INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE

Fundamentos de Lógica e Algoritmo

Tipos de Proposições e Implicação Lógica

Tipos de Proposições Compostas

De acordo com os valores que as proposições compostas assumem elas podem ser classificadas em 3 tipos principais:

- Tautologia
- Contradição
- Contigência

Tautologia

Tautologia é toda proposição composta P(p,q,r,...) cujo valor lógico é sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples p,q,r,...

Também podem ser chamadas de **proposições logicamente verdadeiras**.

Tautologia

Exemplo: **¬(p ∧ ¬p)**

p	¬p	p ∧ ¬p	¬(p ∧ ¬p)
V	F	F	V
F	V	F	V

Exemplo: **p v ¬p**

p	¬p	p v ¬p
V	F	V
F	V	V

Tautologia

Exemplo: **¬(p ∧ ¬p)**

p	¬p	p ∧ ¬p	¬(p ∧ ¬p)
V	F	F	V
F	V	F	V

Dizer que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro.

Exemplo: **p v ¬p**

p	¬p	p v ¬p
V	F	V
F	V	V

Tautologia

Exemplo: **¬(p ∧ ¬p)**

p	¬p	p ∧ ¬p	¬(p ∧ ¬p)
V	F	F	V
F	V	F	V

Dizer que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro.

Exemplo: **p v ¬p**

p	¬p	p v ¬p
V	F	V
F	V	V

Dizer que uma proposição é verdadeira ou e falsa é sempre verdadeiro.

Contradição

Contradição é toda proposição composta P(p, q, r, . . .) cujo valor lógico é sempre falso, quais quer que sejam os valores lógicos das proposições simples p,q,r,...

As contradições são também denominadas **proposições contraválidas** ou **proposições logicamente falsas.**

Contradição

Exemplo: $p \wedge \neg p$

p	¬p	p ∧ ¬p
V	F	F
F	V	F

Exemplo: $p \leftrightarrow \neg p$

p	¬p	p ↔ ¬p
V	F	F
F	V	F

Contradição

Exemplo: $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Dizer que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso.

Exemplo: $p \leftrightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	F

Contradição

Exemplo: $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Dizer que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso.

Exemplo: $p \leftrightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	F

.

Contingência

Contingência é toda a proposição composta que não é tautologia nem contradição.

As contingências são também denominadas **proposições indeterminadas.**

Contingência

Exemplo: $p \rightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V

Exemplo: $p \vee q \rightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

Implicação Lógica

Diz-se que uma proposição P(p, q, r, ...) implica logicamente uma proposição Q(p, q, r, ...), se Q(p, q, r, ...) é verdadeiro todas as vezes em que P(p, q, r, ...) é verdadeiro.

Notação

$P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$

Implicação Lógica

Diz-se que uma proposição P(p, q, r, ...) implica logicamente uma proposição Q(p, q, r, ...), se Q(p, q, r, ...) é verdadeiro todas as vezes em que P(p, q, r, ...) é verdadeiro.

Notação

$P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

Propriedades da Implicação Lógica

É imediato que a relação de implicação lógica entre proposições utiliza-se das propriedades reflexiva (R) e transitiva (T).

Exemplo

(R) $P(p,q,r,...) \Rightarrow P(p,q,r,...)$

(T) Se $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$, então $P(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$

Demonstração de Implicação Lógica I

Proposições: $p \wedge q$, $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

A proposição $p \wedge q$ é verdadeira somente na linha 1, e nesta linha, as proposições $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$ também são verdadeiras. Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, isto é:

$$\mathbf{p \wedge q \Rightarrow p \vee q \text{ e } p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q}$$

Demonstração de Implicação Lógica II

Proposições: $p \leftrightarrow q$, $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

A proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira nas linhas 1 e 4 e, nestas linhas, proposições $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ também são verdadeiras. Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, isto é:

$$\mathbf{p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q \text{ e } p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p}$$

Demonstração de Implicação Lógica II

Teorema

A proposição P(p, q, r, . . .) implica a proposição Q(p, q, r, . . .) isto é:

P(p,q,r,...) ⇒ Q(p,q,r,...)

se e somente se a condicional:

P(p,q,r,...) → Q(p,q,r,...) é tautológica.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE

Demonstração de Implicação Lógica II

Teorema

A proposição P(p, q, r, . . .) implica a proposição Q(p, q, r, . . .) isto é:

P(p,q,r,...) ⇒ Q(p,q,r,...)

se e somente se a condicional:

P(p,q,r,...) → Q(p,q,r,...) é tautológica.

Os símbolos → e ⇒ são distintos, pois o primeiro é de operação lógica (aplicado, por ex., às proposições p e q dá a nova proposição p → q), enquanto que o segundo é de relação (estabelece que a condicional P(p,q,r,...) ⇒ Q(p,q,r,...) é tautológica).

Demonstração de Implicação Lógica II

Condicional: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$