionésimo	8
10^{-9}	Bilionésimo	9
10^{-10}	Décimo de bilionésimo	10

2.3.2 Transformando números decimais em frações

Podemos transformar um número decimal finito ou infinito e periódico, em uma fração.

Um número decimal finito pode ser representado como fração escrevendo-se o numerador(sem vírgula) e usando o denominador de 1 seguida da quantidade de zeros igual ao número de casas decimais.

Exemplo 2.3.1 *Alguns exemplos de transformação de números decimais em fração:*

a) $0,\underbrace{999999}_{6\ casas\ decimais} = \dfrac{999999}{1\underbrace{000000}_{6\ zeros}}$ *b)* $0,\underbrace{0051}_{4} = \dfrac{51}{1\underbrace{0000}_{4\ zeros}}$ *c)* $0,\underbrace{00007}_{5} = \dfrac{7}{1\underbrace{00000}_{5\ zeros}}$

Exercício 2.2 *Transforme os decimais em frações.*

a) $0,5$

b) $0,08$

c) $0,81$

d) $2,41$

e) $1,667$

f) $0,\underbrace{222222\ldots222}_{33\ vezes}$

2.3.3 Operações com números decimais

Adição, Subtração e Divisão

Para adição, subtração ou divisão devemos igualar a quantidade de casas decimais dos números acrescentando zeros à direita de suas parte decimal do número com menor quantidade de casas decimais.

Exemplo 2.3.2 *Efetue as operações.*

a) $2,4 + 1,723 = 2,400 + 1,723$

b) $3,5 + 2,3 = 3,5000 + 2,3000$

c) $2,4 - 1,723 = 2,400 - 1,723$

d) $5,4 - 1,523 = 5,400 - 1,523$

e) $\dfrac{1,69}{0,013} = \dfrac{1,690}{0,013} = \dfrac{1690}{13} = 130$

Multiplicação

Em uma multiplicação com decimal procedemos da mesma forma de uma multiplicação comum, tomando o cuidado de contar o número de casa decimais do números envolvidos no produto, para usar no resultado.

Exemplo 2.3.3 *Efetue as operações.*

a) $2,4 \cdot 1,7 = 4,08$

b) $3,5 \cdot 0,3 = 1,05$

c) $0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

d) $-5,4 \cdot 1,3 = -7,02$

Agora estamos aptos a resolver o problema inicial.

Exemplo 2.3.4 *Pedro e Paulo viajavam e pararam por um momento na estrada para comer. Pedro tinha 5 maçãs e Paulo 4 maçãs. Antes que começassem o lanche, apareceu um outro viajante.*

O novo participante da reunião pediu-lhes comida e disse que pagaria por aquilo que tivesse comido. Assim, os três homens dividiram a comida igualmente entre si. Todas as maçãs foram consumidas e quando terminaram - o viajante, satisfeito, deu-lhes 9 moedas de igual valor.

Paulo lembrou Pedro que tinha menos maçãs, deveria receber menos: disse que como só possuia 4 das 9 maçãs, receberia 4/9 das moedas, ou seja, 4 moedas.

Essa conta é justa? Como devem ser divididas as moedas?

A conta não é justa, pois todos comeram 3 maçãs, então Pedro comeu 3 de suas 5, deixando duas para o viajante e Paulo comeu 3 de suas 4, deixando apenas uma para o viajante. Logo, as frações correspondentes ao que foi cedido por eles são: $\dfrac{2}{3}$ das moedas fica para Pedro e $\dfrac{1}{3}$ delas fica para Paulo. Assim, Pedro ficará com $\dfrac{2}{3} \cdot 9 = 6$ moedas e a Paulo caberá $\dfrac{1}{3} \cdot 9 = 3$ moedas.

2.4 Exercícios Gerais

1. Calcule as expressões abaixo e simplifique o resultado quando possível.

   (a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$

   (b) $\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{4}{5}$

   (c) $2-\frac{2}{3}$

   (d) $\frac{3}{4}+1$

   (e) $\left(-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-2\right)$

   (f) $\frac{3}{4}-2\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{4}\right)$

   (g) $\dfrac{\left(-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{5}\right)}{-\frac{1}{2}}$

   (h) $-\frac{4}{9}\cdot\left(9-\frac{2}{5}\right)$

2. Determine o valor de A em cada situação:

   (a) $A=\dfrac{(x-y)}{xy}$, onde $x=\frac{2}{5}$ e $y=\frac{1}{2}$.

   (b) $A=a-\left(\dfrac{ax-x^2}{x+a}\right)$ para $a=\frac{3}{5}$ e $x=\frac{4}{5}$.

   (c) $A=\dfrac{(a+b)\cdot(a-b)}{(a+b)^2}$ para $a=1$ e $b=\frac{1}{3}$.

   (d) $A=\dfrac{\frac{a-b}{a+b}}{2a}+\dfrac{2b}{\frac{a+b}{a-b}}$ para $a=-1$ e $b=2$.

3. Você fez 3/4 dos exercícios de lista em 42 minutos. Mantendo esse ritmo, quanto tempo gastará para fazer os exercícios que faltam? Ao terminar o trabalho, quanto tempo você terá consumido para fazer toda a lista?

4. Do dinheiro que possuía, João gastou 1/3 com um ingresso de cinema. Do dinheiro que restou, João gastou 1/4 comprando pipoca. Que fração do dinheiro total que João possuía foi gasta com a pipoca? Que fração do dinheiro sobrou depois desses gastos?

5. Marcelo possui $R\$ 77,30$. Seu irmão, Marcos, possui $R\$ 25,50$ a mais que Marcelo e Henrique possui $R\$ 32,30$ a mais que Marcos. Quanto possui os três juntos?

   (a) R$ 102,80

   (b) R$ 135.10

   (c) R$ 218,40

   (d) R$ 315,20

   (e) R$ 413,60

6. Um comerciante comprou de um atacadista 15 quilos de margarina a R$ 1,80 o quilo, 45 quilos de sabão em pó a R$ 1,15 o quilo e 85 caixas de aveia a R$ 0,85 a caixa. Sabendo que o comerciante pagou a compra com duas notas de R$ 100,00. Qual foi o seu troco?

(a) R$ 49,00
(b) R$ 89,00
(c) R$ 78,75
(d) R$ 151,00
(e) R$ 162,00

7. Um terreno de 10 000 metros quadrados foi desapropriado pela prefeitura para nele serem construídas uma praça, uma creche e uma escola. A escola ocupará $\frac{1}{4}$ de terreno, a creche, $\frac{2}{3}$ e a praça o restante do terreno. Nestas condições, qual o espaço ocupado pela praça?

8. Em uma sala de aula tem 35 alunos. Determine o número de meninas, se elas representam 5/7 do total de alunos.

9. Simplifique as frações $\frac{84}{210}$ e $\frac{72}{180}$ e verifique se elas são equivalentes.

10. Abaixo temos uma sequência composta por frações

$$\left(\frac{243}{4}, \frac{81}{8}, \frac{27}{16}, \ldots\right)$$

descubra a lógica de formação e responda.

(a) Quais os oito primeiros termos?
(b) Qual a diferença entre o sexto termo e o segundo termo?
(c) Qual a soma do primeiro termo com o oitavo termo?

DESAFIO

Há uma forma de organizar os algarismos: $1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5$ *e* 7 de modo que eles formem um quociente equivalente a $\frac{1}{11}$.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Apodi

Curso de Nivelamento

Matemática Subzero

Módulo 3:
Produtos Notáveis e Fatoração

Autores
Antonio Edson Pereira da Silva Filho
Francisco Derilson de Melo
José Ueslei Marques Pascoal
Welton Batista dos Santos

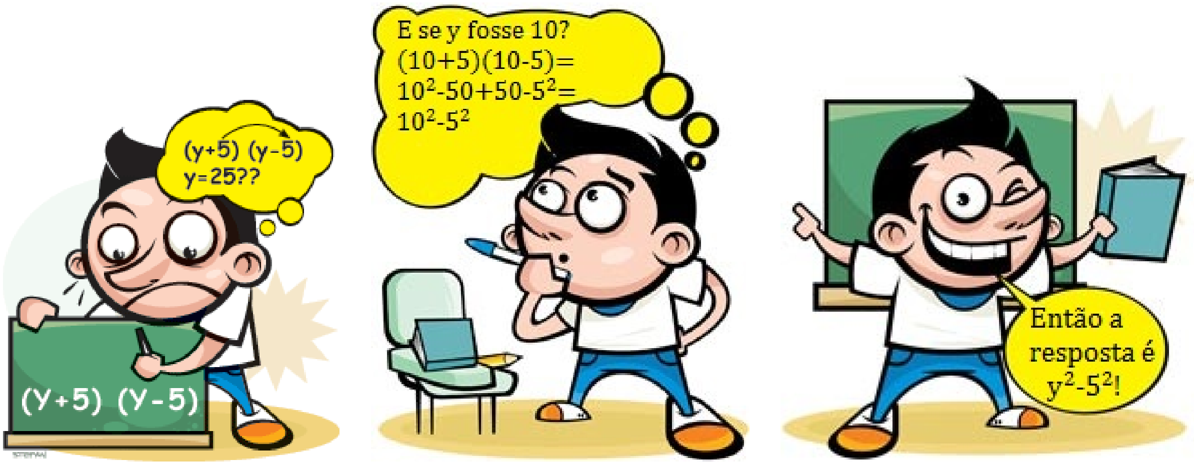
Organizador
Leonardo Dantas dos Santos

Maio/2016

3

Produtos Notáveis e Fatoração

O raciocínio do garoto da tirinha está correto?



Se a resposta for afirmativa, construa uma linha de raciocínio lógico, explicando a resolução do garoto.

3.1 Produtos Notáveis

Algumas expressões algébricas ou polinômios frequentemente surgem em cálculos algébricos. Essas expressões quando reduzidas a fórmulas genéricas recebem o nome de **produtos notáveis**. Os produtos notáveis baseam-se na propriedade distributiva da multiplicação[1].

Agora estudaremos os casos mais frequentes:

[1]A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição diz que a multiplicação de um número por uma soma é igual a soma dos produtos deste número por cada uma das parcelas, isto é,

$$x \cdot (y + z) = xy + xz,$$

com x, y, z números reais.

3.1.1 O quadrado da soma de dois termos

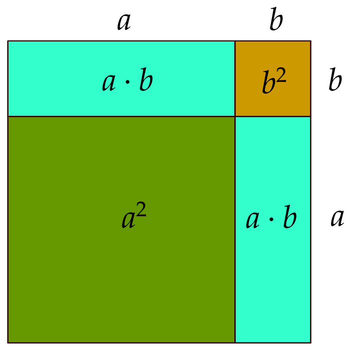
Algebricamente, podemos obter a expressão pela propriedade distributiva da multiplicação:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b + b\cdot b\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Onde concluímos que o quadrado da soma de dois termos é igual ao **quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo com o segundo termo mais o quadrado do segundo termo**.

Agora vejamos a mesma expressão obtida geometricamente:

Considere o quadrado de lado $a + b$ da figura abaixo.



O quadrado da soma de dois termos

A área do quadrado é $(a + b)^2$.

Agora, analisando separadamente as quatro partes nas quais o quadrado está dividido, temos que a soma das áreas das figuras é dada por: $a^2 + 2ab + b^2$

Logo:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Exercício 3.1 *Calcule produtos da soma de dois termos.*

a) $(x + 2y)^2$;

b) $(4z + 2y)^2$;

c) $(\sqrt{3}m + 2y)^2$;

d) $(4m + 2n)^2$.

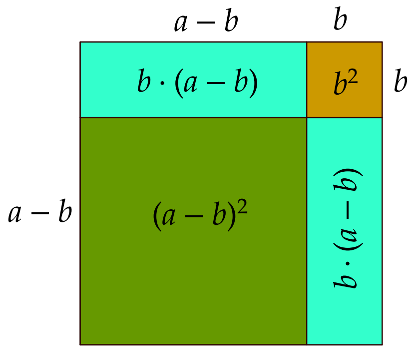
3.1.2 O quadrado da diferença de dois termos

Analogamente, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, podemos obter o quadrado da diferença de dois termos:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a - a\cdot b - a\cdot b + b\cdot b\\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao **quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.**

Agora vejamos a mesma expressão obtida geometricamente:



O quadrado da diferença de dois termos

O lado do quadrado tem medida $l = a - b + b = a$, portanto sua área será a^2. Assim a^2 será igual a soma das áreas dos quadrados da figura.

$$\begin{aligned}a^2 &= (a-b)^2 + 2\cdot b\cdot(a-b) + b^2\\ -(a-b)^2 &= -a^2 + 2\cdot b\cdot a - 2\cdot b^2 + b^2\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2\end{aligned}$$

Logo:

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Exercício 3.2 *Calcule o produto da diferença de dois termos dado.*

a) $(x-3y)^2$;

b) $(4w-3y)^2$;

c) $(\sqrt{4}m-5y)^2$;

d) $\left(2m-\frac{2}{3}n\right)^2$.

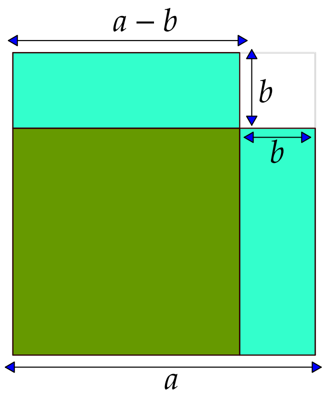
3.1.3 O produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença de dois termos também pode ser obtido pela propriedade distributiva da multiplicação:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= aa - ab + ab - bb\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao **quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo**.

Agora vejamos a mesma expressão obtida geometricamente:



Produto da Soma pela Diferença – 1º área.

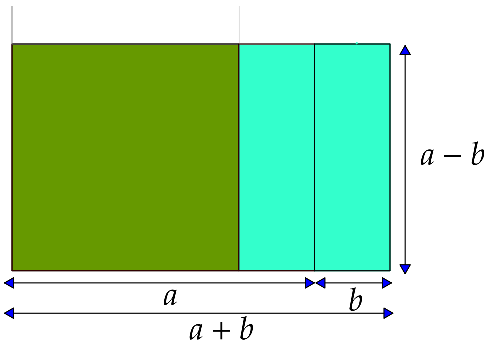
Calculando a área da figura acima de duas maneiras podemos mostrar essa identidade.

A área pintada é

$$a^2 - b^2$$

que seria a área de um quadrado de lado a, subtraido de b^2, que é a área do quadrado menor de lado b.

Podemos calcular a mesma área, dividindo a figura em três partes e sobrepondo-as.



Produto da Soma pela Diferença – 2º área.

A área da "nova" figura será:

$$(a+b)\cdot(a-b)$$

Assim

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)}$$

Exercício 3.3 *Calcule o produto da soma pela diferença de dois termos.*

a) $(x - y)(x + y)$;

b) $(4w - 3y)(4w + 3y)$;

c) $(\sqrt{4}m - 5y)(\sqrt{4}m + 5y)$;

d) $\left(2m + \frac{5}{3}n\right) \cdot \left(2m - \frac{5}{3}n\right)$.

3.1.4 O cubo da soma de dois termos

Analogamente, pela propriedade distributiva da multiplicação, teremos o cubo da soma de dois termos é dado por:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Agora vejamos a interpretação geométrica do cubo da soma de dois termos:

$$(a+b)^3 \quad = \quad a^3 \quad + \quad 3a^2b \quad + \quad 3ab^2 \quad + \quad b^3.$$

Cubo da soma

O cubo da soma de dois termos é igual ao **cubo do primeiro termo, mais três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo termo**.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.}$$

3.1.5 O cubo da diferença de dois termos

Aplicando a propriedade distributiva como nos casos anteriores, teremos que o cubo da diferença é dado por:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)\cdot(a-b)^2 \\ &= (a-b)\cdot(a^2-2ab+b^2) \\ &= a^3-2a^2b+ab^2+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 \\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

O cubo da diferença de dois termos é igual ao **cubo do primeiro termo, menos três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo, menos o cubo do segundo termo**.

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 - b^3.}$$

Exercício 3.4 *Calcule os cubos dados.*

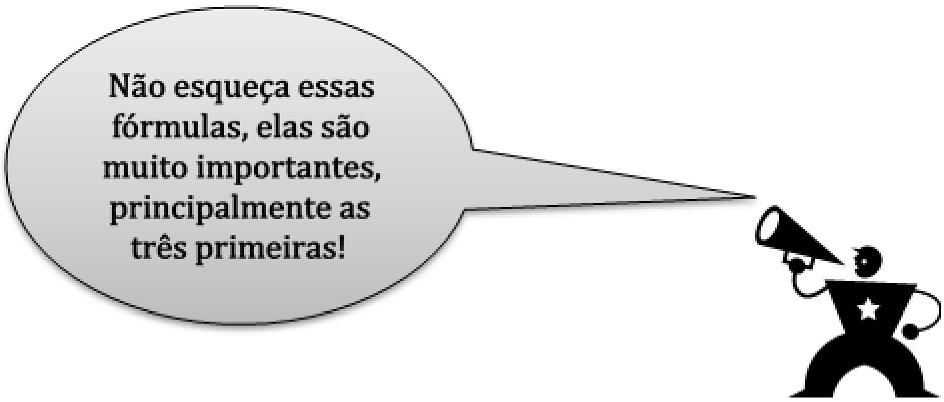
a) $(x-y)^3$;

b) $(4w+y)^3$;

c) $\left(\sqrt[3]{3}m - 5y\right)^3$;

d) $\left(2m + \frac{5}{3}n\right)^3$.

Resumo
$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 - b^3$



3.2 Fatoração

Sabemos que um número natural pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores. Esse procedimento é chamado de **fatoração**. Existem várias maneiras de fatorar um número natural. Assim como é possível fatorar um número natural, alguns polinômios também podem ser fatorados.

Fatorar um polinômio, quando possível, significa escrevê-lo na forma de um produto de polinômios mais simples.

A seguir, veremos alguns processos usados para fatorar um polinômio.

3.2.1 Fator comum em evidência

Inicialmente, vejamos como proceder para fatorar o polinômio $2xy + 8xz - 6x$.

Observe que o termo $2x$ está presente em todos os monômios da expressão $2xy + 8xz - 6x$, isto é,

$$2xy + 8xz - 6x = (2x) \cdot y + (2x) \cdot 4z - (2x) \cdot 3.$$

Logo, podemos escrever

$$2xy + 8xz - 6x = 2x \cdot (y + 4z - 3).$$

Ao fazermos esse processo, dizemos que o polinômio $2xy + 8xz - 6x$ foi **fatorado** colocando em evidência o fator comum $(2x)$.

Vejamos outros exemplos:

Exemplo 3.2.1 *Fatorar o polinômio* $25ab^2 + 15a^3b$.

Observe que:

$$25ab^2 = 5 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b \qquad \text{e} \qquad 15a^3b = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$$

Assim, os fatores comuns são $5ab$.

Portanto,

$$25ab^2 + 15a^3b = 5ab \cdot (5b + 3a^2).$$

Exemplo 3.2.2 *Fatorar o polinômio* $3x + 6x^2 - 9x^3$.

Observe que:

$$3x = 3 \cdot x, \qquad 6x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \qquad \text{e} \qquad 9x^3 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x$$

Assim, os fatores comuns são $3x$.
Portanto,

$$3x + 6x^2 - 9x^3 = 3x \cdot (1 + 2x - 3x^2).$$

Exemplo 3.2.3 *Sendo* $xy = 6$ *e* $3x - y = 3$, *quanto vale* $6x^2y - 2xy^2$?

Inicialmente, vamos fatorar o polinômio: $6x^2y - 2xy^2$. Para tanto, note que o fator comum é $2xy$; assim, teremos que $6x^2y - 2xy^2 = 2 \cdot xy \cdot (3x - y)$.
Agora, substituindo xy por 6 e $(3x - y)$ por 3 na expressão fatorada, obteremos:

$$6x^2y - 2xy^2 = 2 \cdot xy \cdot (3x - y) = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36.$$

Exercício 3.5 *Considere o binômio* $15xy^2 - 10x^2y$.
a) Quais são os fatores comuns a esses dois termos?
b) Qual é a forma fatorada desse binômio?

Exercício 3.6 *Fatore os polinômios colocando os fatores comuns em evidência.*

a) $ab + ac$ *c)* $x^3 - x^2 + x$ *e)* $18x^3y^2 + 27x^2y^2$

b) $y^2 + 4y$ *d)* $6a^2 + 9a + 12$ *f)* $\dfrac{x}{12} - \dfrac{5m^2}{4} + \dfrac{2m^3}{9}$

Exercício 3.7 *Sendo* $ab = 14$ *e* $a - 2b = 3$, *quanto vale* $a^2b - 2ab^2$?

3.2.2 Fatoração por agrupamento

Na fatoração por agrupamento não há fatores comuns a todos os termos do polinômio, assim inicialmente colocamos os fatores comuns em evidência em cada grupo, após isso aparacerá um "novo" fator a ser colocado em evidência, o que torna o polinômio fatorado.

Vejamos como fatorar o polinômio $ax + ay + bx + by$.
De fato,

$$\begin{aligned} ax + ay + bx + by &= (ax + ay) + (bx + by) \rightsquigarrow \text{Agrupamos convenientemente os termos.} \\ &= a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) \rightsquigarrow \text{Separamos o fator comum de cada grupo.} \\ &= (x + y) \cdot (a + b). \rightsquigarrow \text{Colocamos o fator comum } (x + y) \text{ em evidência.} \end{aligned}$$

$$\boxed{ax + ay + bx + by = (x + y) \cdot (a + b)}$$

Observe outros exemplos:

Exemplo 3.2.4 *Fatorar o polinômio $xy + 2x + 4y + 8$.*

$$\begin{aligned} xy + 2x + 4y + 8 &= (xy + 2x) + (4y + 8) \\ &= x \cdot (y + 2) + 4 \cdot (y + 2) \\ &= (y + 2) \cdot (x + 4). \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.5 *Fatorar o polinômio $3a^2 + 3ac - ab - bc$.*

$$\begin{aligned} 3a^2 + 3ac - ab - bc &= (3a^2 + 3ac) - (ab + bc) \\ &= 3a \cdot (a + c) - b \cdot (a + c) \\ &= (a + c) \cdot (3a - b). \end{aligned}$$

Exercício 3.8 *Fatore os polinômios.*

a) $5x - xy + 15 - 3y$
b) $2ax + 3a + 4bx + 6b$
c) $xy - x - y + 1$
d) $a^3 - a^2 + a - 1$

Exercício 3.9 *Calcule o valor da expressão $mx - my + nx - ny$, sendo $m + n = 10$ e $x - y = 2$.*

3.2.3 Diferença de dois quadrados

Como vimos na seção 3.1.3, o produto da soma pela diferença $(x + y) \cdot (x - y)$ resulta na diferença de dois quadrados $x^2 - y^2$. Portanto, reciprocamente, temos que a fatoração de $x^2 - y^2$ é $(x + y) \cdot (x - y)$.

$$\boxed{x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)}$$

Assim, toda diferença de dois quadrados pode ser fatorada como dado acima. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.2.6 *Fatore $x^2 - 25$.*

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5) \cdot (x - 5).$$

Exemplo 3.2.7 *Fatorar $49x^2 - 64y^4$.*

$$49x^2 - 64y^4 = (7x)^2 - (8y^2)^2 = (7x + 8y^2) \cdot (7x - 8y^2).$$

Exemplo 3.2.8 *Fatore a expressão $5a^2 - 20$.*

$$5a^2 - 20 = 5 \cdot (a^2 - 4) = 5 \cdot (a^2 - 2^2) = 5 \cdot (a + 2) \cdot (a - 2).$$

Exercício 3.10 *Fatore as seguintes diferenças de dois quadrados.*

a) $a^2 - 16$

b) $4y^2 - 1$

c) $25x^2 - 81z^2$

d) $36m^2 - \dfrac{n^6}{4}$

Exercício 3.11 *Fatorar completamente a expressão* $3m^4 - 48$.

3.2.4 Trinômio quadrado perfeito

Como vimos nas seções 3.1.1 e 3.1.2, o trinômios quadrados perfeitos $x^2 + 2xy + y^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$ resultam do desenvolvimento dos quadrados $(x + y)^2$ e $(x - y)^2$, respectivamente. Portanto, temos que as seguintes fatorações:

$$\boxed{x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \qquad \text{e} \qquad x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2.}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.2.9 *Fatorar* $x^2 + 12x + 36$.
Neste caso, x^2 *e* 36 *são quadrados de x e* 6 *e, além disso,* $12x = 2 \cdot x \cdot 6$.
Logo, $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

Exemplo 3.2.10 *Fatorar* $x^6 - 2x^3y^2 + y^4$.
Neste caso, $x^6 = (x^3)^2$, $y^4 = (y^2)^2$ *e* $2x^3y^2 = 2 \cdot (x^3) \cdot (y^2)$.
Logo, $x^6 - 2x^3y^2 + y^2 = (x^3 - y^2)^2$.

Exemplo 3.2.11 *Fatorar completamente a expressão* $a^5 + 6a^3b + 9ab^2$.
Inicialmente, colocando a em evidência, temos: $a^5 + 6a^3b + 9ab^2 = a \cdot (a^4 + 6a^2b + 9b^2)$.
Agora, observamos que $a^4 = (a^2)^2$, $9b^2 = (3b)^2$ *e* $6a^2b = 2 \cdot (a^2) \cdot (3b)$. *Assim,* $a^4 + 6a^2b + 9b^2 = (a^2 + 3b)^2$.
Portanto, $a^5 + 6a^3b + 9ab^2 = a \cdot (a^2 + 3b)^2$.

Exercício 3.12 *Quais trinômios são quadrados perfeitos?*

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $a^2 + 5y + 10$

c) $16m^2 + 36mn + 9n^2$

d) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$

e) $a^2 + 6a - 9$

f) $4k^2 - 32k + 64$

Exercício 3.13 *Fatore os seguintes trinômios quadrados perfeitos:*

a) $x^2 + 6x + 9$

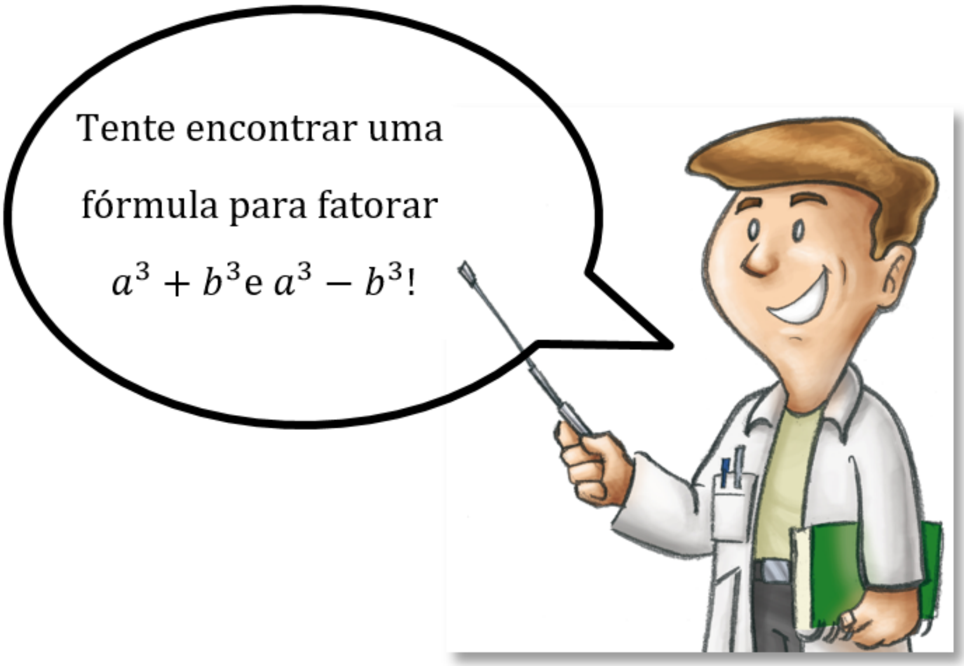
b) $4y^2 + 12xy + 9x^2$

c) $16a^2 - 8a + 1$

d) $x^4 - 4x^2 + 4$

e) $x^2y^2 + 10xy + 25$

f) $a^4 + \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{16}$

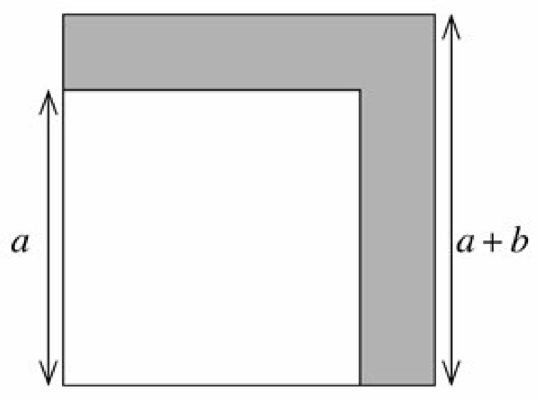


Resumo

Fator comum em evidência	Separar as partes comuns.
Fatoração por agrupamento	Agrupar termos semelhantes.
Diferença de dois quadrados	Usar $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
Trinômio quadrado perfeito	Usar $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$

3.3 Exercícios Gerais

1. **(OBMEP)** Na figura abaixo temos dois quadrados. O maior tem lado $a + b$ e o menor lado a. Qual é a área da região colorida?



a) b^2 b) $a + b$ c) $a^2 + 2ab$ d) $2ab + b^2$

2. Sabendo que $a^2 + b^2 = 234$ e $ab = 45$, calcular o valor de $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$.

3. **(OBM)** Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

a) 64 b) 109 c) 120 d) 124 e) 154

4. Se x é um número real tal que $x + \frac{1}{x} = 7$, calcule o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$ e $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

5. Siga o modelo e fatore as expressões:

$$\boxed{3a + ba = a(3 + b)}$$

a) $5a + ba$; b) $am + an$; c) $xa + xb + xc$; d) $ax + a$; e) $ab + bc + abc$.

6. Simplique as frações fatorando o denominador e o numerador.

a) $\dfrac{3a + 5b}{6a + 10b}$; b) $\dfrac{3x + 3y}{8x + 8y}$; c) $\dfrac{3a^2 + 5a}{6a + 10}$; d) $\dfrac{a(x + y) + b(x + y)}{(a - b)x + (a - b)y}$; e) $\dfrac{x^4 + x^3}{x^2 + x}$.

7. Fatore por agrupamento as seguintes expressões:

a) $a^2 + ab + ac + bc$; b) $ax - bx + ay - by$; c) $2ab + 2a + b + 1$; d) $ax - bx + 2a - 2b$; e) $10ab - 2b + 15a - 3$.

8. Qual o valor da expressão?

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})\cdot(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$$

9. **(OBMEP)** Qual o valor da diferença $5353^2 - 2828^2$?

a) 2525^2
b) 3535^2
c) 4545^2
d) 4565^2
e) 5335^2

10. Determine o quociente da divisão de $x^{16} - 1$ por $(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)$.

11. Fatore a expressão $E = x^3 - 5x^2 - x + 5$.

12. Determine $x + y$, onde x e y são números reais. Sabendo que $x^3 + y^3 = 9$ e $x^2y + xy^2 = 6$.

13. **(OBM)** Se $xy = 2$ e $x^2 + y^2 = 5$, então o valor da expressão $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2$ vale:

a) $\dfrac{5}{2}$
b) $\dfrac{25}{4}$
c) $\dfrac{5}{4}$
d) $\dfrac{1}{2}$
e) 1

14. **(EUA)** Se, $x + \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 20$, determine o valor de $x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}}$.

15. **(OBM)** Sejam a e b números reais distintos tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$.

a) Determine o valor de $a + b$;

b) Determine o valor de ab.

DESAFIO

Mostre que

$$(a^2 + b^2)\cdot(c^2 + d^2) = (a\cdot c - b\cdot d)^2 + (a\cdot d + b\cdot c)^2.$$

Essa identidade é conhecida como **Identidade de Fibonacci**.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Apodi

Curso de Nivelamento

Matemática Subzero

Módulo 4:
Equação do 1° Grau

Autores
Antonio Edson Pereira da Silva Filho
Francisco Derilson de Melo
José Ueslei Marques Pascoal
Welton Batista dos Santos

Organizador
Leonardo Dantas dos Santos

Junho/2016

4

Equação do 1° Grau

Diofanto foi um importante matemático da antiguidade, sabe-se pouco a seu respeito, um pouco do que sabemos sobre ele encontra-se na dedicatória de seu túmulo, que diz o seguinte:

> DIOFANTO DE ALEXANDRIA (~200 – ~?)
>
> CAMINHANTE! AQUI ESTÃO SEPULTADOS OS RESTOS DE DIOFANTO. E OS NÚMEROS PODEM MOSTRAR (MILAGRE!) QUÃO LONGA FOI A SUA VIDA, CUJA SEXTA PARTE FOI A SUA BELA INFÂNCIA. TINHA DECORRIDO MAIS UMA DUODÉCIMA PARTE DE SUA VIDA, QUANDO SEU ROSTO SE COBRIU DE PELOS. E A SÉTIMA PARTE DE SUA EXISTÊNCIA DECORREU COM UM CASAMENTO ESTÉRIL. PASSOU MAIS UM QUINQUÊNIO E FICOU FELIZ COM O NASCIMENTO DE SEU QUERIDO PRIMOGÊNITO, CUJA BELA EXISTÊNCIA DUROU APENAS METADE DA DE SEU PAI, QUE COM MUITA PENA DE TODOS DESCEU À SEPULTURA QUATRO ANOS DEPOIS DO ENTERRO DE SEU FILHO.
>
> DIGA QUANTOS ANOS TINHA DIOFANTO QUANDO MORREU?

Usando equação do 1º grau poderemos resolver problemas como esse.

4.1 Introdução

Equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. A palavra **"equação"** vem do latim *equatione*, *equacionar*, que significa igualar. Costumeiramente tomamos letras para representar esses valores desconhecidos e a letra mais usada é o **"x"**, isso originou uma expressão muito conhecida: "o x da questão".

Evidentemente qualquer outra letra pode ser usada para representar o valor desconhecido. Essas letras são conhecidas como **incógnitas**, originada do latim *incognitu*, que significa "coisa desconhecida".

Transformar problemas para a forma de equação é um passo importante para a simplificação da situação, antes de fazê-lo vamos primeiro definir equação do 1° grau.

4.2 Definição de equação do 1° grau

É uma expressão do tipo

$$\boxed{ax + b = 0}$$

com $a \neq 0$, onde a e b são números reais chamados de coeficientes da equação e x é a incógnita, ou seja, é uma sentença matemática de grau um que contém uma relação de igualdade.

São equações do 1° grau:

✔ $2x + 1 = 0$, onde 2 e 1 são coeficientes e x a incógnita;

✔ $4y + 16 = 0$, onde 4 e 16 são coeficientes e y a incógnita.

✔ $2a - \frac{1}{2} = 0$, onde 2 e $-\frac{1}{2}$ são coeficientes e a a incógnita.

Não são equações do 1° grau.

✗ $4 + 8 = 7 + 5$ (Não tem incógnita).

✗ $x - 5 < 3$ (Não é igualdade).

✗ $5 \neq -2$ (Não tem incógnita e não é igualdade).

Exemplo 4.2.1 *Marques quais das equações abaixo são do 1° grau?*

( ) $5t + \frac{3}{2} = -4$	( ) $\frac{5}{x} + 2 = -x$
( ) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 - 6$	( ) $x + y = 7$
( ) $2^x = 7 + x$	( ) $2x + 4 = 2x - 8$
( ) $\frac{x-1}{3} = \frac{1-2x}{5}$	( ) $850 - 2j = 4\left(\frac{3+j}{3}\right)$

4.2.1 Partes de uma equação

Em uma equação matemática a expressão situada à esquerda da igualdade é chamada de **1° membro**, já a expressão situada à direita da igualdade, de **2° membro** da equação.

Cada uma das parcelas que compõem um membro de uma equação é chamamos de **termo**.

Por exemplo, na equação $9x - 3 = 5x - 6$:

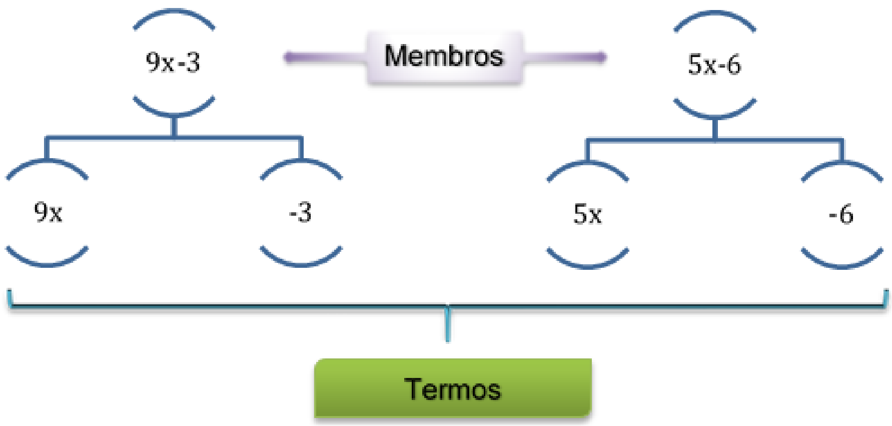


Figura 4.1: Parte de uma equação do 1°

Agora veremos como obter a solução de uma equação do 1° grau.

4.2.2 Solução de uma equação do 1° grau

A solução de uma equação é chamada **raiz**, quando existe, são os **valores que satisfazem a igualdade**, ou seja, são números que quando colocados no lugar da incógnita transformam a equação em uma sentença verdadeira.

Exemplo 4.2.2 *No conjunto $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ tem alguma raiz da equação $x - 6 + 2(x + 3) = x + 4$?*

Tabela 4.1: Substituindo x.

x	$x - 6 + 2(x + 3) = x + 4$	Sim ou não
$x = -1$	$-1 - 6 + 2(-1 + 3) = -1 + 4 \Rightarrow -3 = 3$	Não
$x = 0$	$0 - 6 + 2(0 + 3) = 0 + 4 \Rightarrow 0 = 4$	Não
$x = 1$	$1 - 6 + 2(1 + 3) = 1 + 4 \Rightarrow 3 = 5$	Não
x=2	$2 - 6 + 2(2 + 3) = 2 + 4 \Rightarrow 6 = 6$	Sim

Para a resolvermos uma equação do 1° grau é necessário separarmos os termos com a incógnita dos termos sem incógnita, colocando-os em membros diferentes da equação. Utilizaremos algumas propriedades matemática para transformarmos uma equação em outra equivalente e mais simples, a saber:

☞ $a = b \Rightarrow a \pm c = b \pm c$

Podemos adicionar ou subtrair um mesmo número em ambos os membros;

☞ $a = b \Rightarrow ac = bc$ ou $a = b \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Podemos dividir ou multiplicar ambos os membros de uma equação por um mesmo número não-nulo ($c \neq 0$) .

Nesses casos a **igualdade se mantém e temos uma equação equivalente com a mesma raiz da anterior**, podemos repetir os mesmos passos quantas vezes for necessário.

Seguindo esse processo encontramos a solução geral de uma equação do 1° grau.

Dada a equação:

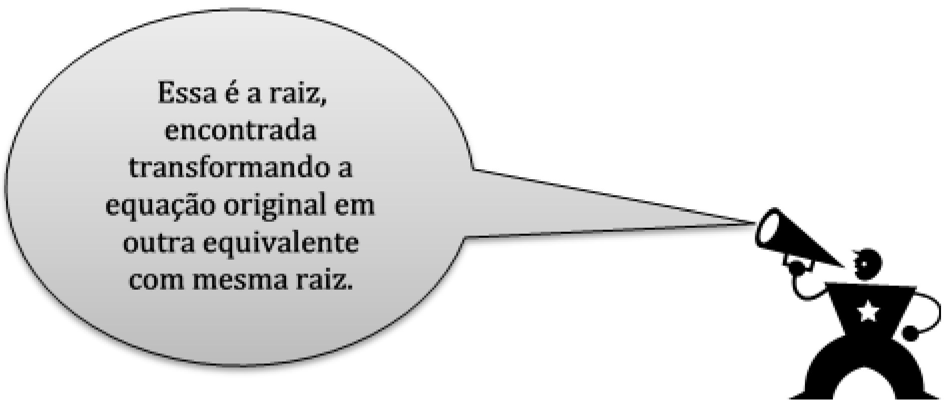
$$\boxed{ax + b = 0}$$

Podemos subtraír b de cada membro da equação.

$$ax + b - b = 0 - b \Rightarrow ax = -b$$

Dividimos cada membro por a, lembre que $a \neq 0$.

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \Rightarrow x = \frac{-b}{a}.$$



Os passos acima são importantes, devemos entender como se faz e por que se faz. É mais prático usar algumas regras para tornar o processo mais rápido, mas alguém que não entendeu os processos lógicos de resolução de uma equação do 1° grau pode confundir-se facilmente com expressões como "está somando de um lado, passa dividindo para o outro" ou "se está multiplicando de um lado, passa dividindo para o outro".

Antes de aplicar regras o aluno deve entender plenamente todos os passos usados para transformar uma equação em outra equivalente, chamaremos esse processo de balanceamento.

Exemplo 4.2.3 *Qual o número inteiro que é solução da equação* $3x + 2 = 6 + x$*?*

Para ficarmos somente com a incógnita no primeiro membro devemos subtrair 2 e x em ambos nos membros da equação, obtendo

$$3x + 2 - 2 - x = 6 + x - 2 - x \Leftrightarrow 2x = 4.$$

Agora dividimos os membros da equação equivalente por 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 2.$$

Portanto, $x = 2$ é a raiz da equação inicial.

Exemplo 4.2.4 *Qual a solução da equação* $1 + \frac{x}{2} + 2x = \frac{x}{4} - 2$*?*

Observe que o como $mmc(2, 4) = 4$, podemos multiplicar a equação por 4 para "eliminar os denominadores".

$$1 \cdot 4 + \frac{x}{2} \cdot 4 + 2x \cdot 4 = \frac{x}{4} \cdot 4 - 2 \cdot 4$$

Agora, isolamos a incógnita subtraindo x e 4 dos membros da equação.

$$4 - 10x - x - 4 = x - 8 - x - 4 \Leftrightarrow -11x = -12.$$

Para terminar, dividimos por -11, teremos:

$$\frac{-11x}{-11} = \frac{-12}{-11} \Leftrightarrow x = \frac{12}{11}.$$

Portanto, $x = \frac{12}{11}$ é a raiz da equação dada.

A seguir resolveremos uma equação usando o método direto. Sugerimos que somente após entender todo o processo de balanceamento de uma equação do 1° grau, se preferir, utilize o esse método de resolução.

Exemplo 4.2.5 *Resolva a equação* $5 \cdot (x + 3) - 3x = 2 + x$*.*

Nesse tipo de equação, devemos eliminar os parênteses, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.

$$5x + 15 - 3x = 2 + x \Leftrightarrow 2x + 15 = 2 + x$$

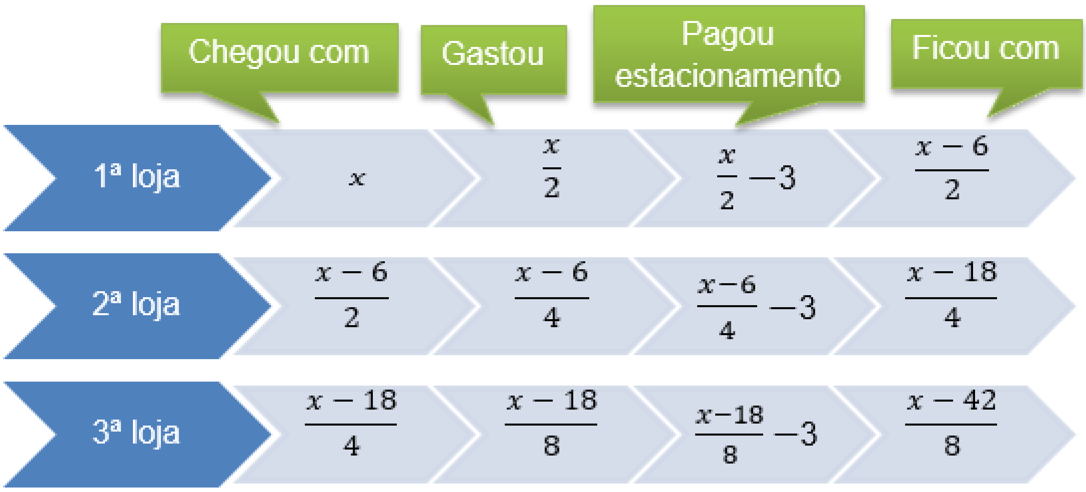
Agora devemos resolver a equação separando a incógnita dos números, colocando-a no 1° membro.

$$2x - x = 2 - 15 \Leftrightarrow x = -13.$$

Logo, $x = -13$ é a solução da equação $5 \cdot (x + 3) - 3x = 2 + x$.

Exemplo 4.2.6 *Maria sai de casa e faz compras em 3 lojas. Em cada loja gasta metade do que possui e, após cada compra, paga R\$ 3,00 de estacionamento. Chegou em casa com R\$ 11,00. Quanto tinha ao sair de casa?*

Podemos organizar a situação usando um diagrama.



Após todo o seu processo de compras Maria ficou com $\frac{x-42}{8}$, mas isso é igual a $R\$ \, 11,00$, logo

$$\frac{x-42}{8} = 11 \Leftrightarrow x - 42 = 88 \Leftrightarrow x = 130$$

Portanto, Maria tinha $R\$ \, 130,00$.

Agora retornaremos ao problema da idade de Diofanto.

Exemplo 4.2.7 *Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte foi a sua bela infância. Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos. E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril. Passou mais um quinquénio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogénito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho. Diga quantos anos tinha Diofanto quando morreu?*

No diagrama a seguir podemos observar a transformação dos dados para a linguagem algébrica. Considerando que Diofanto viveu x anos, teremos

Logo, sua idade (x) será dada por:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \Rightarrow x - \frac{x}{6} - \frac{x}{12} - \frac{x}{7} - \frac{x}{2} = 9$$

Usando o $mmc(2, 6, 7, 12) = 84$, obtemos:

$$\frac{84x - 14x - 7x - 12x - 42x}{84} = 9 \Leftrightarrow \frac{9x}{84} = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9.84}{9} \Leftrightarrow x = 84.$$

Portanto, Diofanto morreu com 84 anos.

4.3 Exercícios Gerais

1. Na coluna da direita explique o que foi feito na coluna da esquerda para transformar a equação em outra equivalente.

$-2 \cdot (-x+4) + 3 = -3x + 1$	Passos para a solução
$2x - 8 + 3 = -3x + 1$	
$2x - 5 + 3x + 5 = -3x + 1 + 3x + 5$	
$5x = 6$	
$\frac{5x}{5} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$	

2. Resolva as equações a seguir, explicitando todos os passos da solução?

   (a) $3x - 6 = -x + 4$

   (b) $\frac{2-x}{3} + \frac{3x+1}{2} = -1$

   (c) $-5 \cdot (a+2) - a = 3a - (4-a)$

   (d) $3 \cdot (-1-x) = 2 + 5x - (x-6)$

   (e) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

   (f) $\underbrace{x + x + x + \ldots + x}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ vezes}} + \underbrace{2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{n \text{ vezes}}$

   (g) $5y - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4} + y$

   (h) $y + \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{2y}{5} + 1$

   (i) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x}{2} = 1$

3. Determine quatro números consecutivos cuja a soma seja 123.

4. Determine um número real ″x″ para que as expressões $\frac{3x+6}{8}$ e $\frac{2x-3}{3}$ sejam iguais.

5. João tem 1200 m de arame para cercar um terreno retangular com 4 voltas de arame. Ele quer que a base tenha o dobro da altura. Quais devem ser as dimensões do terreno?

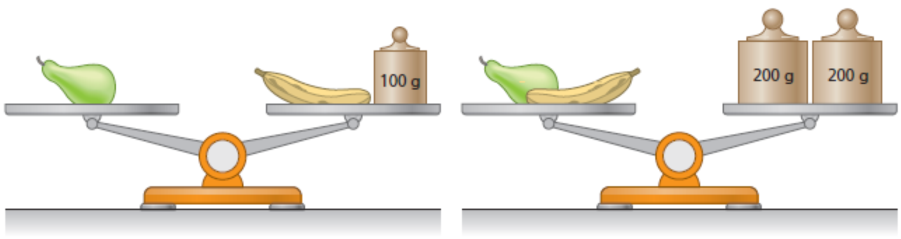
6. Roberto disse a Valéria: "Pense em um número, dobre esse número, some 12 ao resultado, divida o novo resultado por 2. Quanto deu?" Valéria disse "15" Roberto imediatamente revelou o número pensado por Valéria. Qual foi o número?

7. **(Tec. Integrado/IFRN)** Em um mês, com estética corporal e facial, Deusa Maria gastou x, sendo $R\$\ 210,00$ com escova, $1/3$ do total com massagens redutoras corporais e $2/5$ do total com hidratação nos cabelos. Podemos afirmar que, nesse período, o total de gastos de Deusa Maria com estética foi de

   (a) $R\$\ 625,50$. (b) $R\$\ 787,50$. (c) $R\$\ 877,50$. (d) $R\$\ 925,50$.

8. Ricardo e Julinho subiram juntos em uma balança e o ponteiro marcou 80 kg. Ricardo desceu e Julinho pôde, então, verificar que ele tinha 6 kg a mais que Ricardo. Quantos quilogramas tem Julinho?

9. Observe as balanças abaixo.



   De acordo com o que as balanças indicam, quantos gramas tem uma pêra?

10. Estuda-se a implantação da chamada "formula 95". Por essa fórmula os trabalhadores teriam direito à aposentadoria quando a soma da idade com o número de anos de serviço atingisse 95. Adotada essa fórmula, quem começasse a trabalhar com 25 anos, com que idade se aposentaria?

11. **(VUNESP)** A Prefeitura Municipal fez um levantamento do número de estátuas que sofrem vandalismo por ano, na cidade. Dividindo a cidade em três regiões, A, B, C, constatou-se que a região A é responsável pelo vandalismo do quádruplo de estátuas agredidas na região B. O total de estátuas que foram atacadas é 128, sendo que 48 estavam na região C. Quantas estátuas sofreram vandalismo na região A?

   (a) 64
   (b) 52
   (c) 40
   (d) 32
   (e) 16

12. **(CESGRANRIO/FGV)** Um orfanato recebeu certa quantidade x de brinquedos para serem distribuída entre as crianças. Se cada criança receber: 3 brinquedos, sobrarão 70 brinquedos para serem distribuídos. Entretanto, para que cada criança possa receber 5 brinquedos, serão necessários mais 40 brinquedos. O número de crianças do orfanato e a quantidade x de brinquedos que o orfanato recebeu, são respectivamente:

   (a) 50 e 290
   (b) 55 e 235
   (c) 55 e 290
   (d) 60 e 250
   (e) 65 e 235

DESAFIO

(ITA – SP) Há muito tempo, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a idéia, na madrugada, de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a no mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde, o segundo marinheiro teve a mesma idéia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois grupos iguais e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã, os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas do baú em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada um dos marinheiros a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como pagamento pelos seus cálculos. Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro marinheiro e pelo segundo marinheiro foi de $\frac{29}{17}$, então o número de moedas que havia originalmente no baú era:

a) 99 c) 135 e) 78
b) 95 d) 87

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Apodi

Curso de Nivelamento

Matemática Subzero

Módulo 5: Equação do 2° Grau

Autores
Antonio Edson Pereira da Silva Filho
Francisco Derilson de Melo
José Ueslei Marques Pascoal
Welton Batista dos Santos

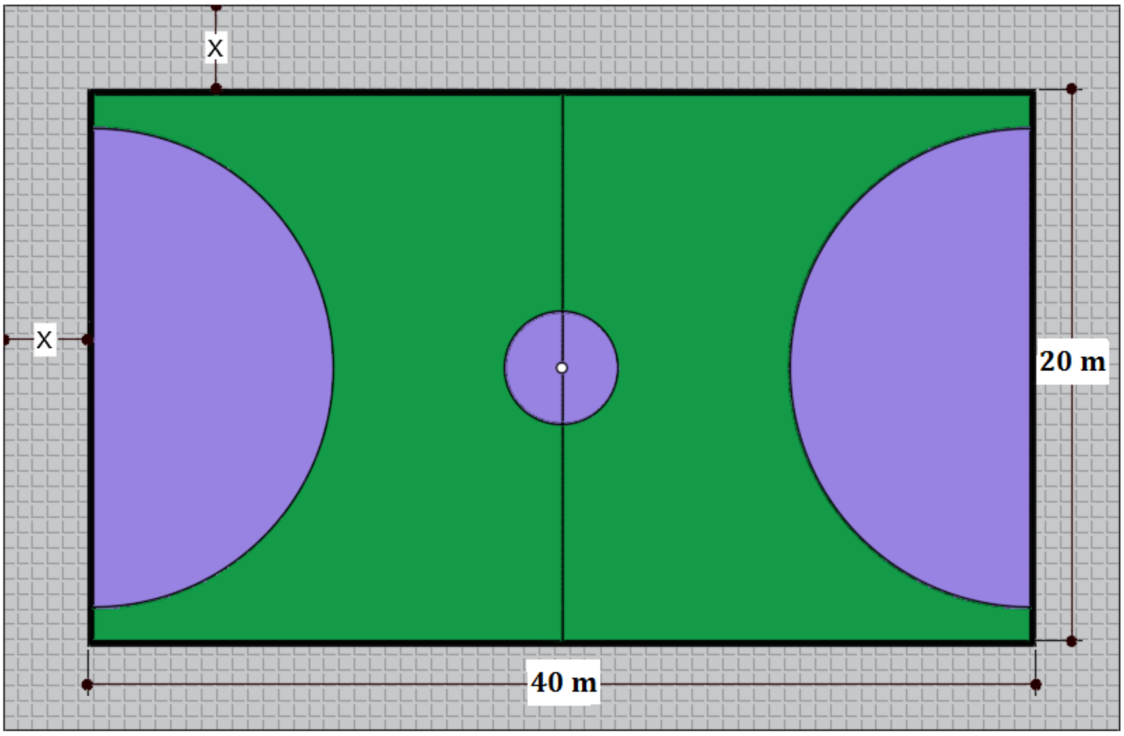
Organizador
Leonardo Dantas dos Santos

Junho/2016

5
Equação do 2° Grau

À beira da quadra

O *campus* Apodi deseja construir uma quadra de futsal, de medidas, comprimento 40 m e largura 20 m. Para segurança dos atletas, deseja-se deixar, ao redor da quadra, uma faixa de largura constante, como mostrado na figura abaixo.



Quadra de futsal

A área disponivel para a construção da quadra, com a faixa, deve ser de 1056 m^2. Qual deve ser a largura da faixa?

Problemas que recaem em equações do 2° grau, como o exposto acima, estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos povos das civilizações da antiguidade – *babilônios* e *egípcios* – há quase quatro mil anos, encontramos registros de resoluções de problemas envolvendo essas equações, como, por exemplo, a questão de achar dois números, conhecidos a sua soma e seu produto.

No entanto, até no final do século XVI, não se usava uma fórmula para os valores das raízes das equações do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isto começou a ser feito a partir de *François Viète*, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Antes disso, o que se tinha era uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos.

Neste capítulo estudaremos **equações do 2° grau**, bem como aplicá-la em situações-problema.

5.1 Equação do 2° Grau

Dados a, b, c números reais e $a \neq 0$, chamaremos de equação do 2° grau na incógnita x a expressão da forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

onde:

☞ a, b são **coeficientes** respectivamente de x^2 e x;

☞ c é o **termo independente**.

Exemplo 5.1.1 *Observe que:*

(a) $2x^2 + 23x - 39 = 0$ *é uma equação do 2° grau, com coeficientes* $a = 2$, $b = 23$ *e* $c = -39$.

(b) $3x^2 - 48 = 0$ *é uma equação do 2° grau, com coeficientes* $a = 3$, $b = 0$ *e* $c = -48$.

(c) $-5x^2 + 20x = 0$ *é uma equação do 2° grau, com coeficientes* $a = -5$, $b = 20$ *e* $c = 0$.

(d) $x^2 = 0$ *é uma equação do 2° grau, com coeficientes* $a = 1$, $b = 0$ *e* $c = 0$.

Uma equação do 2° grau é chamada de **completa** quando os coeficientes b e c são diferentes de zero e é chamada de **incompleta** quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou, ainda, $b = c = 0$.

No exemplo acima, o primeiro item é uma equação completa, e os itens restantes são equações incompletas.

Exercício 5.1 *Verifique quais das equações seguintes são do 2° grau.*

(a) $7x^2 - 3x + 5 = 0$	*(c)* $x^2 - 2x = 0$	*(e)* $y^2 - 4y = 6$
(b) $5y - 3 = 0$	*(d)* $0m^2 + 2m - 1 = 0$	*(f)* $8 - z^2 = 0$

Exercício 5.2 *Escreva na forma $ax^2 + bx + c = 0$ as equações do 2° grau a seguir, identifique os coeficientes a, b e c e classifique-as em completas ou incompletas.*

(a) $2x^2 - 3x = 17$ *(c)* $x^2 = 12x$ *(e)* $x \cdot (x+6) = 2x+3$
(b) $5 = 2 - x^2$ *(d)* $-5x^2 = x \cdot (x-1)$ *(f)* $(x-4)\cdot(x+3) = 3x-5$

Exercício 5.3 *Represente o número desconhecido por x e escreva a equação do 2° grau na forma reduzida que traduz as seguintes sentenças.*
(a) O quadrado de um número somado com o triplo desse número é igual a 28.
(b) O dobro do quadrado de um número menos o próprio número é igual a 30.
(c) Um número é igual ao quadrado desse próprio número menos 22.
(d) Três quintos do quadrado de um número é igual a esse número menos 20.

5.2 Resolução de uma equação do 2° grau

Resolver uma equação do 2° grau consiste em encontrar dois números, quando existem, que tornam a igualdade verdadeira, os quais chamaremos de **raízes** da equação.

Exemplo 5.2.1 *Verifique que -3 e 2 são raízes da equação do 2° grau $x^2 + x - 6 = 0$.*

☞ *Para $x = -3$, temos:*

$$\begin{aligned} (-3)^2 + (-3) - 6 &= 0 \\ 9 - 3 - 6 &= 0 \\ 9 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

☞ *Para $x = 2$, temos:*

$$\begin{aligned} 2^2 + 2 - 6 &= 0 \\ 4 + 2 - 6 &= 0 \\ 6 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, -3 e 2 são raízes da equação dada.

Exercício 5.4 *Verifique, entre os números -3, 2, -5, 9 e 10, quais são raízes da equação $y^2 - 11y + 18 = 0$.*

Inicialmente, trataremos da resolução das equações do 2° incompletas, por requerer apenas propriedades básicas dos números reais para solucioná-las.

5.2.1 Resolvendo equações do 2° grau do tipo $ax^2 + bx = 0$

A técnica para resolver esse tipo consiste em fatorar a equação.

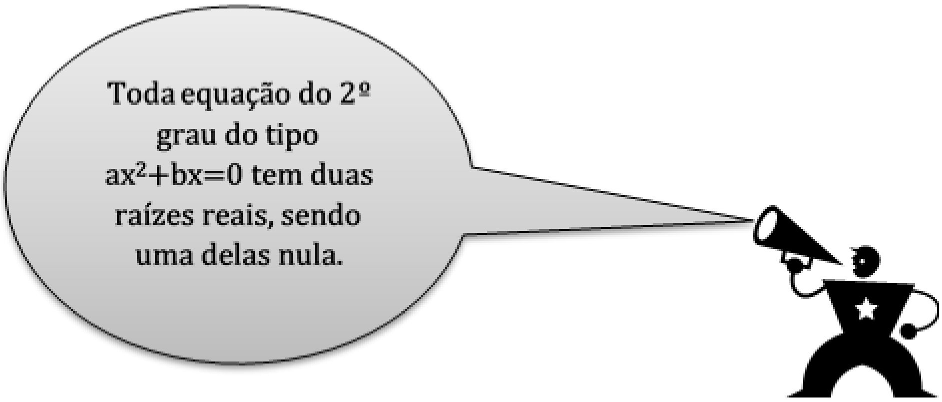
Considere a equação $3x^2 - 48x = 0$. Observe que, colocando o $3x$ em evidência no primeiro membro, temos:

$$3x \cdot (x - 16) = 0.$$

Agora, lembrando que **se o produto de dois números reais é igual a zero, então pelo menos um desses fatores é igual a zero**, obtemos que $x = 0$ ou $x - 16 = 0$. Resolvendo a equação $x - 16 = 0$, encontramos $x = 16$.

Portanto, $x_1 = 0$ e $x_2 = 16$ são as duas raízes da equação $3x^2 - 48 = 0$.

De modo geral, as equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ possuem como raízes $x_1 = 0$ e $x_2 = -\dfrac{b}{a}$, pois $ax^2 + bx = x \cdot (ax + b) = 0$ e, daí, temos $x_1 = 0$ e $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.



Exercício 5.5 *Resolva, em* $\mathbb{R}$*, cada uma das equações seguintes:*

(a) $x^2 - 3x = 0$ *(c)* $3x^2 = 2$ *(e)* $x \cdot (x - 1) = 2x$

(b) $12y - 4y^2 = 0$ *(d)* $m^2 - \dfrac{m}{3} = 0$ *(f)* $(y - 2) \cdot (y - 3) = 6$

5.2.2 Resolvendo equações do 2° grau do tipo $ax^2 + c = 0$

Iniciaremos com exemplo como proceder na resolução desse tipo de equação.

Consideremos a equação $5x^2 - 20 = 0$. Observe que, somando 20 em ambos os membros da equação, temos $5x^2 = 20$. Agora, dividindo ambos os membros por 5, chegaremos a equação $x^2 = 4$, daí extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, encontramos que $x_1 = -2$ ou $x_2 = 2$. Portanto, -2 e 2 são as raízes da equação $5x^2 - 20 = 0$.

No entanto, vejamos agora um outro exemplo:

Dada a equação $2x^2 + 18 = 0$. Observe que, somando -18 em ambos os membros da equação, temos $2x^2 = -18$. Assim, dividindo ambos os membros por 2, teremos a equação $x^2 = -9$, que admite solução real, uma vez que dado $x \in \mathbb{R}$, necessariamente, $x^2 \geq 0$. Portanto, a equação inicial não possui raiz no conjunto dos números reais.

Em resumo, nesse tipo de equação, inicialmente devemos proceder de forma análoga a resolução de uma equação do 1° grau, a fim de obter uma equação equivalente a inicial, escrita como $x^2 = k$. Por fim, teremos dois casos a considerar:

- ☞ Se $k \geq 0$ extrairmos a raiz quadrada em ambos os membros, encontrando as duas raízes;
- ☞ Se $k < 0$ a equação não admite raízes reais.

Exercício 5.6 *Determine, se existirem, as raízes reais de cada uma das equações:*

(a) $x^2 - 16 = 0$ *(c)* $3x^2 = \dfrac{48}{25}$ *(e)* $(x-2)\cdot(x-1) = 3x-7$

(b) $2y^2 + 242 = 0$ *(d)* $y \cdot (y - 5) = 5 \cdot (3 - y)$ *(f)* $(m - 1) \cdot (m + 1) = 224$

5.2.3 Resolvendo equações do 2° grau completas

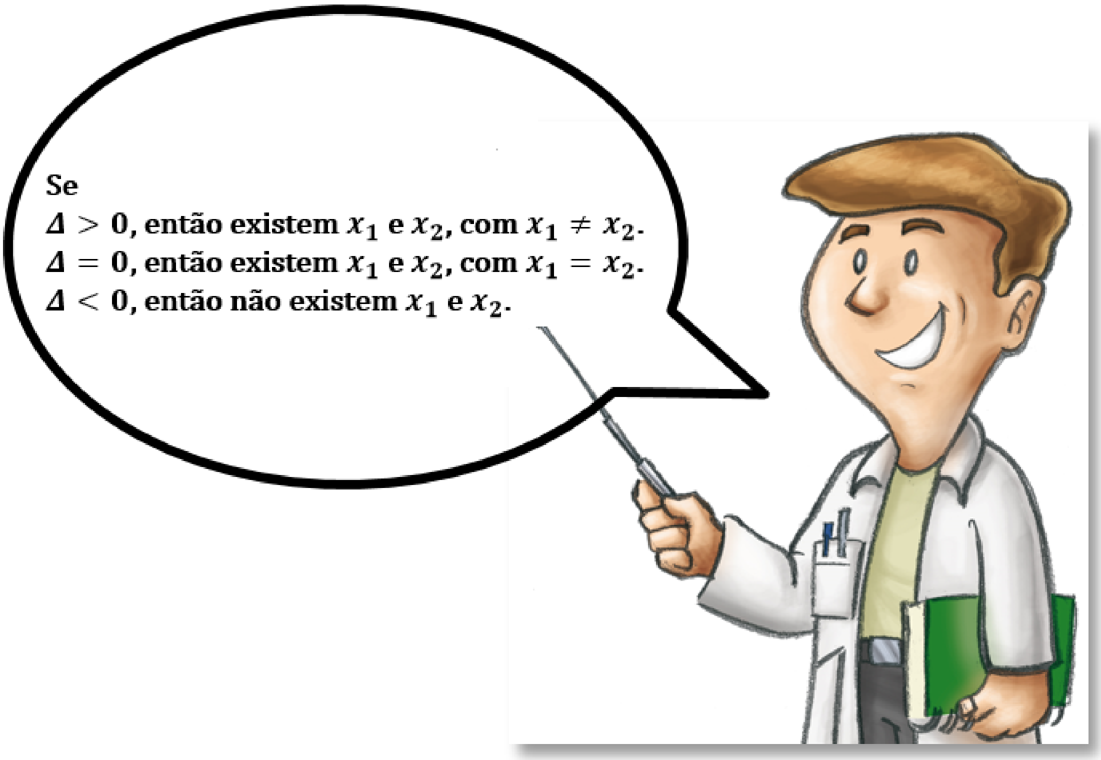
Como já mencionamos na introdução do módulo, o conhecimento de métodos resolutivos das equações do 2° grau remota às civilizações da antiguidade, como os babilônios e egípcios. Apesar disso, a fórmula que conhecemos para resolver essas equações é a **fórmula de Bhaskara**[1].

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}}$$

O termo dentro da raíz é conhecido como **discriminante**, calculado com a seguinte fórmula:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

O discriminante fornece informações importantes sobre as raízes.



Exemplo 5.2.2 *Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações do 2° grau:*

(a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

Calculando Δ.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 \\ &= 49 - 40 \\ &= 9\end{aligned}$$

[1]Em homenagem ao matemático *Bhaskara*, que nasceu em 1114 na cidade de Vijayapura, na Índia. Um dos mais importantes matemáticos do século XII.

Como $\Delta > 0$, teremos duas raízes reais e distintas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{7 \pm 3}{2} \end{aligned}$$

Portanto, as raízes são:

$$x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad e \quad x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

(b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
Calculando Δ.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta = 0$, teremos duas raízes reais e iguais:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{4}{8} \end{aligned}$$

Portanto, as raízes são:

$$x_1 = x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(c) $x^2 + x + 1 = 0$
Calculando Δ.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$, não teremos raízes reais.

Exemplo 5.2.3 *A diferença entre a terça parte do quadrado de um número e o próprio número é 60. Qual é esse número?*

Seja x o número desconhecido. Assim, a equação do 2° grau que traduz o enunciado é:

$$\frac{x^2}{3} - x = 60.$$

Dessa forma, multiplicando ambos os membros da equação acima por 3 e, a seguir, escrevendo-a na forma reduzida teremos:

$$x^2 - 3x - 180 = 0$$

.

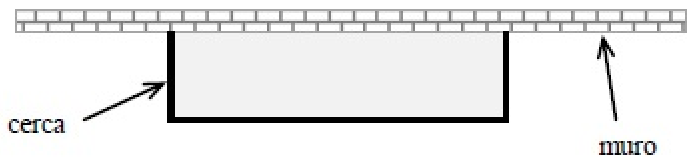
Agora, basta aplicar a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-180) = 729$$

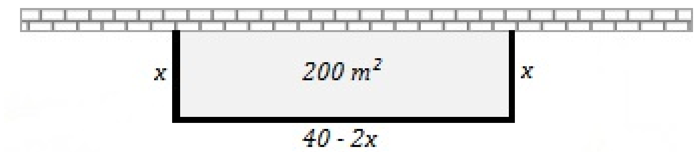
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{3 \pm \sqrt{729}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 27}{2} \Rightarrow x_1 = -12 \;\; ou \;\; x_2 = 15.$$

Portanto, os números procurados são −12 e 15.

Exemplo 5.2.4 *Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo que o fazendeiro irá delimitar, sabendo que deseja obter uma área de 200m²*.



Seja x a medida comum dos lados do retângulo que tocam o muro. O outro lado mede então $40 - 2x$.



Como a área é 200m², devemos ter $x \cdot (40 - 2x) = 200$, *logo* $40x - 2x^2 = 200$, *ou seja,* $2x^2 - 40x + 200 = 0$. *Simplificando teremos a seguinte equação do 2 grau:*

$$x^2 - 20x + 100 = 0.$$

Agora, basta aplicar a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (100) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = 10.$$

Portanto, a região retangular cercada pelo fazendeiro terá dimensões 10m × 20m.

Exercício 5.7 *Resolva em números reais as seguintes equações:*

(a) $x^2 - 3x - 10 = 0$
(b) $5x^2 + 3x + 5 = 0$
(c) $y^2 + 6x + 9 = 0$
(d) $2m^2 - m - 6 = 0$
(e) $3x^2 - 7x = -4$
(f) $y^2 - 4y + 1 = 0$

Exercício 5.8 *Pensei em um número positivo, elevei-o ao quadrado, dividi o resultado por 4 e subtraí 15. Deu o mesmo número em que eu havia pensado. Em que número eu havia pensado?*

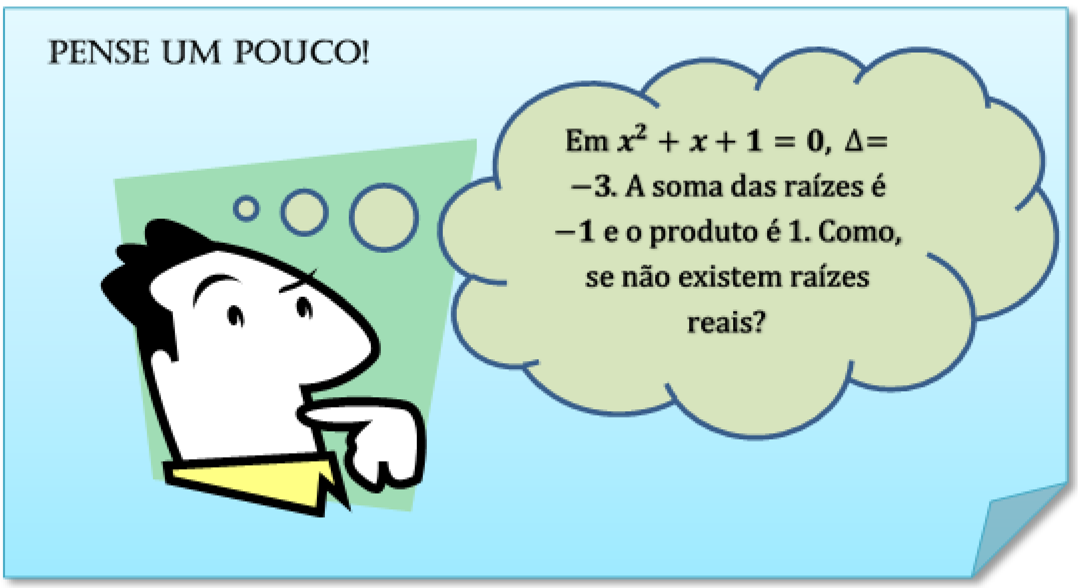
5.2.4 Relação entre Coeficientes e Raízes: Soma e Produto

Para encontrarmos a soma S e o produto P das raízes da equação do 2° grau, usamos as seguintes fórmulas, conhecidas por *Relações de Girard*:

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplo 5.2.5 *Encontre a soma e o produto das raízes da equação $x^2 + x - 2 = 0$.*

Usando as relações acima, obtemos: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$.



Agora estamos pronto para responder ao problema da quadra, exposto no início do módulo.

Exemplo 5.2.6 *O campus Apodi deseja construir uma quadra de futsal, de medidas, comprimento 40 m e largura 20 m. Para segurança dos atletas, deseja-se deixar, ao redor da quadra, uma faixa de largura constante, como mostra a figura (na abertura do módulo). A área disponível para a construção da quadra, com a faixa, deve ser de 1056 m^2. Qual deve ser a largura da faixa?*

Sendo x a largura da faixa em metros, a quadra com a faixa é um retângulo de dimensões $15 + 2x$ *e* $8 + 2x$ *metros. Então, devemos ter:*

$$\begin{aligned}(40 + 2x) \cdot (20 + 2x) &= 1056\\ 2 \cdot (20 + x) \cdot 2 \cdot (10 + x) &= 1056\\ (20 + x) \cdot (10 + x) &= \frac{1056}{4}\\ (20 + x) \cdot (10 + x) &= 264\\ 200 + 20x + 10x + x^2 &= 264\\ x^2 + 30x - 64 &= 0.\end{aligned}$$

Para revelar largura da faixa devemos encontrar os valores de x, ou seja, as soluções da equação $x^2 + 30x - 64 = 0$.

Calculando Δ.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c\\ &= 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)\\ &= 900 + 256\\ &= 1156\end{aligned}$$

Finalmente, descobrimos as raízes.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}\\ &= \frac{-30 \pm \sqrt{1156}}{2 \cdot 1}\\ &= \frac{-30 \pm 34}{2}\end{aligned}$$

Portanto, as raízes são:

$$x_1 = \frac{-30 + 34}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad e \quad x_2 = \frac{-30 - 34}{2} = \frac{-64}{2} = -32$$

Como x deve ser positivo, a resposta procurada é 2, isto é, a largura da faixa é de 2m.

5.3 Exercícios Gerais

1. Siga o modelo e identifique os coeficientes a, b e c da equação do segundo grau.

$$\begin{aligned}(x+1)^2+(x-1)^2 &= (x+3)^2\\ x^2+2x+1+x^2-4x+4 &= x^2+6x+9\\ 2x^2-2x+5-x^2-6x-9 &= 0\\ x^2-8x-4 &= 0\end{aligned}$$

   Então $a = 1$, $b = -8$ e $c = -4$.

   (a) $(x-1)^2+(x+2)^2 = (x-3)^2$

   (b) $(2x-5)^2+(x-2)\cdot(x+2) = x+(x+7)^2$

   (c) $(x-1)^2+x\cdot(x+1) = 2x-(x+3)^2$

2. O número -3 é uma raiz da equação $x^2-7x-2c = 0$. Nessas condições, determine:

   (a) o valor de c;

   (b) a outra raiz dessa equação.

3. Qual o valor de m para que -3 seja raiz da equação $-mx^2-4mx+21 = 0$

4. Sendo h a maior raiz da equação $x^2+x-1 = 0$. Então qual o valor de:

$$\frac{h^5}{1-h}+\frac{2h^6}{(1-h)^2}.$$

5. Um grupo de jovens aluga, por 342 reais,uma van para um passeio, sendo que três deles saíram sem pagar. Por isso, os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles, 19 reais a mais. Qual o número inicial de jovens no grupo?

6. Ache dois números inteiros positivos e consecutivos sabendo que a soma de seus quadrados é 481.

7. O produto dos dois termos de uma fração é 224. Subtraindo 1 do denominador e adicionando 1 ao numerador, os dois termos ficam iguais. Determine essa fração.

8. A base maior, a base menor e a altura de trapézio estão, nessa ordem, em uma sequência em que cada medida é 4cm maior que a anterior. Calcule cada medida sabendo que a área desse trapézio é 216m^2.

9. Um jardim de forma retangular tem 96m^2 de área. Se aumentarmos o comprimento desse jardim em 3m e a largura em 2m, a área do jardim passa a ter 150m^2. Calcule as dimensões originais do jardim.

10. Em um terreno retangular de 80m por 50m foi construído um barracão de forma retangular para servir como depósito de uma firma. Esse depósito ocupa uma área de 1000m^2. Em torno do barracão foi deixado um recuo de x metros de cada lado pra ser gramado. Nessas condições, calcular a medida x do recuo.

11. Uma das raízes da equação $ax - x^2 = 0$ é a média aritmética das raízes da equação $x^2 - 6x + 4 = 0$. Calcule o valor de a.

12. **(Vunesp)** Se aumentarmos em 3cm o lado de um quadrado, sua área aumentará 27cm^2. A partir desses dados, podemos dizer que o lado do quadrado mede, em cm:

    (a) 3
    (b) 4
    (c) 5
    (d) 6
    (e) 7

13. **(UFF – RJ)** Cortando-se pedaços quadrados iguais nos cantos de uma cartolina retangular de 80 cm de comprimento por 60 cm de largura, obtém-se uma figura em forma de cruz. Se a área da cruz for a terça parte da área retangular original, o tamanho do lado de cada quadrado será igual a:

    (a) $5\sqrt{2}$cm
    (b) $10\sqrt{2}$cm
    (c) $15\sqrt{2}$cm
    (d) $20\sqrt{2}$cm
    (e) $25\sqrt{2}$cm

14. Sabendo que x é um número real que satisfaz

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}},$$

determine os valores possíveis de x.

DESAFIO

Prove que se os coeficientes de uma equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

são inteiros ímpares, então as raízes da equação não podem ser números racionais.