LISTA DE EXERCÍCIOS – PARTE II
ÁLGEBRA ABSTRATA – VERÃO 2012

PROF. FRANCISCO MEDEIROS

I. Grupo Quociente & Homomorfismos

(1) Se N é normal em G e $a \in G$ é de ordem $o(a)$, prove que a ordem de Na em G/N é um divisor de $o(a)$.

(2) Se N é um subgrupo normal de um grupo finito G tal que $(G : N)$ e $|N|$ são relativamente primos, prove que qualquer elemento $x \in G$ satisfazendo $x^{|N|} = e$ pertence a N.

(3) Seja G o conjunto de todas as matizes reais 2×2 da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, onde $ad \neq 0$, munido do produto usual de matrizes. Seja $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$. Prove que:

(a) N é um subgrupo normal de G.

(b) G/N é abeliano.

(4) Sejam $G = S_3 = \{e, f, g, g^2, fg, fg^2\}$ e $H = \{3, f\}$, onde $f, g \colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ são dadas por $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 1$. Defina a função $\phi \colon G \to H$ por $\phi(f^i g^j) = f^i$. Mostre que ϕ é um homomorfismo.

(5) Seja G o grupo multiplicativo dos números reais positivos e H o grupo aditivo dos números reais. Defina $\phi \colon G \to H$ por $\phi(x) = \log x$. Mostre que ϕ é um isomorfismo.

(6) Sejam G o grupo linear de ordem 2, $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, e $H = (\mathbb{R}^*, \cdot)$. Defina $\det \colon G \to H$ por $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Mostre que det é um homomorfismo sobrejetor.

(7) Verifique quais das aplicações a seguir são homomorfismos e nos casos em que elas forem homomorfismos, determine o núcleo.

(a) $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $\phi \colon G \to G$ dada por $\phi(x) = x^2$, para todo $x \in G$.

(b) $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $\phi \colon G \to G$ dada por $\phi(x) = 2^x$, para todo $x \in G$.

(c) $G = (\mathbb{R}, +)$ e $\phi \colon G \to G$ dada por $\phi(x) = x + 1$, para todo $x \in G$.

(d) $G = (\mathbb{R}, +)$ e $\phi \colon G \to G$ dada por $\phi(x) = 13x$, para todo $x \in G$.

(8) Sejam $\phi\colon G \to H$ e $\psi\colon H \to K$ homomorfismos. Mostre que $\psi \circ \phi\colon G \to K$ é um homomorfismo.

(9) Seja G um grupo qualquer e g um elemento fixado em G. Defina $\phi G \to G$ por $\phi(x) = gxg^{-1}$. Prove que ϕ é um isomorfismo de G em G.

(10) Sejam N e M dois subgrupos normais de um grupo G. Prove que NM/M é isomorfo a $N/(N \cap M)$.[1]

II. Números Inteiros - Visão Algébrica

(11) Prove que se $a, b \in \mathbb{Z}$ e se existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $ra + rb = 1$, então $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$.

(12) Decida quais dos seguintes subconjuntos J de $\mathbb{Z}$ abaixo são ideais de $\mathbb{Z}$:
- (a) $J = \{m \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{mdc}(7, m) = 1\}$.
- (b) $J = \{m \in \mathbb{Z} \mid m$ é um divisor de $24\}$.
- (c) $J = \{m \in \mathbb{Z} \mid 24$ é um divisor de $m\}$.
- (d) $J = \{m \in \mathbb{Z} \mid 21 \cdot m$ é divisível por $9\}$.

(13) Sejam I e J ideais de $\mathbb{Z}$. Prove que:
- (a) $I \cap J$ é um ideal de $\mathbb{Z}$.
- (b) $I + J := \{i + j \mid i \in I$ e $j \in J\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$.

(14) Identifique $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}_3 \cap \mathbb{Z}_4 = q \cdot \mathbb{Z}$.

(15) Seja J um ideal de $\mathbb{Z}$. Prove que se $1 \in J$, então $J = \mathbb{Z}$.

(16) Seja $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2},$ com $a, b \in \mathbb{Z}\}$. Defina $+$ e $\cdot$ em $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ como segue:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$$

Prove que: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,
- (a) $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ se e só se $a = c$ e $b = d$.
- (b) $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ é um domínio de integridade.

(17) Prove que para todo $m \in \mathbb{Z}$ tem-se $m^2 \equiv 0 \bmod 4$ ou $m^2 \equiv 1 \bmod 4$.

[1] Versão fraca do Segundo Teorema do Isomorfismo.

III. Anéis

Observação: A menos de mensão em contrário, R é um anel em todos os problemas.

(18) Verifique que são anéis os conjuntos definidos em aula.

(19) Prove que se $a, b \in R$, então $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$, onde x^2 significa xx.

(20) Se todo $x \in R$ satisfaz $x^2 = x$, prove que R é comutativo.

(21) Se R é um sistema que satisfaz todas as condições para um anel com elemento unidade com a possível exceção de $a + b = b + a$, demonstrar que o axioma $a + b = b + a$ vale necessariamente em R e que R é assim um anel. (Sugestão: desenvolva (a+b)(1+1) de duas formas. Se mesmo assim não conseguir, veja o link para uma solução: http://morfismo.wordpress.com/2008/06/28/comutatividade-da-adicao-em-aneis)

(22) Um anel de integridade D é dito de característica 0 se a relação $ma = 0$, onde $0 \neq a \in D$ e m é um inteiro, vale apenas se $m = 0$. D é dito de *característica finita* se para algum $a \neq 0$ em D e algum inteiro $m \neq 0$, $ma = 0$. A *característica* de D é, então, definida como sendo o menor inteiro positivo p tal que $pa = 0$ para algum $a \neq 0$ em D.[2] Prove que:
   (a) Se D é de característica p, então $px = 0$ para todo $x \in D$.
   (b) A característica de um anel de integridade ou é 0 ou é um número primo.

(23) Mostre que um anel comutativo D é um anel de integridade se, e somente se, para $a, b, c \in D$, com $a \neq 0$, a relação $ab = ac$ implica que $b = c$.

(24) Mostre que qualquer corpo é um anel de integridade.

IV. Homomorfismos, Ideais & Anéis Quocientes

(25) Se J é um ideal de R e $1 \in J$, demonstre que $J = R$.

(26) Se K é um corpo, demonstre que seus únicos ideais são $\{0\}$ e o próprio K.

(27) Demonstre que qualquer homomorfismo de um corpo é um monomorfismo ou leva todo elemento em 0.

(28) Se R é um anel comutativo e $a \in R$, mostre que $Ra := \{ra \mid r \in R\}$ e $aR := \{ar \mid r \in R\}$ são ideais (bilaterais) de R.

---

[2] Se $m > 0$, então $ma := a + a + \cdots + a$ [m parcelas]. Se $m < 0$, então $-m > 0$ e $ma := (-m)(-a) = (-a) + (-a) \cdots (-a)$ [$-m$ parcelas], onde $-a$ é o inverso aditivo de a. E se $m = 0$, então $ma = 0 \in R$.

(29) Dados I e J ideais de R, defina $I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$. Mostre que $I + J$ também é um ideal de R.

(30) Dado um ideal J de R, defina $r(J) := \{x \in R \mid xj = 0, \text{ para todo } j \in J\}$. Demonstre que $r(J)$ também um ideal de R.

(31) Dado um ideal J de R, defina $[R : J] := \{x \in R \mid rx \in J, \text{ para todo } r \in R\}$. Prove que $[R : J]$ é um ideal de R que contém J.

Se R é um anel qualquer, um subconjunto L de R é denominado um *ideal à esquerda* de R se:

(1) L é um subgrupo de R com relação à adição.

(2) $r \in R$, $a \in L$ implica que $ra \in L$.

(Pode-se definir analogamente um *ideal à direita*)

Assim, um ideal (bilateral) de R é ao mesmo tempo um *ideal à esquerda* e *à direita* de R.

(32) Mostre que $Ra := \{xa \mid x \in R\}$ é um ideal à esquerda de R, para todo $a \in R$.

(33) Se $a \in R$, defina $r(a) := \{x \in R \mid ax = 0\}$. Demonstre que $r(a)$ é um ideal à direita de R.

(34) Se R é um anel com 1 e ϕ é um homomorfismo de R num anel de integridade R' tal que $\ker \phi \neq R$, demonstre que $\phi(1)$ é o elemento unidade de R'.

(35) Seja R o anel de todas as funções contínuas, com valores reais, sobre o intervalo fechado $[0, 1]$, isto é, $R = \mathcal{C}([0, 1]) := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$. Se $\mathcal{M}$ é um ideal maximal de R, demonstre que existe um número real γ, $0 \leq \gamma \leq 1$, tal que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma := \{f \in R \mid f(\gamma) = 0\}$.