Matrizes são organizações de informações numéricas em uma tabela retangular formada por linhas e colunas.
Toda matriz tem o formato ***m x n*** (*leia-se: m por n, com m e n ε N**), onde **m** é o número de linhas e **n** o número de colunas.

Representação de matrizes

Existem diversas maneiras de representarmos matrizes, veja quais são:

- Colchetes: [ ]
- Parênteses: ( )

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Elementos de uma matriz

Seja a matriz genérica $\mathbf{A}_{\mathbf{mxn}}$, isto é, **m** representa as linhas e **n** o número de colunas. Então, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, os elementos da matriz **A** são indicados por $\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}$, onde o **i** representa o índice da linha e **j** representa o índice da coluna para o elemento em questão. Assim, para localizarmos um elemento na coluna, procuramos o número da linha e da coluna, esses números são os índices **i** e **j**.

Exemplo: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 01:
Considere a matriz $\mathbf{M} = [\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}]_{\mathbf{2\times3}}$, tal que $\mathbf{a}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Escreva a matriz **M**.

Matriz Linha
É uma matriz que possui somente uma linha (ordem 1 x n)
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Coluna
É uma matriz que possui uma única coluna (ordem m x 1)
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Nula
É uma matriz que possui todas as entradas iguais a zero.
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Quadrada
É uma matriz em que o número de colunas é igual ao número de linhas. Sendo que uma matriz quadrada de ordem **mxn** podemos dizer que ela tem ordem **n**
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa é uma matriz quadrada **3 x 3**, ou simplesmente de ordem **3**.

Numa matriz quadrada de ordem **n**, temos que os elementos a_{ij} com **i = j** formam a diagonal principal, enquanto que os elementos **i + j = n + 1**, formam a diagonal secundária.
Veja:

Diagonal principal Diagonal secundária

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Traço de uma matriz: soma dos n elementos de sua diagonal principal.

Matriz Diagonal
É uma matriz quadrada onde todos os elementos que não pertencem a diagonal principal são nulos.
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade
É uma matriz quadrada em que todos os elementos que não pertencem a diagonal principal são nulos e os elementos da diagonal principal são **1**. É representada por I_n, matriz quadrada de ordem **n**.

Exemplos:

I_2 = Matriz identidade de ondem 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I_3 = Matriz identidade de ondem 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma Geral

$\mathbf{I_n = [a_{ij}]^{n,n}}$ Onde $\mathbf{a_{ij} = \{ 1, \text{ se } i = j \text{ e } 0, \text{ se } i \neq j}$

Matriz Oposta

É uma matriz que é obtida trocando os sinais dos elementos da matriz. Se chamamos uma matriz de **A**, então a matriz oposta é **-A**.

Exemplo: Considere a matriz **A** a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Então a matriz oposta **-A** é:

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta

Uma matriz transposta é uma matriz resultante da troca ordenadamente de linhas pelas colunas de outra matriz. Se temos uma matriz **A**, então a transposta de **A** tem notação $\mathbf{A^t}$.

Exemplo: Seja a matriz $\mathbf{A = [a_{ij}]_{mxn}}$, a matriz transposta de **A** é $\mathbf{A^t = [a_{ij}]_{nxm}}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedade da transposta

Considere as matrizes **A** e **B**, e **a** um número real qualquer, caso as operações a seguir sejam possíveis, então temos que:

- $\mathbf{(A + B)^t = A^t + B^t}$
- $\mathbf{(a.A)^t = a.A^t}$
- $\mathbf{(A^t)^t = A}$
- $\mathbf{(A.B)^t = B^t.A^t}$

Obs.

1. Uma matriz é simétrica, se, e somente se, ela seja igual a sua transposta: $\mathbf{A = A^t}$.
2. Uma matriz é antissimétrica, se, e somente se, ela seja igual a oposta da sua transposta: $\mathbf{A = -A^t}$.
3. Uma matriz quadrada é ortogonal, se, e somente se, a sua transposta seja igual a sua inversa: $\mathbf{A^t = A^{-1}}$.

Questão 01

Enem 2019

Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

A) segunda-feira. B) terça-feira. C) quarta-feira. D) quinta-feira. E) sexta-feira.

Questão 02

1) Enem 2018

A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz A = [a_{ij}], em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos a_{ij} = 0, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Questão 03

(Unesp-sp 2002) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento *aij* da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, i, j = 1, 2, 3.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 8 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

a) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.
b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.
c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.
d) A soma das quantidades do produto P1 vendida pelas 3 lojas é 52.
e)A soma das quantidades dos produtos do tipo P1 e P2 vendidas pela loja L1 é 45.

Questão 04

(Fgv-sp 2004) Três ônibus levaram alunos de uma escola para uma excursão. Em uma parada, todos os alunos saíram dos ônibus. Todos prosseguiram a viagem, mas não necessariamente no ônibus de onde tinham saído. Na matriz abaixo, **aij** representa o número de pessoas que saíram do ônibus **i** e subiram no ônibus **j** após a parada.

$$\begin{bmatrix} 30 & 5 & 7 \\ 2 & 25 & 8 \\ 3 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

Então:

a) participaram da excursão 75 alunos.
b) um dos ônibus permaneceu com o mesmo número de passageiros.
c) o ônibus 1 perdeu 6 passageiros.
d) o ônibus 2 ganhou 4 passageiros.
e) o ônibus 3 ganhou 6 passageiros

Questão 05

(Ufrn 2004) A matriz abaixo é 7x7 e foi formada com o número 1 em cada posição da primeira linha, um 0 e um 2, alternadamente, nas posições da segunda linha, dois 0 e um 3, também alternadamente, nas posições da terceira linha, e assim sucessivamente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Numa matriz 100x100, construída com o mesmo critério, a quantidade de números diferentes de zero na centésima coluna é:

a) 8. b) 9. c) 10. d) 11.