Formas Bilineares

Introdução à Álgebra Linear

Francisco Medeiros
homepage: http://docente.ifrn.edu.br/franciscomedeiros
e-mail: francisco.medeiros@ifrn.edu.br

Sumário

Introdução

Por que estudar formas bilineares?

Introdução

Por que estudar formas bilineares?

- Reconhecimento de cônicas e superfícies em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Introdução

Por que estudar formas bilineares?

- Reconhecimento de cônicas e superfícies em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
- Possuem aplicações importantes em otimização e programação linear.

Definição

Definição

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma **forma bilinear** *sobre V é uma função $f : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz:*

Definição

Definição

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma **forma bilinear** *sobre V é uma função $f : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz:*

1. $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$
2. $f(a \cdot u, v) = a \cdot f(u, v)$

Definição

Definição

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma **forma bilinear** *sobre V é uma função $f : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz:*

1. $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$
2. $f(a \cdot u, v) = a \cdot f(u, v)$
3. $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$
4. $f(u, a \cdot v) = a \cdot f(u, v)$

Definição

Definição

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma **forma bilinear** *sobre V é uma função $f : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz:*

1. $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$
2. $f(a \cdot u, v) = a \cdot f(u, v)$
3. $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$
4. $f(u, a \cdot v) = a \cdot f(u, v)$

para todo $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$ e para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definição

Notação: Denotaremos por $\mathcal{B}(V)$ o conjunto de todas as formas bilineares de $V \times V$ em $\mathbb{R}$.

Definição

Notação: Denotaremos por $\mathcal{B}(V)$ o conjunto de todas as formas bilineares de $V \times V$ em $\mathbb{R}$.

Observação: $\mathcal{B}(V)$ é um espaço vetorial quando munido da soma usual de funções

$$(f+g)(u,v) := f(u,v) + g(u,v),$$

e pela multiplicação natural por escalar

$$(a \cdot f)(u,v) := a \cdot f(u,v)$$

Exemplos

Exemplo

Exemplos

Exemplo

1. *Seja* $\langle\,,\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$ *um produto interno sobre* V. *Então* $\langle\,,\rangle$ *é uma forma bilinear.*

Exemplos

Exemplo

1. *Seja* $\langle\,,\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$ *um produto interno sobre* V. *Então* $\langle\,,\rangle$ *é uma forma bilinear. Em particular, o produto interno usual sobre o* $\mathbb{R}^n$, $\langle(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1\cdot y_1+\cdots+x_n\cdot y_n$, *é uma forma bilinear sobre o* $\mathbb{R}^n$.

Exemplos

Exemplo

1. *Seja* $\langle \, , \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ *um produto interno sobre* V*. Então* $\langle \, , \rangle$ *é uma forma bilinear. Em particular, o produto interno usual sobre o* $\mathbb{R}^n$, $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n$, *é uma forma bilinear sobre o* $\mathbb{R}^n$*.*
2. *A função* $f \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 - 3x_1 y_2 + x_2 y_2$$

é uma forma bilinear.

Exemplos

Exemplo

1. *Seja* $\langle\, , \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ *um produto interno sobre* V. *Então* $\langle\, , \rangle$ *é uma forma bilinear. Em particular, o produto interno usual sobre o* $\mathbb{R}^n$, $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n$, *é uma forma bilinear sobre o* $\mathbb{R}^n$.
2. *A função* $f \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*
$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$
é uma forma bilinear.
3. *Sejam* $g_1, g_2 \colon V \to \mathbb{R}$ *duas transformações lineares. Então a função* $f \colon V \times V \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(u, v) := g_1(u) \cdot g_2(v)$, *para todos* $u, v \in V$, *é uma forma bilinear.*

Exemplos

Exemplo

4. *Sejam* V *um espaço euclidiano e* $T : V \to V$ *um operador linear. Então a função* $f : V \times V \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(u, v) := \langle T(u), v \rangle$, *é uma forma bilinear.*

Exemplos

Exemplo

4. *Sejam V um espaço euclidiano e $T: V \to V$ um operador linear. Então a função $f: V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(u, v) := \langle T(u), v \rangle$, é uma forma bilinear.*

5. *Sejam $V = \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $A \in \mathbf{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$. Então a função $f_A: V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $f_A(X, Y) = tr(X^t AY)$ é uma forma bilinear sobre V.*

Exemplos

Exemplo

4. *Sejam V um espaço euclidiano e $T: V \to V$ um operador linear. Então a função $f: V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(u, v) := \langle T(u), v\rangle$, é uma forma bilinear.*

5. *Sejam $V = \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $A \in \mathbf{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$. Então a função $f_A: V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $f_A(X, Y) = tr(X^t AY)$ é uma forma bilinear sobre V.*

6. *A função $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = 1$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$,* **não** *é uma forma bilinear.*

Matriz de uma Forma Bilinear

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita;

Matriz de uma Forma Bilinear

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita;
$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V

Matriz de uma Forma Bilinear

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita;
$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V, $f \in \mathcal{B}(V)$;

Matriz de uma Forma Bilinear

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita;
$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V, $f \in \mathcal{B}(V)$;
$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ e $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$ vetores de V.

Matriz de uma Forma Bilinear

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita;
$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V, $f \in \mathcal{B}(V)$;
$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ e $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$ vetores de V. Então

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j f(v_i, v_j)$$

Matriz de uma Forma Bilinear

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita;
$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V, $f \in \mathcal{B}(V)$;
$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ e $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$ vetores de V. Então

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j f(v_i, v_j)$$

Definição

Sejam V e B como acima. Para cada $f \in \mathcal{B}(V)$ definimos a **matriz de f em relação à base ordenada** *B como sendo a matriz $(f)_B = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ cujos elementos são dados por $a_{ij} = f(v_i, v_j)$.*

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

Se C *é a base canônica do* $\mathbb{R}^2$*, teremos então que:*

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

Se C *é a base canônica do* $\mathbb{R}^2$*, teremos então que:*

$$(f)_C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

Se C *é a base canônica do* $\mathbb{R}^2$, *teremos então que:*

$$(f)_C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pois

$$f((1,0),(1,0)) = 2 \quad f((1,0),(0,1)) = -3$$

$$f((0,1),(1,0)) = 0 \quad f((0,1),(0,1)) = 1$$

Proposição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então o espaço $\mathcal{B}(V)$ é isomorfo ao espaço $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então o espaço $\mathcal{B}(V)$ é isomorfo ao espaço $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Ideia da Prova.

Proposição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então o espaço $\mathcal{B}(V)$ é isomorfo ao espaço $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Ideia da Prova. Seja B uma base de V e considere a função $T\colon \mathcal{B}(V) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(f) = (f)_B$.

Proposição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então o espaço $\mathcal{B}(V)$ é isomorfo ao espaço $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Ideia da Prova. Seja B uma base de V e considere a função $T\colon \mathcal{B}(V) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(f) = (f)_B$. Então T é uma transformação linear e injetora.

Proposição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então o espaço $\mathcal{B}(V)$ é isomorfo ao espaço $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Ideia da Prova. Seja B uma base de V e considere a função $T\colon \mathcal{B}(V) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(f) = (f)_B$. Então T é uma transformação linear e injetora. Agora, para cada $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, podemos definir $f_A(u, v) = (u)_B^t \cdot A \cdot (v)_B$.

Proposição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então o espaço $\mathcal{B}(V)$ é isomorfo ao espaço $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Ideia da Prova. Seja B uma base de V e considere a função $T\colon \mathcal{B}(V) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(f) = (f)_B$. Então T é uma transformação linear e injetora. Agora, para cada $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, podemos definir $f_A(u, v) = (u)_B^t \cdot A \cdot (v)_B$. É fácil ver que f_A é uma forma bilinear e que $T(f_A) = (f_A)_B = A$ e, portanto, T é sobrejetora.

Proposição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Então o espaço $\mathcal{B}(V)$ é isomorfo ao espaço $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Ideia da Prova. Seja B uma base de V e considere a função $T\colon \mathcal{B}(V) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(f) = (f)_B$. Então T é uma transformação linear e injetora. Agora, para cada $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, podemos definir $f_A(u, v) = (u)_B^t \cdot A \cdot (v)_B$. É fácil ver que f_A é uma forma bilinear e que $T(f_A) = (f_A)_B = A$ e, portanto, T é sobrejetora.

Corolário

Se $\dim V = n$, *então* $\dim \mathcal{B}(V) = n^2$.

Matrizes Congruentes

Matrizes Congruentes

Definição

Duas matrizes X e Y de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ são ditas **congruentes** *se existe $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, invertível, de modo que $Y = P^t \cdot X \cdot P$.*

Matrizes Congruentes

Definição

Duas matrizes X e Y de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ são ditas **congruentes** *se existe $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, invertível, de modo que $Y = P^t \cdot X \cdot P$.*

Notação: $X \approx Y$

Matrizes Congruentes

Definição

Duas matrizes X e Y de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ são ditas **congruentes** *se existe $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, invertível, de modo que $Y = P^t \cdot X \cdot P$.*

Notação: $X \approx Y$

Exemplo

As matrizes $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ *são congruentes*

Matrizes Congruentes

Definição

Duas matrizes X e Y de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ são ditas **congruentes** *se existe $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, invertível, de modo que $Y = P^t \cdot X \cdot P$.*

Notação: $X \approx Y$

Exemplo

As matrizes $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ *são congruentes, pois* $Y = P^t X P$, *onde* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrizes Congruentes

Propriedades

Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrizes Congruentes

Propriedades

Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Então:

- $X \approx X$;

Matrizes Congruentes

Propriedades

Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Então:

- $X \approx X$; (reflexividade)

Matrizes Congruentes

Propriedades

Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Então:

- $X \approx X$; (reflexividade)
- $X \approx Y \Longrightarrow Y \approx X$;

Matrizes Congruentes

Propriedades

Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Então:

- $X \approx X$; (reflexividade)
- $X \approx Y \Longrightarrow Y \approx X$; (simetria)

Matrizes Congruentes

Propriedades

Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Então:

- $X \approx X$; (reflexividade)
- $X \approx Y \Longrightarrow Y \approx X$; (simetria)
- $X \approx Y$ e $Y \approx Z \Longrightarrow X \approx Z$;

Matrizes Congruentes

Propriedades

Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Então:

- $X \approx X$; (reflexividade)
- $X \approx Y \Longrightarrow Y \approx X$; (simetria)
- $X \approx Y$ e $Y \approx Z \Longrightarrow X \approx Z$; (transitividade)

Matrizes Congruentes

Propriedades

Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Então:

- $X \approx X$; (reflexividade)
- $X \approx Y \Longrightarrow Y \approx X$; (simetria)
- $X \approx Y$ e $Y \approx Z \Longrightarrow X \approx Z$; (transitividade)

Nota: " $\approx$ " é uma relação de equivalência sobre $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrizes Congruentes

Matrizes Congruentes

- V um espaço vetorial de dimensão finita n;

Matrizes Congruentes

- V um espaço vetorial de dimensão finita n;
- B e C duas bases para V;

Matrizes Congruentes

- V um espaço vetorial de dimensão finita n;
- B e C duas bases para V;
- $f \in \mathcal{B}(V)$;

Matrizes Congruentes

- V um espaço vetorial de dimensão finita n;
- B e C duas bases para V;
- $f \in \mathcal{B}(V)$;

Pergunta

Existe alguma relação entre as matrizes $(f)_B$ e $(f)_C$?

Matrizes Congruentes

- V um espaço vetorial de dimensão finita n;
- B e C duas bases para V;
- $f \in \mathcal{B}(V)$;

Pergunta

Existe alguma relação entre as matrizes $(f)_B$ e $(f)_C$?

Proposição

Nas mesmas condições acima, $(f)_C = P^t \cdot (f)_B \cdot P$, onde P é a matriz de mudança da base B para a base C.

Matrizes Congruentes

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Matrizes Congruentes

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Considere as bases $B = \{(1,0), (0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1), (0,2)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$*.*

Matrizes Congruentes

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Considere as bases $B = \{(1,0), (0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1), (0,2)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$. *Então teremos que:*

Matrizes Congruentes

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Considere as bases $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1),(0,2)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$. *Então teremos que:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrizes Congruentes

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Considere as bases $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1),(0,2)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$*. Então teremos que:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; (f)_B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes Congruentes

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Considere as bases $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1),(0,2)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$*. Então teremos que:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; (f)_B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; (f)_C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \; ;$$

Matrizes Congruentes

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Considere as bases $B = \{(1,0), (0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1), (0,2)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$*. Então teremos que:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; (f)_B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; (f)_C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \; ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Formas Bilineares Simétricas

Formas Bilineares Simétricas

Objetivo

Da mesma forma como fizemos em operadores lineares, estamos interessados em conseguir um base B de V tal que $(f)_B$ seja diagonal.

Definição e Exemplos

Definição e Exemplos

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V)$.

Definição e Exemplos

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V)$. Dizemos que f é **simétrica** *se $f(u, v) = f(v, u)$, para todos $u, v \in V$.*

Definição e Exemplos

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V)$. Dizemos que f é **simétrica** *se $f(u,v) = f(v,u)$, para todos $u, v \in V$.*

Exemplo

1. *Seja V um espaço euclidiano. Então $f : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $f(u,v) = \langle u, v \rangle$ é uma forma bilinear simétrica sobre V.*

Definição e Exemplos

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V)$. Dizemos que f é **simétrica** *se $f(u, v) = f(v, u)$, para todos $u, v \in V$.*

Exemplo

1. *Seja V um espaço euclidiano. Então $f : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \langle u, v\rangle$ é uma forma bilinear simétrica sobre V.*
2. *$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 + y_1x_2$ é uma forma bilinear simétrica.*

Definição e Exemplos

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V)$. Dizemos que f é **simétrica** *se $f(u, v) = f(v, u)$, para todos $u, v \in V$.*

Exemplo

1. *Seja V um espaço euclidiano. Então $f : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \langle u, v \rangle$ é uma forma bilinear simétrica sobre V.*
2. *$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 + y_1x_2$ é uma forma bilinear simétrica.*
3. *$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 - y_1x_2$* **não** *é uma forma bilinear simétrica.*

Lembrete: Uma matriz $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é dita simétrica se $A^t = A$.

Lembrete: Uma matriz $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é dita simétrica se $A^t = A$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita.

Lembrete: Uma matriz $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é dita simétrica se $A^t = A$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então $f \in \mathcal{B}(V)$ é **simétrica** *se e só se $(f)_B$ é uma* **matriz simétrica** *para alguma base ordenada B de V.*

Lembrete: Uma matriz $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é dita simétrica se $A^t = A$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então $f \in \mathcal{B}(V)$ é **simétrica** *se e só se $(f)_B$ é uma* **matriz simétrica** *para alguma base ordenada B de V.*

Nota importante: Da relação $Y = P^t \cdot X \cdot P$, para *matrizes congruentes*, segue que X é simétrica se e só se Y é simétrica.

Lembrete: Uma matriz $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é dita simétrica se $A^t = A$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então $f \in \mathcal{B}(V)$ é **simétrica** *se e só se $(f)_B$ é uma* **matriz simétrica** *para alguma base ordenada B de V.*

Nota importante: Da relação $Y = P^t \cdot X \cdot P$, para *matrizes congruentes*, segue que X é simétrica se e só se Y é simétrica. Em particular, $f \in \mathcal{B}(V)$ é simétrica se e só se sua representação matricial for simétrica para qualquer que seja a base considerada.

V um espaço vetorial de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V)$.

V um espaço vetorial de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V)$.

- Se existe uma base B de V tal que $(f)_B$ é uma matriz diagonal, então sabemos que f é simétrica.

V um espaço vetorial de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V)$.

- Se existe uma base B de V tal que $(f)_B$ é uma matriz diagonal, então sabemos que f é simétrica.
- Vale a recíproca?

V um espaço vetorial de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V)$.

- Se existe uma base B de V tal que $(f)_B$ é uma matriz diagonal, então sabemos que f é simétrica.
- Vale a recíproca?

Teorema

Seja $f : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Então existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal.

Prova do Teorema

Exemplo:

Prova do Teorema

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 - 2y_1y_2$$

Prova do Teorema

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 - 2y_1y_2$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, 2x - 2y)$. Então

$$(T)_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Prova do Teorema

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 - 2y_1y_2$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, 2x - 2y)$. Então

$$(T)_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle$.

Prova do Teorema

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 - 2y_1y_2$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, 2x - 2y)$. Então

$$(T)_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle$. Além disso, $B = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$ é base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ tal que

$$(f)_B = (T)_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prova do Teorema

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 - 2y_1y_2$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, 2x - 2y)$. Então

$$(T)_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle$. Além disso, $B = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$ é base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ tal que

$$(f)_B = (T)_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Caso $\dim V = 2$.

Corolário

Para toda matriz simétrica A existe uma matriz invertível P de modo que $P^t AP$ é uma matriz diagonal.

Corolário

Para toda matriz simétrica A existe uma matriz invertível P de modo que P^tAP é uma matriz diagonal.

Definição

Uma forma bilinear $f : V \times V \to \mathbb{R}$ se diz **anti-simétrica** *se $f(u, v) = -f(v, u)$, para todos $u, v \in V$.*

Corolário

Para toda matriz simétrica A existe uma matriz invertível P de modo que P^tAP é uma matriz diagonal.

Definição

Uma forma bilinear $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ se diz **anti-simétrica** *se $f(u,v) = -f(v,u)$, para todos $u, v \in V$.*

Exemplo

A função $g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1y_2 - y_1x_2$$

é uma forma bilinear anti-simétrica.