Autovetores e Autovalores

Introdução à Álgebra Linear

Francisco Medeiros
homepage: http://docente.ifrn.edu.br/franciscomedeiros
e-mail: francisco.medeiros@ifrn.edu.br

Sumário

Motivação

Estudaremos essencialmente ...

Motivação

Estudaremos essencialmente ...

- Operadores lineares em espaços vetoriais de **dimensão finita**

Motivação

Estudaremos essencialmente ...

- Operadores lineares em espaços vetoriais de **dimensão finita**

Lembrete

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T : U \to U$ um operador linear. Vimos:

Motivação

Estudaremos essencialmente ...

- Operadores lineares em espaços vetoriais de **dimensão finita**

Lembrete

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon U \to U$ um operador linear. Vimos:

- como obter a matriz de T com relação a uma determinada base B de U;

Motivação

Estudaremos essencialmente ...

- Operadores lineares em espaços vetoriais de **dimensão finita**

Lembrete

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T: U \to U$ um operador linear. Vimos:

- como obter a matriz de T com relação a uma determinada base B de U;
- que a matriz $[T]_B$ é muito usada quando queremos fazer cálculos envolvendo T;

Motivação

Estudaremos essencialmente ...

- Operadores lineares em espaços vetoriais de **dimensão finita**

Lembrete

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T: U \to U$ um operador linear. Vimos:

- como obter a matriz de T com relação a uma determinada base B de U;
- que a matriz $[T]_B$ é muito usada quando queremos fazer cálculos envolvendo T;
- que a matriz $[T]$ muda quando mudamos a base.

Motivação

Meta

Motivação

Meta

- Procurar uma forma para a matriz de T de modo que facilite bastante os cálculos envolvendo T.

Motivação

Meta

- Procurar uma forma para a matriz de T de modo que facilite bastante os cálculos envolvendo T.

E como isto seria possível?

Motivação

Meta

- Procurar uma forma para a matriz de T de modo que facilite bastante os cálculos envolvendo T.

E como isto seria possível?

- Escolhendo uma base conveniente para U.

Motivação

Pela natureza da operação de multiplicação de matrizes, a forma **mais simples** que uma matriz poderia ter para facilitar tais cálculos, seria a forma **diagonal**:

Motivação

Pela natureza da operação de multiplicação de matrizes, a forma **mais simples** que uma matriz poderia ter para facilitar tais cálculos, seria a forma **diagonal**:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Motivação

Pela natureza da operação de multiplicação de matrizes, a forma **mais simples** que uma matriz poderia ter para facilitar tais cálculos, seria a forma **diagonal**:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Observação

Como veremos, dado um operador linear T, **nem sempre** conseguiremos uma base que dê à matriz de T uma forma tão simples.

Motivação

Suponhamos no entanto que, para um certo T, exista uma base $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ para U tal que $[T]_{B'}$ seja a matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Motivação

Suponhamos no entanto que, para um certo T, exista uma base $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ para U tal que $[T]_{B'}$ seja a matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Pergunta

Como se comportam os vetores dessa base em relação ao operador linear T?

Motivação

Suponhamos no entanto que, para um certo T, exista uma base $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ para U tal que $[T]_{B'}$ seja a matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Pergunta

Como se comportam os vetores dessa base em relação ao operador linear T?

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1, T(v_2) = \lambda_2 v_2, \dots, T(v_n) = \lambda_n v_n$$

Motivação

Example

Sendo $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (1,1,5)$ e $v_3 = (1,1,1)$, temos que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$; consideremos o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Motivação

Example

Sendo $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 5)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$, temos que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$; consideremos o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos determinar a matriz de T em relação à base B.
Trabalhando com a base canônica temos:

Motivação

Example

Sendo $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (1,1,5)$ e $v_3 = (1,1,1)$, temos que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$; consideremos o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos determinar a matriz de T em relação à base B.
Trabalhando com a base canônica temos:

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_1$$

Continuação do Exemplo

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_2$$

Continuação do Exemplo

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_2$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot v_3$$

Continuação do Exemplo

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_2$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot v_3$$

Então temos:

Continuação do Exemplo

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_2$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot v_3$$

Então temos:

$$T(v_1) \quad = \quad 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

Continuação do Exemplo

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_2$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot v_3$$

Então temos:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ T(v_2) &= 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \end{aligned}$$

Continuação do Exemplo

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_2$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot v_3$$

Então temos:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ T(v_2) &= 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ T(v_3) &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 6 \cdot v_3 \end{aligned}$$

Continuação do Exemplo

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_2$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot v_3$$

Então temos:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ T(v_2) &= 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ T(v_3) &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 6 \cdot v_3 \end{aligned} \quad \text{e} \quad [T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Motivação

Problema

A questão **importante** em relação a esse exemplo é a seguinte:

Motivação

Problema

A questão **importante** em relação a esse exemplo é a seguinte: como descobrir os escalares 2 e 6 e os vetores v_1, v_2 e v_3 a partir apenas da matriz de T dada inicialmente?

Motivação

Problema

A questão **importante** em relação a esse exemplo é a seguinte: como descobrir os escalares 2 e 6 e os vetores v_1, v_2 e v_3 a partir apenas da matriz de T dada inicialmente?

$\Longrightarrow$ Tentaremos responder a essa questão no decorrer das próximas aulas!

Definições e Exemplos

Problema

As considerações feitas até aqui, mostram que é importante estudar o seguinte problema:

Definições e Exemplos

Problema

As considerações feitas até aqui, mostram que é importante estudar o seguinte problema: sendo U um espaço vetorial e $T : U \to U$ um operador linear, procurar um vetor $v \in U$ tal que $T(v)$ seja um múltiplo do próprio v

Definições e Exemplos

Problema

As considerações feitas até aqui, mostram que é importante estudar o seguinte problema: sendo U um espaço vetorial e $T: U \to U$ um operador linear, procurar um vetor $v \in U$ tal que $T(v)$ seja um múltiplo do próprio v, ou seja, encontrar um $v \in U$ para o qual exista um $\lambda \in \mathbb{R}$ verificando $T(v) = \lambda \cdot v$.

Definições e Exemplos

Problema

As considerações feitas até aqui, mostram que é importante estudar o seguinte problema: sendo U um espaço vetorial e $T: U \to U$ um operador linear, procurar um vetor $v \in U$ tal que $T(v)$ seja um múltiplo do próprio v, ou seja, encontrar um $v \in U$ para o qual exista um $\lambda \in \mathbb{R}$ verificando $T(v) = \lambda \cdot v$.

Observação: $T(0) = 0 = \lambda \cdot 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. E assim eliminaremos esse caso *trivial* do nosso estudo.

Autovetor e Autovalor

Definição

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $T\colon U \to U$ um operador linear. Um **autovetor** (ou **vetor próprio**) de T é um vetor *não nulo* $v \in U$ tal que $T(v)$ é um múltiplo de v.

Autovetor e Autovalor

Definição

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $T \colon U \to U$ um operador linear. Um **autovetor** (ou **vetor próprio**) de T é um vetor *não nulo* $v \in U$ tal que $T(v)$ é um múltiplo de v.

Em outras palavras: $v \in U$ é um autovetor de T se:

Autovetor e Autovalor

Definição

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $T\colon U \to U$ um operador linear. Um **autovetor** (ou **vetor próprio**) de T é um vetor *não nulo* $v \in U$ tal que $T(v)$ é um múltiplo de v.

Em outras palavras: $v \in U$ é um autovetor de T se:

- $v \neq 0$; e

Autovetor e Autovalor

Definição

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $T: U \to U$ um operador linear. Um **autovetor** (ou **vetor próprio**) de T é um vetor *não nulo* $v \in U$ tal que $T(v)$ é um múltiplo de v.

Em outras palavras: $v \in U$ é um autovetor de T se:

- $v \neq 0$; e
- existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Autovetor e Autovalor

Definição

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $T\colon U \to U$ um operador linear. Um **autovetor** (ou **vetor próprio**) de T é um vetor *não nulo* $v \in U$ tal que $T(v)$ é um múltiplo de v.

Em outras palavras: $v \in U$ é um autovetor de T se:

- $v \neq 0$; e
- existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Nota

O escalar λ é chamado de **autovalor** (ou **valor próprio**) de T e dizemos que v é um autovetor de T *associado* ao autovalor λ.

Exemplos

Example

Exemplos

Example

1. No exemplo acima, temos que 2 e 6 são autovalores de T. Os vetores v_1 e v_2 são autovetores de T associados ao autovalor 2 e o vetor v_3 é autovetor de T associado ao autovalor 6.

Exemplos

Example

1. No exemplo acima, temos que 2 e 6 são autovalores de T. Os vetores v_1 e v_2 são autovetores de T associados ao autovalor 2 e o vetor v_3 é autovetor de T associado ao autovalor 6.
2. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y)=(x,-y)$. Encontre $[T]_{can}$. Calcule $T(2,3)$.

Exemplos

Example

1. No exemplo acima, temos que 2 e 6 são autovalores de T. Os vetores v_1 e v_2 são autovetores de T associados ao autovalor 2 e o vetor v_3 é autovetor de T associado ao autovalor 6.
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x, -y)$. Encontre $[T]_{can}$. Calcule $T(2, 3)$.
3. $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $R(x, y) = (-y, x)$, não possui autovalores.

Exemplos

Example

1. No exemplo acima, temos que 2 e 6 são autovalores de T. Os vetores v_1 e v_2 são autovetores de T associados ao autovalor 2 e o vetor v_3 é autovetor de T associado ao autovalor 6.
2. $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x, -y)$. Encontre $[T]_{can}$. Calcule $T(2, 3)$.
3. $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $R(x, y) = (-y, x)$, não possui autovalores.
4. $D\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, dado por $D(p(x)) = p'(x)$, tem $\lambda = 0$ como único autovalor.

Observações

Observações

- Se v é autovetor de T associado a $\lambda \in \mathbb{R}$ e também $T(v) = \mu v$, então $\lambda = \mu$.

Observações

- Se v é autovetor de T associado a $\lambda \in \mathbb{R}$ e também $T(v) = \mu v$, então $\lambda = \mu$.
- Se v é autovetor de T associado a $\lambda \in \mathbb{R}$, então av também é autovetor de T associado a λ, para todo $a \in \mathbb{R}^*$.

Observações

- Se v é autovetor de T associado a $\lambda \in \mathbb{R}$ e também $T(v) = \mu v$, então $\lambda = \mu$.
- Se v é autovetor de T associado a $\lambda \in \mathbb{R}$, então av também é autovetor de T associado a λ, para todo $a \in \mathbb{R}^*$.
- Suponha que $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \lambda v$. Então $T(u+v) = \lambda(u+v)$.

Observações

- Se v é autovetor de T associado a $\lambda \in \mathbb{R}$ e também $T(v) = \mu v$, então $\lambda = \mu$.
- Se v é autovetor de T associado a $\lambda \in \mathbb{R}$, então av também é autovetor de T associado a λ, para todo $a \in \mathbb{R}^*$.
- Suponha que $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \lambda v$. Então $T(u+v) = \lambda(u+v)$.

Notação

Sejam $T\colon U \to U$ um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$V(\lambda) := \{v \in U \mid T(v) = \lambda v\}$$

Subespaço Próprio

Subespaço Próprio

Proposição

Com relação ao subconjunto $V(\lambda)$ definido acima, temos que:

Subespaço Próprio

Proposição

Com relação ao subconjunto $V(\lambda)$ definido acima, temos que:

1. O vetor nulo de U sempre está em $V(\lambda)$.

Subespaço Próprio

Proposição

Com relação ao subconjunto $V(\lambda)$ definido acima, temos que:

1. O vetor nulo de U sempre está em $V(\lambda)$.
2. $V(\lambda)$ é o núcluo do operador $(T - \lambda Id)$.

Subespaço Próprio

Proposição

Com relação ao subconjunto $V(\lambda)$ definido acima, temos que:

1. O vetor nulo de U sempre está em $V(\lambda)$.
2. $V(\lambda)$ é o núcluo do operador $(T - \lambda Id)$.
3. $V(\lambda)$ é um subespaço vetorial de U.

Subespaço Próprio

Proposição

Com relação ao subconjunto $V(\lambda)$ definido acima, temos que:

1. O vetor nulo de U sempre está em $V(\lambda)$.
2. $V(\lambda)$ é o núcluo do operador $(T - \lambda Id)$.
3. $V(\lambda)$ é um subespaço vetorial de U.
4. λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\} \iff \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$

Subespaço Próprio

Proposição

Com relação ao subconjunto $V(\lambda)$ definido acima, temos que:

1. O vetor nulo de U sempre está em $V(\lambda)$.
2. $V(\lambda)$ é o núcluo do operador $(T - \lambda Id)$.
3. $V(\lambda)$ é um subespaço vetorial de U.
4. λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\} \iff \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$

Definição

Quando λ é um autovalor de T, o subespaço $V(\lambda)$ é chamado de **subespaço próprio** associado ao autovalor λ.

Exemplo

1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canôncia é

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Verifique que 3 e 1 são autovalores de T e ache os autovetores associados a eles. Verifique também que $(1, 1, 2)$ é autovetor de T.

Exercício Proposto

1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canôncia é

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique que 2 é autovalor de T e determine a dimensão do subespaço próprio $V(2)$.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Determinação de Autovetores e Autovalores

Objetivo

Determinar os autovalores de $T: U \to U$ quando U tem dimensão finita.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Objetivo

Determinar os autovalores de $T : U \to U$ quando U tem dimensão finita.

$\Longrightarrow$ Veremos que, neste caso, os autovalores do operador T são determinados como raízes de um certo polinômio.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T\colon U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T: U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

λ é autovalor de $T \iff$

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T : U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\}$

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T: U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\} \iff \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T\colon U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\} \iff \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Mas se U tem dimensão finita n, sabemos que

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T : U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\} \iff \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Mas se U tem dimensão finita n, sabemos que

$\ker(T - \lambda Id) \neq \{0\} \iff T - \lambda Id$ **não** é invertível

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T: U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\} \iff \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Mas se U tem dimensão finita n, sabemos que

$\ker(T - \lambda Id) \neq \{0\} \iff T - \lambda Id$ **não** é invertível

$\iff [T - \lambda Id]_B$ **não** é invertível para qualquer base B de U

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T: U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\} \iff \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Mas se U tem dimensão finita n, sabemos que

$\ker(T - \lambda Id) \neq \{0\} \iff T - \lambda Id$ **não** é invertível

$\iff [T - \lambda Id]_B$ **não** é invertível para qualquer base B de U

$\iff \det[T - \lambda Id]_B = 0$

Determinação de Autovetores e Autovalores

Vimos na proposição acima que se $T: U \to U$ é um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

λ é autovalor de $T \iff V(\lambda) \neq \{0\} \iff \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Mas se U tem dimensão finita n, sabemos que

$\ker(T - \lambda Id) \neq \{0\} \iff T - \lambda Id$ **não** é invertível

$\iff [T - \lambda Id]_B$ **não** é invertível para qualquer base B de U

$\iff \det[T - \lambda Id]_B = 0 \iff \det([T]_B - \lambda I_n) = 0.$

Determinação de Autovetores e Autovalores

Demonstramos o seguinte fato:

$\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $T \iff$ a função $p(t) := \det([T]_B - t \cdot I_n)$ se anula para $t = \lambda$.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Demonstramos o seguinte fato:

$\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $T \iff$ a função $p(t) := \det([T]_B - t \cdot I_n)$ se anula para $t = \lambda$.

Admitiremos o seguinte fato.

Proposição

Se $\dim U = n$, então $p(t) = \det([T]_B - t \cdot I_n)$ é uma funcão polinomial de grau n.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Example

Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dado por

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinação de Autovetores e Autovalores

Example

Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dado por

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

então $p(t) = \det([T]_{can} - t \cdot I_3) = -t^3 + 6t^2 - 4t - 9.$

Determinação de Autovetores e Autovalores

Example

Se $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dado por

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

então $p(t) = \det([T]_{can} - t \cdot I_3) = -t^3 + 6t^2 - 4t - 9$.

Definição

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, o polinômio de grau n $\det(A - t \cdot I_n)$ é chamado **polinômio característico** da matriz A. **Notação**: $p_A(t)$.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Resumo

As considerações feitas até aqui mostram que $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz do **poninômio característico** de $[T]_B$.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Resumo

As considerações feitas até aqui mostram que $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz do **poninômio característico** de $[T]_B$.

Questão natural

Qual a relação entre os polinômios característicos de $[T]_B$ e de $[T]_C$, onde B e C são duas bases de U?

Determinação de Autovetores e Autovalores

Resumo

As considerações feitas até aqui mostram que $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz do **poninômio característico** de $[T]_B$.

Questão natural

Qual a relação entre os polinômios característicos de $[T]_B$ e de $[T]_C$, onde B e C são duas bases de U?

Resposta: São iguais!

Determinação de Autovetores e Autovalores

Definição

Seja U um espaço vetorial de dimensão finita e $T: U \to U$ um operador linear. Chama-se **polinômio característico** de T, ao polonimômio característico de *qualquer* matriz que represente T em relação a alguma base para U.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Definição

Seja U um espaço vetorial de dimensão finita e $T: U \rightarrow U$ um operador linear. Chama-se **polinômio característico** de T, ao polonimômio característico de *qualquer* matriz que represente T em relação a alguma base para U.

Teorema

Sejam U e T como acima. O número real λ é autovalor de T se e somente se λ é raiz *real* do polinômio característico de T.

Determinação de Autovetores e Autovalores

Definição

Seja U um espaço vetorial de dimensão finita e $T: U \to U$ um operador linear. Chama-se **polinômio característico** de T, ao polonimômio característico de *qualquer* matriz que represente T em relação a alguma base para U.

Teorema

Sejam U e T como acima. O número real λ é autovalor de T se e somente se λ é raiz *real* do polinômio característico de T.

É importante observar que uma vez determinado um autovalor λ, os autovetores associados a λ são os vetores *não nulos* de $\ker(T - \lambda I)$.

1. Determinar os autovalores e autovetores do operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Use o polinômio característico para mostrar que a rotação $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $R(x, y) = (-y, x)$, não possui autovalores reais.

3. Determinar os autovalores e autovetores do operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -7 & -8 & -3 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Determinar os autovalores e autovetores do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Determinar os autovalores e autovetores do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 7 & -8 & -15 \\ -6 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

$\dim V$	**# raízes de $p_T(x)$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**

dim V	**# raízes de $p_T(x)$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim

dim V	**# raízes de $p_T(x)$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim

dim V	**# raízes de $\mathbf{p_T(x)}$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim
3	3	1 e 2	1 e 1	Não

dim V	**# raízes de $\mathbf{p_T(x)}$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim
3	3	1 e 2	1 e 1	Não
3	3	1 e 2	1 e 2	Sim

dim V	**# raízes de $\mathbf{p_T(x)}$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim
3	3	1 e 2	1 e 1	Não
3	3	1 e 2	1 e 2	Sim
3	1	1	1	Não

dim V	**# raízes de $p_T(x)$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim
3	3	1 e 2	1 e 1	Não
3	3	1 e 2	1 e 2	Sim
3	1	1	1	Não

Teorema

dim V	**# raízes de $p_T(x)$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim
3	3	1 e 2	1 e 1	Não
3	3	1 e 2	1 e 2	Sim
3	1	1	1	Não

Teorema

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T : U \to U$ um operador linear.

dim V	**# raízes de $\mathbf{p_T(x)}$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim
3	3	1 e 2	1 e 1	Não
3	3	1 e 2	1 e 2	Sim
3	1	1	1	Não

Teorema

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T : U \to U$ um operador linear. O operador T é **diagonalizável** *se e somente se:*

dim V	**# raízes de $p_T(x)$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim
3	3	1 e 2	1 e 1	Não
3	3	1 e 2	1 e 2	Sim
3	1	1	1	Não

Teorema

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T : U \to U$ um operador linear. O operador T é **diagonalizável** *se e somente se:*

1. *todas as raízes do polinômio característico de T são reais e, além disso,*

dim V	**# raízes de $p_T(x)$**	**m.a.**	**m.g.**	**diag.?**
2	2	1 e 1	1 e 1	Sim
3	3	1, 1 e 1	1, 1 e 1	Sim
3	3	1 e 2	1 e 1	Não
3	3	1 e 2	1 e 2	Sim
3	1	1	1	Não

Teorema

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T : U \to U$ um operador linear. O operador T é **diagonalizável** *se e somente se:*

1. *todas as raízes do polinômio característico de T são reais e, além disso,*
2. *cada autovalor de T tem a m.a.* **igual** *à m.g.*