



Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte
Diretoria de Educação e Ciências
Prof. Francisco Medeiros

PRIMEIRA AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTO

NOME COMPLETO:

INFORMAÇÕES IMPORTANTES: **1.** Justifique suas respostas; **2.** Entregue a solução de uma, e de apenas uma, dentre as **Questões 2.A** e **2.B**. O mesmo para as **Questões 3.A** e **3.B**; **3.** Cada uma das questões vale 22 pontos.

Questão 1. Quais dos conjuntos abaixo são grupos em relação à operação indicada?

- (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ é ímpar}\}$; multiplicação. (b) $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; adição.
(c) $C = \mathbb{R}$; $x \Delta y = x + y - 3$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Questão 2.A Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{Z}_{13} são grupos em relação a multiplicação? **Obs.:** Lembre-se que a multiplicação em \mathbb{Z}_{13} é definida por $\bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{x \cdot y}$.

- (a) $A = \{\bar{1}, \bar{12}\}$ (b) $B = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$ (c) $C = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$

Questão 2.B Mostre que o conjunto G das matrizes do tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e a e b não nulos simultaneamente, constitui um subgrupo do grupo $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$. **Obs.:** Lembre-se que $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ indica o grupo multiplicativo das matrizes reais inversíveis 2×2 .

Questão 3.A Seja G um grupo multiplicativo e seja a um elemento de G . Prove que o conjunto $N(a) = \{x \in G / ax = xa\}$ é um subgrupo de G .

Questão 3.B Prove que, se H_1 e H_2 são subgrupos de um grupo G , então $H_1 \cup H_2$ é um subgrupo de G se, e somente se, $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

Questão 4. Verifique em cada caso abaixo se f é um homomorfismo. Nos casos em que f é um homomorfismo, determine seu núcleo e decida se ele é injetor.

- (a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = kx$, sendo \mathbb{Z} o grupo aditivo dos inteiros e k um inteiro dado.
(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$, sendo \mathbb{R} o grupo aditivo dos reais.
(c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = 2^x$, em que \mathbb{Z} é grupo aditivo e \mathbb{R}_+^* é grupo multiplicativo.

Questão 5. Mostre que todo subgrupo $H \neq \{e\}$ de um grupo cíclico infinito é também infinito.