



Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte

Diretoria de Educação e Ciências
Prof. Francisco Medeiros

PROVA FINAL

NOME COMPLETO: _____

INFORMAÇÕES IMPORTANTES: **1.** Justifique suas respostas. Para isto, você pode fazer uso de quaisquer dos resultados demonstrados em sala de aula. **2.** Entregue a solução de uma, e de apenas uma, dentre as **Questões 5.A e 5.B.**

Questão 1. (20 pts) Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{Z}_{13} são grupos em relação a multiplicação?

Obs.: Lembre-se que a multiplicação em \mathbb{Z}_{13} é definida por $\bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{x \cdot y}$.

(a) $A = \{\bar{1}, \bar{12}\}$

(b) $B = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$

(c) $C = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$

Questão 2. (20 pts) Verifique em cada caso abaixo se f é um homomorfismo. Nos casos em que f é um homomorfismo, determine seu núcleo e decida se ele é injetor.

(a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = kx$, sendo \mathbb{Z} o grupo aditivo dos inteiros e k um inteiro dado.

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$, sendo \mathbb{R} o grupo aditivo dos reais.

Questão 3. (20 pts) Determine todos os subgrupos não triviais do grupo aditivo \mathbb{Z}_6 . Para cada subgrupo H encontrado, construa a tábua do grupo quociente \mathbb{Z}_6/H .

Questão 4. (20 pts) Construa as tábuas dos seguintes grupos quocientes:

(a) \mathbb{Z}_8/H , em que $H = \{0, 4\}$.

(b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Questão 5.A (20 pts) Seja $f: G \rightarrow G'$ um homomorfismo com núcleo H . Suponha que G é finito. Mostre que

$$\text{ordem de } G = (\text{ordem da imagem de } f) \cdot (\text{ordem de } H)$$

Questão 5.B (20 pts) Demonstre que, se H é um subgrupo normal de G e o índice de H em G é um número primo, então G/H é cíclico.