Sistemas Lineares

Sistemas Lineares são conjuntos de equações associadas entre elas que apresentam a forma a seguir:

$$\begin{cases} a_m x_m + \dots + a_n x_n = b_1 \\ a_{m_2} x_{m_2} + \dots + a_{n_2} x_{n_2} = b_1 \\ a_{m_3} x_{m_3} + \dots + a_{n_3} x_{n_3} = b \end{cases}$$

A chave do lado esquerdo é o símbolo usado para sinalizar que as equações fazem parte de um sistema. O resultado do sistema é dado pelo resultado de cada equação.

Os coeficientes amxm, am2xm2, am3xm3, ... , an, an2, an3 das incógnitas x1, xm2,xm3, ... , xn, xn2, xn3 são números reais.

Ao mesmo tempo, b também é um número real que é chamado de termo independente.

Sistemas lineares homogêneos são aqueles cujo termo independente é igual a 0 (zero): a1x1 + a2x2 = 0.

Portanto, aqueles que apresentam termo independente diferente de 0 (zero) indica que o sistema não é homogêneo: a1x1 + a2x2 = 3.

Exemplo. A mãe do Paulo comprou 4 canetas e 1 lápis. Pagou um total de R$ 13,90. O pai da Marina foi à mesma loja e pagou por 2 canetas e 1 lápis R$ 7,50. Qual o valor de cada lápis e cada caneta?

substituição

$$\begin{cases} 4x + y = 13{,}90 \\ 2x + y = 7{,}50 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{y = 7{,}50 - 2x}$$

$$4x + 7{,}50 - 2x = 13{,}90$$

$$2x = 13{,}90 - 7{,}50$$

$$2x = 6{,}40$$

$$x = 3{,}20$$

1) Enem 2018

Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R$ 3 800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R$ 3 400,00. A televisão mais a estante sairiam por R$ 4 200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista.
O valor total, em real, pago pelo cliente foi de
A) 3 610,00. B) 5 035,00. C) 5 415,00. D) 5 795,00. E) 6 100,00.

Televisão – $t = 2300^{\times 2}$
Sofá – $s = 1500$
Estante – $e = 1900$

$$4600 + 1500 = 6100$$
$$6100 - 305 = \boxed{5795}$$

$$6100 \cdot \frac{5}{100} = 305$$

$$\begin{cases} t + s = 3800 \\ s + e = 3400 \\ t + e = 4200 \Rightarrow \boxed{e = 4200 - t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + s = 3800 \\ s + 4200 - t = 3400 \end{cases}$$

$$t + s = 3800$$
$$-t + s = 3400 - 4200$$

$$t + s = 3800$$
$$-t + s = -800$$

$$2s = 3000/2$$
$$\boxed{s = 1500}$$

Preço da estante

$$e = 4200 - t$$
$$e = 4200 - 2300$$
$$e = 1900$$

2)Enem 2015

Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$ 100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

A 30
B 36
C 50
D 60
E 64

C E

$$\begin{cases} C + E = 80 \quad \times(10) \\ 20C - 10E = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10C + \cancel{10E} = 800 \\ 20C - \cancel{10E} = 100 \end{cases}$$

$$30C = 900$$

$$C = \frac{90\cancel{0}}{3\cancel{0}} = 30$$

3)Enem 2017

uma escola organizou uma corrida de revezamento 4 x 400 metros, que consiste em uma prova esportiva na qual os atletas correm 400 metros cada um deles, segurando um bastão, repassando-o de um atleta para outro da mesma equipe, realizando três trocas ao longo do percurso, até o quarto atleta, que cruzará a linha de chegada com o bastão. A equipe ganhadora realizou a prova em um tempo total de 325 segundos.
O segundo corredor da equipe ganhadora correu seus 400 metros 15 segundos mais rápido do que o primeiro; já o terceiro realizou seus 400 metros 5 segundos mais rápido que o segundo corredor, e o último realizou seu percurso em 3/4 do tempo realizado pelo primeiro.
Qual foi o tempo, em segundo, em que o último atleta da equipe ganhadora realizou seu percurso de 400 metros?

a) 58
b) 61
c) 69
d) 72
e) 96

→ t o tempo do primeiro atleta

→ $t - 15$

$t - 20$ (5)

$\frac{3}{4}t$

325

-35 / $+35$

$$t + t - 15 + t - 20 + \frac{3}{4}t = 325$$

$$\frac{3t}{1} + \frac{3}{4}t = 360 \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times\ 4 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$$1440 \div 15 = 96$$

$$\frac{3}{4} \cdot 96 = 72$$

$$12t + 3t = 1440$$

$$15t = 1440$$

$$t = 1440/15$$

$$t = 96 \text{ segundos}$$

Primeiro

$$96 \div 4 = 24$$

4) Enem 2017

Uma pessoa encheu o cartão de memória de sua câmera duas vezes, somente com vídeos e fotos. Na primeira vez, conseguiu armazenar 10 minutos de vídeo e 190 fotos. Já na segunda, foi possível realizar 15 minutos de vídeo e tirar 150 fotos. Todos os vídeos possuem a mesma qualidade de imagem entre si, assim como todas as fotos. Agora, essa pessoa deseja armazenar nesse cartão de memória exclusivamente fotos, com a mesma qualidade das anteriores.
O número máximo de fotos que ela poderá armazenar é
a) 200.
b) 209.
c) 270.
d) 340.
e) 475.

$$\begin{cases} 10V + 190F = Ca \\ 15V + 150F = Ca \end{cases}$$

$$10V + 190F = 15V + 150F$$

$$10V - 15V = 150F - 190F$$

$$-5V = -40F \quad (-1)$$

$$5V = 40F$$

$$V = \frac{40}{5}F$$

$$1V = 8F$$

$$10V + 190F = Ca$$

$$10 \cdot 8F + 190F = Ca$$

$$80F + 190F = Ca$$

$$\boxed{270F = Ca}$$

5)Enem 2018

$N \cdot x = \text{Preço}$

Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R $ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

a) 20

b) 24

c) 29

d) 40

e) 58

x valor da parcela

$$\begin{cases} \boxed{(N+5)\cdot(x-200) = nx} \\ \boxed{(N-4)\,(x+232) = nx} \end{cases}$$

$$(N+5)\cdot(x-200) = nx$$

$$\cancel{nx} - 200n + 5x - 1000 = \cancel{nx}$$

$$-200n + 5x = 1000 \quad \div 5$$

$$-40n + x = +200 \quad 1^{a}$$

$$(n-4)\cdot(x+232) = nx$$

$$\cancel{nx} + 232n - 4x - 928 = \cancel{nx}$$

$$232n - 4x = 928 \quad \div 2$$

$$58n - x = 232 \quad 2^{a}$$

$$\begin{cases} -40n + \cancel{x} = 200 \\ 58n - \cancel{x} = 232 \end{cases}$$

$$18n = 432$$

$$n = 24 \text{ parcelas}$$

$$\begin{array}{r|l} 432 & 18 \\ 36 & 24 \\ \hline 072 & \\ 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Sistemas Homogêneos

Sistemas Homogêneos: Um sistema é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações são nulos.
Exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ \sqrt{2}\,x + 3y = 0 \end{cases}$$

2x2

Sistemas equivalentes: Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Exemplo: Sendo $S_1 = \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, o par ordenado (x, y) = (1, 2) satisfaz ambos e é único. Logo, S_1 e S_2 são equivalentes: $S_1 \sim S_2$.

- SISTEMA LINEAR
  - POSSÍVEL OU COMPATÍVEL
    quando admite solução
    - DETERMINADO
      Admite uma única solução — SPD
    - INDETERMINADO
      Admite infinitas soluções — SPI
  - IMPOSSÍVEL OU INCOMPATÍVEL
    quando não admite solução — SI

Regra de Cramer

Cramer, se um sistema linear apresenta o número de equações igual ao número de incógnitas e determinante diferente de zero, então as incógnitas são calculadas por:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{D_x}{D}\ ;\ y = \frac{D_y}{D}\ \text{e}\ z = \frac{D_z}{D},\ D \neq 0$$

Os valores de Dx, Dy e Dz são encontrados substituindo a coluna de interesse pelos termos independentes da matriz.

$$D_x = \begin{matrix} \mathbf{d_1} & b_1 & c_1 \\ \mathbf{d_2} & b_2 & c_2 \\ \mathbf{d_3} & b_3 & c_3 \end{matrix}\ ;\ D_y = \begin{matrix} a_1 & \mathbf{d_1} & c_1 \\ a_2 & \mathbf{d_2} & c_2 \\ a_3 & \mathbf{d_3} & c_3 \end{matrix}\ ;\ D_z = \begin{matrix} a_1 & b_1 & \mathbf{d_1} \\ a_2 & b_2 & \mathbf{d_2} \\ a_3 & b_3 & \mathbf{d_3} \end{matrix}$$

Exemplo 01

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

$1 + 2 + z = 6$

$\rightarrow z = 3$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$-2 \quad +3 \quad -8 \qquad 4 \quad -1 \quad 12$

$D = -11 + 19 = +8$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \\ 13 & 3 \end{matrix}$$

$-26 \quad +18 \quad -10 \qquad 24 \quad -13 \quad 15$

$D_x = -49 + 57 = 8$

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{8}{8} = 1$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \\ 1 & 13 \end{matrix}$$

$-5 \quad +13 \quad -48 \qquad 10 \quad -6 \quad 52$

$D_y = \boxed{-6 - 48 - 5}$

$= -59 + 75 = 16$

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{16}{8} = 2$

$$D_z = \begin{vmatrix} & & 6 \\ & & 5 \\ & & 13 \end{vmatrix}$$

Questão 01

(Ufrn 2001) Três amigos, denominados *X*, *Y* e *Z*, utilizam o computador todas as noites. Em relação ao tempo em horas, em que cada um usa o computador, por noite, sabe-se que:

- O tempo de *X* mais o tempo de *Z* excede o de *Y* em 2;
- O tempo de *X* mais o quádruplo do tempo de *Z* é igual a 3 mais o dobro do tempo de *Y*;
- O tempo de *X* mais 9 vezes o tempo de *Z* excede em 10 o tempo de *Y*.

A soma do número de horas de utilização do computador, pelos três amigos, em cada noite, é igual a:

a) 4 h b) 7 h c) 5 h d) 6 h

$$\left.\begin{array}{l} x + z = y + 2 \\ x + 4z = 3 + 2y \\ x + 9z = y + 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ x - y + 9z = 10 \end{array}\right.$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array} = -23 + 15 = -8$$

$2 \quad 4 \quad 9 \quad -18 \quad -4 \quad -1$

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 10 & -1 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 10 & -1 \end{array} = -79 + 55 = -24$$

$20 \quad 8 \quad 27 \quad -36 \quad -40 \quad -3$

$$Dy = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 10 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 10 \end{array} = 45 - 61 = -16$$

$-3 \quad -40 \quad -18 \quad 27 \quad 8 \quad 10$

$$Dz = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 10 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array} = -25 + 17 = -8$$

$4 \quad 3 \quad 10 \quad -20 \quad -3 \quad -2$

Solução

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-24}{-8} = 3 \; ; \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-16}{-8} = 2 \; ; \quad z = \frac{Dz}{D} = \frac{-8}{-8} = 1$$

Questão 02

(Ufrn 2002) A sorveteria *Sabor da Fruta* vende o sorvete simples por R$ 2,00 e o sorvete com cobertura por R$ 2,40. No dia das crianças, foram vendidos 720 sorvetes.

a) Determine qual seria o apurado nesse dia, se fossem vendidos 400 sorvetes com cobertura e 320 sorvetes simples.

b) Se o apurado fosse R$ 1.640,00, determine a quantidade de sorvetes - de cada tipo - vendida nesse dia.

S → simples   C → cobertura

a)

$400 \times 2{,}40 = 960$

$320 \times 2 = 640$ +

R$ 1600

$$\begin{array}{r} 2{,}40 \\ \times\ 4 \\ \hline 9{,}60 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2S + 2{,}4C = 1640 \\ S + C = 720 \quad (-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \cancel{2S} + 2{,}4C = 1640 \\ -\cancel{2S} - 2C = -1440 \end{cases}$$

$0{,}4C = 200$

$C = \dfrac{200}{0{,}4} = 500$

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 4 \\ 200 & 500 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Simples $\begin{array}{r} 220 \\ \hline 720 \end{array}$