Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte
Diretoria Acadêmica de Ciências

Fundamentos de Álgebra I – 2016.1

Primeira Avaliação de Conhecimento (P1)

Nome Completo:	

Informações Importantes: **1.** Justifique suas respostas; **2.** Entregue a solução de uma, e de apenas uma, dentre as **Questões 2.A** e **2.B**; **3.** Cada uma das questões vale 15 pontos.

Questão 1. Quais dos conjuntos abaixo são grupos em relação à operação indicada?

(a) $(\mathbb{R}, \star)$; $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

(b) $(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, +)$; $+$ é a adição usual.

(c) $(\mathbb{R}, \Delta)$; $x \Delta y = x + y - 3$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Questão 2.A Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}_{13}^*$ são grupos em relação a multiplicação? **Obs.:** Lembre-se que a multiplicação em $\mathbb{Z}_{13}^*$ é definida por $\bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{x \cdot y}$.

(a) $A = \{\bar{1}, \overline{12}\}$ (b) $B = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$ (c) $C = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{12}\}$

Questão 2.B Mostre que o conjunto H das matrizes do tipo $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$, constitui um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ da matrizes reais inversíveis 2×2.

Questão 3. Mostre que todo grupo de ordem 2 ou 3 é cíclico.

Questão 4. Verifique em cada caso abaixo se f é um homomorfismo. Nos casos em que f é um homomorfismo, determine seu núcleo e decida se ele é injetor.

(a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = (x, 0)$, em que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ denotam grupos aditivos.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$, sendo $\mathbb{R}$ o grupo aditivo dos reais.

(c) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = 2^x$, em que $\mathbb{Z}$ é grupo aditivo e $\mathbb{R}_+^*$ é grupo multiplicativo.