Matriz de uma Transformação Linear

Francisco Medeiros

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Diretoria Acadêmica de Ciências

Sumário

Objetivo

Dada uma transformação linear $T\colon U \to V$, entre espaços vetoriais finitamente gerados, pretendemos associar a T uma matriz A que auxilie no cálculo de $T(u)$, onde $u \in U$.

Objetivo

Dada uma transformação linear $T\colon U \to V$, entre espaços vetoriais finitamente gerados, pretendemos associar a T uma matriz A que auxilie no cálculo de $T(u)$, onde $u \in U$.

Exemplo

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y, z) = (2x - y, x + 3y - z)$.

Objetivo

Dada uma transformação linear $T\colon U \to V$, entre espaços vetoriais finitamente gerados, pretendemos associar a T uma matriz A que auxilie no cálculo de $T(u)$, onde $u \in U$.

Exemplo

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x - y, x + 3y - z)$. A expressão para $T(x,y,z)$ pode ser escrita na forma matricial

$$T(x,y,z) = (2x - y, x + 3y - z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Objetivo

Fica claro então que T pode ser *representada* pela matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, pois a partir dela conseguimos calcular T em qualquer elemento do $\mathbb{R}^3$.
Por exemplo, para calcularmos T no elemento $(1, -1, 3)$, basta efetuarmos o produto matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

e portanto $T(1, -1, 3) = (3, -5)$.

Objetivo

Queremos descrever um método mais geral para calcular uma matriz que *represente* uma dada transformação linear.

Objetivo

Queremos descrever um método mais geral para calcular uma matriz que *represente* uma dada transformação linear.
Para tanto, é importante observar que:

- Não precisamos nos restingir aos espaços $\mathbb{R}^n$, e sim trabalharmos com espaços finitamente gerados;

Objetivo

Queremos descrever um método mais geral para calcular uma matriz que *represente* uma dada transformação linear.
Para tanto, é importante observar que:

- Não precisamos nos restingir aos espaços $\mathbb{R}^n$, e sim trabalharmos com espaços finitamente gerados;
- Utilizando-se do conceito de coordenadas, estudado anteriormente, podemos trabalhar com quaisquer bases dos espaços envolvidos.

Exemplo

Seja $T\colon \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *a transformação linear dada por*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d) + (b+c+d)t + (2a+3b-c)t^2$$

Exemplo

Seja $T\colon \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *a transformação linear dada por*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d) + (b+c+d)t + (2a+3b-c)t^2$$

Se consideramos as bases canônicas de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respec. $B = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$, teremos

Exemplo

Seja $T\colon \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *a transformação linear dada por*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d) + (b+c+d)t + (2a+3b-c)t^2$$

Se consideramos as bases canônicas de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respec. $B = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$, teremos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a,b,c,d)_B \text{ e}$$

Exemplo

Seja $T\colon \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *a transformação linear dada por*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d) + (b+c+d)t + (2a+3b-c)t^2$$

Se consideramos as bases canônicas de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respec. $B = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$, teremos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b, c, d)_B \text{ e}$$

$T(a, b, c, d)_B = (a-d, b+c+d, 2a+3b-c)_C$.

A partir disso podemos escrever

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a-d \\ b+c+d \\ 2a+3b-c \end{pmatrix}_C .$$

A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}$$

irá então *representar* a transformação dada.

$$T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}_C = -2+3t-4t^2$$

$$T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}_C = -2 + 3t - 4t^2$$

Obs.: As colunas da matriz A são as coordenadas dos polinômios correspondentes a T calculados nos elementos da base B.

$$T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}_C = -2+3t-4t^2$$

Obs.: As colunas da matriz A são as coordenadas dos polinômios correspondentes a T calculados nos elementos da base B. De fato,

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1+2t^2 = (1,0,2)_C, \;\; T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = t+3t^2 = (0,1,3)_C$$

$$T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}_C = -2+3t-4t^2$$

Obs.: As colunas da matriz A são as coordenadas dos polinômios correspondentes a T calculados nos elementos da base B. De fato,

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1+2t^2 = (1,0,2)_C, \ \ T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = t+3t^2 = (0,1,3)_C$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t-t^2 = (0,1,-1)_C, \ \ T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1+t = (-1,1,0)_C$$

Pergunta

E o que aconteceria se estivéssemos trabalhando com outras bases dos espaços $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

Pergunta

E o que aconteceria se estivéssemos trabalhando com outras bases dos espaços $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

Resposta: Os números envolvidos seriam obviamente outros mas o procedimento é o mesmo.

Vamos agora formalizar as ideias discutidas acima.

- $T: U \to V$ uma transf. linear entre espaços vetoriais f.g.

Vamos agora formalizar as ideias discutidas acima.

- $T : U \to V$ uma transf. linear entre espaços vetoriais f.g.
- $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \cdots, v_m\}$ bases de U e V respec

Vamos agora formalizar as ideias discutidas acima.

- $T\colon U \to V$ uma transf. linear entre espaços vetoriais f.g.
- $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \cdots, v_m\}$ bases de U e V respec
- As colunas da matriz de T relativa às bases B e C são dadas pelas coordenadas dos valores $T(u_1), \cdots, T(u_n)$ com relação à base C:

Vamos agora formalizar as ideias discutidas acima.

- $T\colon U \to V$ uma transf. linear entre espaços vetoriais f.g.
- $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \cdots, v_m\}$ bases de U e V respec
- As colunas da matriz de T relativa às bases B e C são dadas pelas coordenadas dos valores $T(u_1), \cdots, T(u_n)$ com relação à base C:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} T(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & \cdots & + & a_{m1}v_m & & \text{(1.a coluna de A)} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ T(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & \cdots & + & a_{mn}v_m & & \text{(n.a coluna de A)} \end{array}\right.$$

Vamos agora formalizar as ideias discutidas acima.

- $T: U \to V$ uma transf. linear entre espaços vetoriais f.g.
- $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \cdots, v_m\}$ bases de U e V respec
- As colunas da matriz de T relativa às bases B e C são dadas pelas coordenadas dos valores $T(u_1), \cdots, T(u_n)$ com relação à base C:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} T(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & \cdots & + & a_{m1}v_m & & \text{(1.a coluna de A)} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ T(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & \cdots & + & a_{mn}v_m & & \text{(n.a coluna de A)} \end{array}\right.$$

A matriz A assim é obtida é chamada de **matriz de T com relação as bases B e C** e é denotada por $[T]_{B,C}$.

Teorema

Sejam $T : U \to V$ uma tranformação linear entre espaços f.g., e B e C bases de U e V respectivamente. A matriz $A = [T]_{B,C}$, como obtida acima, é a que ao ser multiplicada pelas coordenadas de um vetor $u \in U$ nos dá as coordenadas do elemento $T(u) \in V$.

Teorema

Sejam $T: U \to V$ uma tranformação linear entre espaços f.g., e B e C bases de U e V respectivamente. A matriz $A = [T]_{B,C}$, como obtida acima, é a que ao ser multiplicada pelas coordenadas de um vetor $u \in U$ nos dá as coordenadas do elemento $T(u) \in V$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_C,$$

onde $u = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_B$ e $T(u) = (b_1, \cdots, b_m)_C$.

Exemplo

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 3z)$ *e considere as bases* $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ *e* $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$*. Vamos calcular* $[T]_{B,C}$ *e* $[T]_{C,B}$*.*

Exemplo

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 3z)$ *e considere as bases* $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ *e* $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$*. Vamos calcular* $[T]_{B,C}$ *e* $[T]_{C,B}$*.*

$\star$ $[T]_{B,C}$

Exemplo

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y,z) = (2x-y, 2y-z, 3z)$ *e considere as bases* $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *e* $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. *Vamos calcular* $[T]_{B,C}$ *e* $[T]_{C,B}$.

$\star$ $[T]_{B,C}$

$$T(1,1,0) = (1,2,0) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 0(0,0,1) = (1,2,0)_C$$

Exemplo

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 3z)$ *e considere as bases* $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ *e* $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. *Vamos calcular* $[T]_{B,C}$ *e* $[T]_{C,B}$.

$\star$ $[T]_{B,C}$

$$T(1, 1, 0) = (1, 2, 0) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = (1, 2, 0)_C$$

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Exemplo

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y,z) = (2x-y, 2y-z, 3z)$ *e considere as bases* $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *e* $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. *Vamos calcular* $[T]_{B,C}$ *e* $[T]_{C,B}$.

$\star$ $[T]_{B,C}$

$$T(1,1,0) = (1,2,0) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 0(0,0,1) = (1,2,0)_C$$

$$T(1,0,1) = (2,-1,3) = 2(1,0,0) - 1(0,1,0) + 3(0,0,1) = (2,-1,3)_C$$

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ 2 & -1 & \\ 0 & 3 & \end{pmatrix}$$

Exemplo

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y,z) = (2x - y, 2y - z, 3z)$ *e considere as bases* $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *e* $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$*. Vamos calcular* $[T]_{B,C}$ *e* $[T]_{C,B}$*.*

$\star$ $[T]_{B,C}$

$$T(1,1,0) = (1,2,0) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 0(0,0,1) = (1,2,0)_C$$

$$T(1,0,1) = (2,-1,3) = 2(1,0,0) - 1(0,1,0) + 3(0,0,1) = (2,-1,3)_C$$

$$T(0,1,1) = (-1,1,3) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 3(0,0,1) = (-1,1,3)_C$$

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos que a matriz acima cumpre o que queríamos.

Verifiquemos que a matriz acima cumpre o que queríamos. Para tanto, note que

$$(x, y, z) = \left(\frac{x+y-z}{2}, \frac{x-y+z}{2}, \frac{-x+y+z}{2}\right)_B,$$

Verifiquemos que a matriz acima cumpre o que queríamos. Para tanto, note que

$$(x,y,z) = \left(\frac{x+y-z}{2}, \frac{x-y+z}{2}, \frac{-x+y+z}{2}\right)_B,$$

o que implica em

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2} \\ \frac{x-y+z}{2} \\ \frac{-x+y+z}{2} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2y-z \\ 3z \end{pmatrix}_C,$$

que é a regra dada inicialmente pela transformação T.

$\star$ $[T]_{C,B}$

$\star$ $[T]_{C,B}$

$$T(1,0,0) = (2,0,0) = 1(1,1,0) + 1(1,0,1) - 1(0,1,1) = (1,1,-1)_B$$

$\star$ $[T]_{C,B}$

$$T(1,0,0) = (2,0,0) = 1(1,1,0) + 1(1,0,1) - 1(0,1,1) = (1,1,-1)_B$$

$$T(0,1,0) = (-1,2,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})_B$$

$\star$ $[T]_{C,B}$

$$T(1,0,0) = (2,0,0) = 1(1,1,0) + 1(1,0,1) - 1(0,1,1) = (1,1,-1)_B$$

$$T(0,1,0) = (-1,2,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})_B$$

$$T(0,0,1) = (0,-1,3) = (-2,2,1)_B$$

$\star\ [T]_{C,B}$

$$T(1,0,0) = (2,0,0) = 1(1,1,0)+1(1,0,1)-1(0,1,1) = (1,1,-1)_B$$

$$T(0,1,0) = (-1,2,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})_B$$

$$T(0,0,1) = (0,-1,3) = (-2,2,1)_B$$

$$[T]_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\star\ [T]_{C,B}$

$$T(1,0,0) = (2,0,0) = 1(1,1,0)+1(1,0,1)-1(0,1,1) = (1,1,-1)_B$$

$$T(0,1,0) = (-1,2,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})_B$$

$$T(0,0,1) = (0,-1,3) = (-2,2,1)_B$$

$$[T]_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Como antes,

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} x + y/2 - 2z \\ x - 3y/2 + 2z \\ -x + 3y/2 + z \end{pmatrix}_B$$

Calculando a matriz $M_{B,C}$:

Calculando a matriz $M_{B,C}$:

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

Calculando a matriz $M_{B,C}$:

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$M_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Calculando a matriz $M_{B,C}$:

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$M_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Calculando a matriz $M_{B,C}$:

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$M_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando a matriz $M_{B,C}$:

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$(0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$M_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Calculando a matriz $M_{B,C}$:

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$(0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$M_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando a matriz $M_{B,C}$:

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$(0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$M_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e então

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{B,C} \begin{pmatrix} x + y/2 - 2z \\ x - 3y/2 + 2z \\ -x + 3y/2 + z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - z \\ 3z \end{pmatrix}_C .$$