GRUPOS TOPOLÓGICOS

FRANCISCO BATISTA DE MEDEIROS

Para elaboração dessas notas utilizamos, principalmente, o livro *Abstract Harmonic Analysis I* - **E. Hewitt** & **K. A. Ross**, second edition, *Springer-Verlag*, 1979. E tais notas é parte de uma conferência ministrada no IME-USP, sob supervisão da **Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas**.

Um *grupo topológico* tem a estrutura algébrica de um grupo e estrutura topológica de um espaço topológico e essas estruturas são "conectadas" pela exigência de que o produto e a inversão do grupo sejam funções contínuas. Faremos aqui uma pequena introdução a teoria de grupos topológicos, com definições, exemplos e algumas propriedades, passando por *subgrupos topológicos* e *espaços topológicos quocientes* que adimitem estrutura de grupo topológico. Como aplicação, faremos uma construção de espaços topológicos *totalmente desconexos*.

1. Preliminares

Antes de passarmos ao conceito formal de grupo topológico, daremos algumas definições e propriedades que nos serão úteis no decorrer do texto.

Um *grupo* é um conjunto não-vazio G munido de uma aplicação $(x, y) \to xy$ de $G \times G$ em G tal que:

- $x(yz) = (xy)z$, para todo $x, y, z \in G$;
- existe $e \in G$ de modo que $ex = xe = x$, para todo $x \in G$.
- para cada $x \in G$, existe $y \in G$ de modo que $xy = yx = e$. O elemento y é chamado de *inverso* para x.

O elemento $e \in G$ é único e por isso é chamado de *identidade* do grupo G. Um inverso para um dado $x \in G$ é único e assim o denotaremos por x^{-1}.

Sejam A e B subconjuntos de um grupo G. O conjunto $\{ab\colon a \in A, b \in B\}$ será denotado por AB, o conjunto $\{a^{-1}\colon a \in A\}$ por A^{-1}, o conjunto $\{a\}B$ por aB e $B\{a\}$ por Ba. Para efeito de simplicidade, escreveremos A^2 em vez de AA, A^3 em vez de AAA, etc. Um subconjunto não-vazio H de G é chamado de *subgrupo* de G se $xy^{-1} \in H$ sempre que $x, y \in H$. Quando H é um subgrupo de um grupo G e $x \in G$, o conjunto xH é chamado de *classe lateral* de H em G e G/H é o conjunto de todas as classes laterais de H em G, ou seja, $G/H = \{xH\colon x \in G\}$. No caso em que H é *subgrupo normal*, ou seja, $xHx^{-1} \subseteq H$ para todo $x \in G$, o conjunto G/H é um grupo quando munido da aplicação $(xH, yH) \to (xy)H$ de $G/H \times G/H$ em G/H. Uma função $f\colon G \to G'$ entre dois grupos

Date: 14 de junho de 2011.

G e G' é chamada de *homomorfismo* se $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, para todo $x, y \in G$. No caso em que f é uma bijeção, dizemos que f é um *isomorfismo* ou simplesmente que os grupos G e G' são *isomorfos.* Para um dado homomorfismo $f\colon G \to G'$, o subconjunto de G, $\ker(f) := \{x \in G\colon f(x) = e'\}$, é chamado de *núcleo* de f e é um subgrupo normal de G. Além disso, temos também que $G/\ker(f)$ e $\Im(f) := \{f(x)\colon x \in G\}$ são isomorfos (Segundo Teorema do Isomorfismo).

Se H é um subgrupo normal de G, a *aplicação natural* $\varphi\colon G \to G/H$, dada por $\varphi(x) = xH$, é um homomorfismo de grupos. Também são exemplos de homomorfismo de grupos:

- Fixado $a \in G$, as funções de G em G definidas por ${}_a\phi(x) = ax$ e $\phi_a(x) = xa$, para todo $x \in G$. Tais aplicações são isomorfismos e são conhecidas como *translação* à *esquerda* e *translação* à *direita* por a, respectivamente.

A aplicação $x \to x^{-1}$ de G em G, chamada de *inversão*, nem sempre é um homomorfismo, mas será de bastante utilidade no desenvolvimento destas notas.

Ao longo do texto, a palavra *vizinhança* significará *vizinhança aberta.*

2. Grupos Topológicos

Passaremos agora a definição formal de *grupos topológicos* e veremos algumas propriedades básicas.

Definição. Seja G um conjunto que é um grupo e também um espaço topológico. Suponha que:

- **(i):** a aplicação $(x, y) \to xy$ de $G \times G$ em G é uma aplicação contínua do espaço produto $G \times G$ no espaço G;
- **(ii):** a inversão $x \to x^{-1}$ de G em G é contínua.

  Então G é chamado de *grupo topológico.*

Note que poderíamos substituir as condições (i) e (ii) pela condição:

- **(I):** a aplicação $(x, y) \to xy^{-1}$ de $G \times G$ em G é uma aplicação contínua do espaço produto $G \times G$ no espaço G.

Além disso, em alguns momentos é mais conveniente usar a "tradução"das condições (i) e (ii), respectivamente, em linguagem de vizinhanças do espaço topológico G, como segue:

- **(i)':** para cada $(x, y) \in G \times G$ e para toda vizinhança U de xy, existem vizinhanças V e W de x e y, respectivamente, tais que $VW \subseteq U$;
- **(ii)':** para cada $x \in G$ e para toda vizinhança U de x^{-1}, existe uma vizinhança V de x tal que $V^{-1} \subseteq U$.

Exemplos:

- **(a):** Sejam G um grupo qualquer e τ a *topologia caótica* ou a *topologia discreta.* Então (G, τ) é um grupo topológico.
- **(b):** O grupo aditivo $\mathbb{R}$ dos números reais munido da topologia usual é um grupo topológico.
- **(c):** O grupo multiplicativo $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dos números reais não nulos, com a topologia usual induzida de $\mathbb{R}$ é um grupo topológico.

(d): Sejam G um grupo *infinito* e τ a topologia cofinita sobre G. Então (G, τ) **não** é um grupo topológico. De fato, como veremos mais adiante, todo grupo topológico que satisfaz o axioma T_0 é um espaço de Hausdorff. No entanto, (G, τ) verifica o axioma T_1 mas não verifica o axioma T_2.

(e): A reta $\mathbb{R}_S$ de *Sorgenfrey*[1] é outro exemplo de espaço topológico que não é um grupo (aditivo) topológico, pois a inversão $x \to -x$, de $\mathbb{R}_S$ em $\mathbb{R}_S$, não é contínua. Note também que a aplicação $(x, y) \to x + y$, de $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ em $\mathbb{R}_S$, é contínua. Em particular o axioma (i) não implica no axioma (ii).

Como consequência da definição de grupo topológico, segue que a translação à direita, ϕ_a, a translação à esquerda, ${}_a\phi$, e a inversão, todas sobre um dado grupo topológico G, são homeomorfismos de espaços topológicos. Então para cada $a \in G$, como os homeomorfismos são aplicações abertas e fechadas, segue que os conjuntos aU, Ua e U^{-1} são abertos (fechados) em G, sempre que U for aberto (fechado). Além disso, se G é um grupo topológico e $\mathcal{V}_e$ é um sistema fundamental de vizinhanças da identidade $e \in G$, então as famílias $\mathcal{G} := \{xU\colon x \in G \text{ e } U \in \mathcal{V}_e\}$ e $\mathcal{G}' := \{Ux\colon x \in G \text{ e } U \in \mathcal{V}_e\}$ são bases de abertos para G. De fato, se V é um aberto, não-vazio, de G e a é um elemento qualquer de V, então $a^{-1}V = {}_{a^{-1}}\phi(V)$ é um aberto contendo e e assim existe $U \in \mathcal{V}_e$ tal que $U \subseteq a^{-1}V$, de onde segue que $a \in aU$ e $aU \subseteq V$. Portanto, V é uma reunião de conjuntos da família $\mathcal{G}$. De forma análoga, verifica-se que V é uma reunião de elementos de $\mathcal{G}'$.

Se G é um grupo topológico, se A é um aberto em G e se B é um subconjunto qualquer de G, então $AB = \bigcup\{Ab\colon b \in B\}$ e $BA = \bigcup\{bA\colon b \in B\}$ são abertos em G. Note que esse mesmo tipo de argumento não garante que AB é fechado no caso em que A é fechado em G. Na verdade, mesmo que A e B sejam fechados em G, em geral AB não é fechado, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo: Seja $G = \mathbb{R}$ o grupo aditivo dos números reais, com a topologia usual. Assim $\mathbb{Z}$ é fechado em G e, portanto, $\mathbb{Z}\sqrt{2} = \phi_{\sqrt{2}}(\mathbb{Z})$ também é fechado. No entanto, $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$ é um subgrupo de $\mathbb{R}$ que não é fechado, pois os subgrupos (não triviais) fechados de $\mathbb{R}$ são da forma $a\mathbb{Z}$, com $a > 0$. E claramente não existe $a > 0$ de modo que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} = a\mathbb{Z}$. De fato, suponha por absurdo que existe tal $a > 0$. Então $1 + 0\sqrt{2} = an$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, e assim $a \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, existe $m \in \mathbb{Z}$ de modo que $0 + 1\sqrt{2} = am$ e, portanto, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo.

No entanto, temos o seguinte resultado:

Proposição 1. *Sejam A e B dois subconjuntos de um grupo topológico G. Se A é fechado e se B é compacto, então AB e BA são fechados em G.* ∎

Temos também que se A e B são subespaços compactos de um grupo topológico G, então AB é compacto. De fato, o espaço produto $A \times B$ é compacto e AB é a imagem da função contínua de $A \times B$ em G que associa cada $(a, b) \in A \times B$ ao elemento $ab \in AB$.

[1] $\mathbb{R}_S$ é o conjunto dos números reais com a topologia gerada pelos intervalos semi-abertos da forma $[a, b[$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \leq b$

O próximo resultado diz que a topologia de um grupo topológico pode ser descrita por meio de algumas propriedades de um sistema fundamental de vizinhanças da identidade do grupo.

Teorema 1. *Sejam G um grupo topológico e $\mathcal{V}_e$ um sistema fundamental de vizi-nhanças de $e \in G$. Então:*

(i) *para todo $U \in \mathcal{V}_e$, existe $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $V^2 \subseteq U$;*
(ii) *para todo $U \in \mathcal{V}_e$, existe $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $V^{-1} \subseteq U$;*
(iii) *para todo $U \in \mathcal{V}_e$ e para todo $x \in U$, existe $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $xV \subseteq U$;*
(iv) *para todo $U \in \mathcal{V}_e$ e para todo $x \in G$, existe $V \in \mathcal{V}_e$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$.*

Reciprocamente, sejam G um grupo e $\mathcal{V}$ uma família de subconjuntos de G com a propriedade da intersecção finita *satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) acima e também a condição*

(v) *para todo $U, V \in \mathcal{V}$, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.*

Então a família $\mathcal{G} := \{xU : x \in G \text{ e } U \in \mathcal{V}\}$ é uma base para uma topologia sobre G. Além disso, G é um grupo topológico com tal topologia. ■

Note que se $\mathcal{V}_e$ é um sistema fundamental de vizinhanças da identidade de um grupo topológico G, então podemos supor, sem perda de generalidade, que todo U em $\mathcal{V}_e$ é simétrico, isto é, $U = U^{-1}$. De fato, se $U \in \mathcal{V}_e$, então $V = U \cap U^{-1} \subseteq U$ é ainda uma vizinhança de e tal que $V = V^{-1}$. Esse observação, juntamente com o próximo lema, será útil para mostrar que todo grupo topológico que satisfaz o axioma T_0, é um espaço topológico que satistaz os axiomas T_2 e T_3.

Lema 1. *Seja G um grupo topológico satisfazendo o axioma T_0. Então G satisfaz o axioma T_1.*

Prova. Dado que as translações são homeomorfismos de G em G, é suficiente mostrar que o conjunto unitário $\{e\}$ é fechado em G. Para tanto seja $x \in G \setminus \{e\}$ e mostremos que $x \notin \overline{\{e\}}$. Por G ser T_0, existe aberto U em G tal que ou $x \in U$ ou $e \in U$. Logo:

- se $x \in U$, então $e \notin U$ e, portanto, $U \cap \{e\} = \emptyset$;
- se $e \in U$, então $x \notin U$. Além disso, como $e \in U^{-1}$ então $x \in xU^{-1}$. Assim xU^{-1} é um aberto em G contendo x tal que $e \notin xU^{-1}$ e, portanto, $xU^{-1} \cap \{e\} = \emptyset$. ■

Teorema 2. *Seja G um grupo topológico T_0. Então G satisfaz o axioma T_3 e, em particular, é um espaço de Hausdorff.*

Prova. Para mostrar que G satisfaz o axioma T_3, é suficiente mostrar que para toda vizinhança U de e, existe V, vizinhança de e, tal que $\overline{V} \subseteq U$, uma vez que as translações são homeomorfismos. Para tanto, seja $U \in \mathcal{V}_e$. Então existe $V \in \mathcal{V}_e$, simétrica, tal que $V^2 \subseteq U$ e, portanto, se $x \in \overline{V}$ então $xV \cap V \neq \emptyset$. Logo existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $xv_1 = v_2$ e assim $x = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subseteq U$. Que G é de Hausdorff, segue do Lema 1 e do fato de todo espaço que satisfaz os axiomas T_3 e T_1 também satisfaz o axioma T_2. ■

As próximas duas seções mostram como "produzir"novos grupos topológicos a partir de um dado grupo topológico.

2.1. **Subgrupos.** A partir de agora, a menos de mensão em contrário, G denotará um grupo topológico verificando o axioma T_0. E assim, pelo Teorema 2, o espaço G é de Hausdorff. Nestas condições podemos usar a definição seguinte para espaços localmente compactos:

Definição. Um espaço topológico X é dito *localmente compacto* se todo ponto X admite uma vizinhança U tal que $\overline{U}$ é um subespaço compacto de X.

Como todo subgrupo de um grupo é também um grupo e a restrição de uma função contínua a um subespaço é ainda contínua, temos o seguinte resultado:

Proposição 2. *Seja H um subgrupo de G. Então o subespaço topológico H é também um grupo topológico.* ■

O próximo resultado será útil para mostrar, por exemplo, que o fecho de um subgrupo de G é também um subgrupo de G e, portanto, é também um grupo topológico.

Lema 2. *Sejam A e B subconjuntos de G. Então temos que:*

(i): $\overline{A}\,\overline{B} \subseteq \overline{AB}$; **(ii)** $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$; **(iii)** $x\bar{A}y = \overline{xAy}$, *para todo* $x, y \in G$;

(iv): *Se $ab = ba$ para todo $a \in A$ e $b \in B$, então $ab = ba$ para todo $a \in \overline{A}$ e $b \in \overline{B}$.* ■

Proposição 3. *Se H um subgrupo (normal) de G, então $\overline{H}$ é também um subgrupo (normal) de G. E se H for abeliano, então $\overline{H}$ também o é.*

Prova. Se H é um subgrupo de G, então $H^2 \subseteq H$, $H^{-1} \subseteq H$ e da parte (i) e (ii) do lema anterior, respectivamente, segue que $(\overline{H})^2 = \overline{H}\,\overline{H} \subseteq \overline{H^2} \subseteq \overline{H}$ e $(\overline{H})^{-1} = \overline{H^{-1}} \subseteq \overline{H}$. Que $\overline{H} \neq \emptyset$ segue da inclusão $H \subseteq \overline{H}$. No caso em que H é normal, temos da parte (iii) que $x\overline{H}x^{-1} = \overline{xHx^{-1}} = \overline{H}$, para todo $x \in G$. A última afirmação segue diretamente de (iv). ■

A próxima proposição mostra duas propriedades interessantes dos subgrupos de um grupo topológico.

Proposição 4. *Seja H um subgrupo de G. Então:*

- **(i):** *H é aberto se e somente se $\mathring{H} \neq \emptyset$*
- **(ii):** *Se H é aberto, então H é fechado.*

Prova.

- **(i):** Se $x \in \mathring{H}$, então existe uma vizinhaça U de e em G tal que $xU \subseteq H$. Assim, para todo $y \in H$, temos que $yU = yx^{-1}xU \subseteq yx^{-1}H = H$ e, portanto, H é aberto. Reciprocamente, se H é aberto, então $H = \mathring{H}$ e assim $\mathring{H}$ é não-vazio.
- **(ii):** Como H é subgrupo de G, então $G \setminus H = \bigcup\{xH : x \notin H\}$. Mas cada xH é aberto (pois H é aberto) e assim $G \setminus H$ é aberto em G. ■

Exemplo: O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um subgrupo fechado do grupo aditivo $\mathbb{R}$, com a topologia usual, mas **não** é aberto. Ou seja, em geral a recíproca do item (ii) da proposição acima não é verdadeira.

Mostraremos agora como gerar subgrupos *abertos-fechados* a partir de vizinhanças da identidade de um grupo topológico.

Proposição 5. *Seja U uma vizinhança simétrica de e em G. Então o conjunto $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ é subgrupo aberto-fechado de G.*

Prova. Note que $U \subseteq L$ e, assim, $L \neq \emptyset$. Além disso, se $x \in U^k$ e $y \in U^l$, então $xy^{-1} \in U^k(U^{-1})^l = U^kU^l = U^{k+l} \subseteq L$. Isso mostra que L é um subgrupo de G. Por outro lado, como $\mathring{U} \neq \emptyset$ e $U \subseteq L$, temos que L tem interior não vazio. Assim, pela parte (i) da proposição anterior L é aberto e pela parte (ii), L também é fechado. ■

Usaremos o lema seguinte para provar que todo subgrupo localmente compacto de um grupo topológico é fechado.

Lema 3. *Seja H um subgrupo de G e suponha que existe uma vizinhança U de $e \in G$ de modo que $\overline{U} \cap H$ é fechado em G. Então H é fechado em G.* ■

Teorema 3. *Se H um subgrupo localmente compacto de G, então H é fechado em G.*

Prova. Como H é localmente compacto, existe U vizinhaça de e tal que $\overline{U} \cap H$ é compacto em H e, portanto, compacto em G. Dado que G é Hausdorff, segue que $\overline{U} \cap H$ é fechado em G. E pelo lema anterior, temos que H é fechado em G. ■

Exemplo: Do teorema anterior segue que $\mathbb{Q}$, com a topologia usual, não é localmente compacto.

2.2. **Grupos Quocientes.** Assim como na seção anterior G denotará sempre um grupo topológico verificando o axioma T_0.

Seja H um subgrupo de G e $\varphi\colon G \to G/H$ a *aplicação natural* que associa a cada $x \in G$ o elemento xH de G/H. Definiremos uma topologia $\mathcal{O}$ sobre G/H da seguinte forma: um subconjunto $\{xH\colon x \in X\}$ de G/H é um elemento de $\mathcal{O}$ se e somente se $\varphi^{-1}(\{xH\colon x \in X\})$ é um aberto em G, ou seja, $\{xH\colon x \in X\} \in \mathcal{O}$ se e somente se $XH = \bigcup\{xH\colon x \in X\}$ é um aberto em G. Note que se H é aberto em G, então G/H é um espaço discreto, pois XH é aberto, qualquer que seja o subconjunto X de G.

Como $\{xH\colon x \in X\} = \{xH\colon x \in XH\}$, segue que os conjuntos abertos G/H tem a forma $\{uH\colon u \in U\}$, onde U é um aberto em G. Nestas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 4. *A família $\mathcal{O}$, como definida acima, é uma topologia para G/H e sobre essa topologia a aplicação natural $\varphi\colon G \to G/H$ é contínua. Além disso, $\mathcal{O}$ é a topologia* **mais fina** *para G/H sobre a qual φ é contínua.* ■

O espaço topológico $(G/H, \mathcal{O})$ é chamado de *espaço quociente* de G por H. A partir de agora, denotaremos tal espaço por G/H, omitindo o símbolo $\mathcal{O}$. Além disso, para um dado grupo topológico G e um subgrupo H de G, φ denotará sempre a aplicação natural de G em G/H.

Sabemos que se U é um aberto em G, então UH também é aberto em G e, assim, $\varphi(U) = \{uH\colon u \in U\}$ é aberto em G/H. Isto mostra que φ é aberta.

Analogamente ao que já vimos em G, as "translações" à esquerda, definidas por ${}_a\psi(xH) := (ax)H$, onde $a \in G$ e $xH \in G/H$, são homeomorfismos de G/H em G/H. De fato, fixado $a \in G$, a aplicação ${}_a\psi$ tem inversa ${}_{a^{-1}}\psi$ e, assim, é suficiente mostrar que ${}_a\psi$ é aberta. Para tanto, seja $\{uH\colon u \in U\}$ um aberto qualquer em G/H, onde U é um aberto em G. Então

$${}_a\psi(\{uH\colon u \in U\}) = \{(au)H\colon u \in U\} = \{vH\colon v \in aU\}$$

é um aberto em G/H, uma vez que aU é aberto em G.

Passaremos agora a algumas propriedades do espaço G/H. Comecemos com o seguinte lema:

Lema 4. *Sejam H um subgrupo de G, U e V vizinhanças de $e \in G$ tais que $V^{-1}V \subseteq U$. Então $\overline{\varphi(V)} \subseteq \varphi(U)$.*

Prova. Seja $xH \in \overline{\varphi(V)}$, qualquer. Como $\{(vx)H\colon v \in V\}$ é uma vizinhança de xH, então $\{(vx)H\colon v \in V\} \cap \varphi(V) \neq \emptyset$. Assim existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $v_1xH = v_2H$ e, portanto, $xH = v_1^{-1}v_2H \in \{wH\colon w \in V^{-1}V\} \subseteq \{uH\colon u \in U\} = \varphi(U)$. ■

Teorema 5. *Se H um subgrupo fechado de G, então G/H é um espaço Hausdorff que verifica o axioma T_3. Reciprocamente, se G/H é um espaço T_0, então H é fechado em G.*

Prova. Suponha que H é um subgrupo fechado de G. Então aH é fechado em G, para todo $a \in G$ e, assim, $G \setminus aH = \bigcup\{xH\colon xH \neq aH\}$ é aberto em G. Isto implica que o complemento de cada conjunto $\{aH\}$ em G/H é aberto em G/H e, portanto, $\{aH\}$ é fechado em G/H, para todo $a \in G$. Logo G/H satisfaz o axioma T_1. Seja agora

$\{uH : u \in U\}$ um vizinhança de H em G/H, onde U é um vizinhança de e em G. Então existe uma vizinhança (simétrica) V de e tal que $V^{-1}V = V^2 \subseteq U$ e, pelo Lema 4 segue que $\overline{\{vH : v \in V\}} = \overline{\varphi(V)} \subseteq \varphi(U) = \{uH : u \in U\}$. Usando o fato da "translação"à esquerda ${}_a\psi$ ser um homeomorfismo de G/H em G/H, para todo $a \in G$, mostra-se que essa propriedade pode ser estendida para todo elemento $aH \in G/H$. Portanto G/H satisfaz o axioma T_3 e por satisfazer T_1, segue que G/H é Hausdorff. Reciprocamente, se G/H satisfaz o axioma T_0, então usando novamente o Lema 4 tem-se que G/H é T_1 e, assim, $\{xH : xH \neq H\}$ é aberto em G/H. De onde segue que $H = G \setminus \bigcup\{xH : xH \neq H\}$ é fechado em G. ■

Podemos também relacionar a compacidade (ou a compacidade local) de G e G/H, como mostra os próximos resultados. Precisaremos do seguinte resultado:

Lema 5. *Seja X um espaço topológico que verifica o axioma T_3. Então o fecho de um subjconjunto compacto em X é ainda compacto.* ■

Teorema 6. *Seja G um grupo compacto (localmente compacto) e H um subgrupo de G. Então o espaço quociente G/H é compacto (localmente compacto).*

Prova. Se G é compacto, então G/H também é compacto, pois é a imagem contínua de um compacto. A segunda parte segue do fato da "translação"à esquerda ${}_a\psi(xH) := (ax)H$ ser um homeomorfismo e dos Lemas 4 e 5. ■

Antes de passarmos ao próximo resultado, daremos uma definição e dois lemas. Sejam (X, τ) e (Y, τ') dois espaços topológicos. Dizemos que uma função f de X em Y é *perfeita* se ela é **sobrejetora**, **contínua**, **fechada** e se $f^{-1}(\{y\})$ é **compacto** em X, para todo $y \in Y$. Nestas condições temos o seguinte resultado:

Lema 6. *Se $f : X \to Y$ é perfeita e Y é compacto, então X é compacto.* ■

Lema 7. *Se H é um subgrupo compacto de G, então a aplicação natural de G em G/H é fechada.* ■

Teorema 7. *Seja H um subgrupo de G. Se H e G/H são compactos, então G também é compacto.*

Prova. Se H é compacto, então a aplicação natural $\varphi : G \to G/H$ é fechada. Além disso, se $aH \in G/H$, com $a \in G$, então $\varphi^{-1}(\{aH\}) = aH$ é compacto em G, pois H é compacto $aH = {}_a\phi(H)$. Então φ é perfeita e nossa tese segue do Lema 6, pois G/H é compacto. ■

Antes de passarmos a construção de espaços *topologicamente desconexos*, é importante saber sob que condições o espaço quociente é um grupo topológico.

Teorema 8. *Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Então o espaço quociente $(G/H, \mathcal{O})$ é um grupo topológico.* ■

Além disso, sob certas condições temos uma versão do Segundo Teorema do Isomorfismo para grupos topológicos, como mostra o resultado seguinte.

Teorema 9. *Sejam G e $\widetilde{G}$ dois grupos topológicos. Seja $f\colon G \to \widetilde{G}$ um homomorfismo contínuo, aberto e sobrejetor. Então a aplicação $\Phi\colon \widetilde{G} \to G/\ker f$, definida por $\Phi(\tilde{x}) := f^{-1}(\{\tilde{x}\})$, é um homeomorfismo de grupos topológicos e um isomorfismo de grupos, onde o grupo $G/\ker f$ é dotado da topologia $\mathcal{O}$.*

Prova. O fato de Φ ser um isomorfismo de grupo segue diretamente da prova do Segundo Teorema do Isomorfismo (para grupos). Mostremos então que Φ é um homeomorfismo de espaços topológicos. Para tanto seja $\widetilde{U}$ um aberto em $\widetilde{G}$. Então $\Phi(\widetilde{U}) = \{f^{-1}(\{\tilde{u}\})\colon \tilde{u} \in \widetilde{U}\}$ é aberto em G/H, pois

$$\bigcup\{f^{-1}(\{\tilde{u}\})\colon \tilde{u} \in \widetilde{U}\} = f^{-1}\left(\bigcup\{\tilde{u}\colon \tilde{u} \in \widetilde{U}\}\right) = f^{-1}(\widetilde{U})$$

é aberto em G por f ser contínua. Isso mostra que Φ é aberta e, portanto, Φ^{-1} é contínua. Resta-nos, assim, verificar que Φ é contínua: denote $\ker f$ por H e considere $\{uH\colon u \in U\}$ um aberto em G/H, qualquer. Então

$$\Phi^{-1}(\{uH\colon u \in U\}) = \{\tilde{x} \in \widetilde{G}\colon (\exists u \in U)(f^{-1}(\tilde{x}) = uH)\} = \{f(u)\colon u \in U\} = f(U)$$

é aberto em $\widetilde{G}$, pois U é aberto em G e f é aberta. ■

Finalmente, veremos agora como construir espaços *totalmente desconexos* usando grupos topológicos quociente. Em suma, mostraremos que a componente conexa C da identidade de um grupo topológico G é um subgrupo normal G, para em seguida concluir que o grupo topológico G/C é *totalmente desconexo.*

Proposição 6. *Sejam G um grupo topológico e C a componente conexa da identidade $e \in G$. Então C é um subgrupo normal fechado de G.*

Prova. Como $e \in C$, então $C \neq \emptyset$. Além disso, dado que a inversão é um homeomorfismo de G em G, então C^{-1} é um conjunto conexo contendo e e, assim, $C^{-1} \subseteq C$. Se $a \in C$, então $a^{-1} \in C$ e, portanto, $aC = {}_a\phi(C)$ é um conexo contendo e, de modo que $aC \subseteq C$, para todo $a \in G$. De onde segue que $C^2 \subseteq C$. Portanto, C é um subgrupo de G. Para verificar que C é normal, basta observar que, para cada $a \in G$, $({}_a\phi \circ \phi_{a^{-1}})(C) = aCa^{-1}$ é um conjunto conexo contendo e. Finalmente, C é fechado em G, assim como todas as componentes conexas de um espaço topológico. ■

Como consequência dessa proposição, do Teorema 8 e do Teorema 5, segue que G/C é um grupo topológico Hausdorff verificando o axioma T_3, onde C é a componente conexa da identidade do grupo topológico G. Nestas mesmas condições, temos também que $aC = Ca$

(C é um subgrupo normal) é a componente conexa de a, para todo $a \in G$, pois $Ca = \phi_a(C)$ e homeomorfismos "preservam"componentes conexas.

Finalizaremos com o seguinte teorema:

Teorema 10. *Sejam G um grupo topológico e C a componente conexa da identidade $e \in G$. Então G/C é um grupo topológico Hausdorff, T_3 e totalmente desconexo.*

Prova. Pelo que já comentamos acima, é suficiente vefiricarmos que a componente conexa de C em G/C é o conjunto unitário $\{C\}$. Para tanto, seja $\{xC\colon x \in X\}$ um subconjunto de G/C contendo, propriamente, o conjunto $\{C\}$. Mostremos então que $\{xC\colon x \in X\}$ **não** é conexo em G/C. Seja $\varphi\colon G \to G/C$ a aplicação natural e $A \subseteq G$, qualquer. Então $\varphi(A \cap XC) = \varphi(A) \cap \{xC\colon x \in X\}$. De fato, se $tC \in \varphi(A) \cap \{xC\colon x \in X\}$, então existem $x \in X$ e $a \in A$ tais que $xC = tC = aC$ e, assim, $x^{-1}a \in C$, de onde segue que existe $c \in C$ tal que $a = xc \in A \cap XC$, ou seja, $tC = \varphi(a) \in \varphi(A \cap XC)$. A outra inclusão é imediata.

Como $\{xC\colon x \in X\}$ contém $\{C\}$, propriamente, então $XC = \bigcup\{xC\colon x \in X\}$ contém C propriamente. Logo, XC **não** é conexo em G, pois C é o maior conexo contendo e. Dessa forma, existem abertos U e V em G tais que $XC = (U \cap XC) \cup (V \cap XC)$, onde $U \cap V \cap XC = \emptyset$, $U \cap XC \neq \emptyset$ e $V \cap XC \neq \emptyset$. Assim

$$\{xC\colon x \in X\} = \varphi(XC) = [\varphi(U) \cap \{xC\colon x \in X\}] \cup [\varphi(V) \cap \{xC\colon x \in X\}]$$

onde $\varphi(U)$ e $\varphi(V)$ são abertos em G/C, pois φ é aberta. Como $U \cap XC \neq \emptyset$ e $V \cap XC \neq \emptyset$, então $\varphi(U) \cap \{xC\colon x \in X\} \neq \emptyset$ e $\varphi(V) \cap \{xC\colon x \in X\} \neq \emptyset$. Além disso, para cada $x \in X$, temos que $xC = (U \cap xC) \cup (V \cap xC)$ e como xC é conexo, e $U \cap xC$ e $V \cap xC$ são abertos (em xC) disjuntos, então ou $xC = U \cap xC \subseteq U \cap XC$ ou $xC = V \cap xC \subseteq V \cap XC$. Consequentemente, $U \cap XC$ e $V \cap XC$ são uniões de classes laterais de C e, portanto, $\varphi(U \cap XC) \cap \varphi(V \cap XC) = \emptyset$, ou seja, $\varphi(U) \cap \varphi(V) \cap \{xC\colon x \in X\} = \emptyset$. Portanto, $\{xC\colon x \in X\}$ **não** é conexo. ■

Exemplo: O grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*$, com a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$, é um grupo topológico (**não** conexo) e $C := \mathbb{R}^*_+$ é a componente conexa de $1 \in \mathbb{R}^*$. Então pelo teorema anterior, $\mathbb{R}^*/C$ é (um grupo topológico) totalmente desconexo.[2]

[2]Como neste caso C é aberto, então o espaço $\mathbb{R}^*/C$ é discreto e, assim, não precisaríamos do Teorema 10 para concluir que $\mathbb{R}^*/C$ é totalmente desconexo.