TEOREMA DA INVARIÂNCIA

PROF. FRANCISCO MEDEIROS

Introdução à Álgebra Linear - 2012.1
`http://docente.ifrn.edu.br/franciscomedeiros`
`Entregar na aula do dia 01/06/2012`

O objetivo principal dessa atividade é mostrar que num espaço vetorial, finitamente gerado, duas bases quaisquer têm o mesmo número de elementos. Esse resultado é conhecido como **Teorema da Invariância**. A demonstração deste resultado será divida em quatro etapas, onde três dessas etapas são compostas por lemas. Aqui, V denotará sempre um espaço vetorial finitamente gerado.

Lema 1. *Seja* $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *uma base do espaço* V*. Se* $u \in V$ *é tal que*

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_i u_i + \cdots + \alpha_n u_n \tag{1}$$

com $\alpha_i \neq 0$*, então o conjunto* $C = \{u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ *também é uma base do espaço* V*.*

Ideia da Prova: Para facilitar as contas suponha $i = 1$, ou seja, $\alpha_1 \neq 0$ em (1).

- Use (1) para escrever u_1 como combinação linear dos vetores $u, u_2, \ldots, u_n$;
- Dado $v \in V$, escreva ele como combinação linear do vetores da base B e use o item anterior para mostrar que v é combinação linear dos vetores $u, u_2, \ldots, u_n$;
- Conclua que V é gerado por $C = \{u, u_2, \ldots, u_n\}$;
- Suponha que exista uma combinição linear nula dos elementos de C. Use (1) e a hipótese $\alpha_1 \neq 0$, para concluir que os escalares da combinação linear nula dos elementos de C têm que ser todos iguais a zero;
- Conclua que C é uma base do espaço V. $\square$

O próximo lema nos diz que qualquer subconjunto **L.I.** de V com o mesmo número de vetores de uma dada base de V, gera V, ou seja, também é uma base de V.

Lema 2. *Suponhamos que exista uma base de* V *com* n *vetores. Neste caso, se* $B = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *é* **L.I.** *e possui* n *vetores, então* B *também é uma base de* V*.*

Ideia da Prova: Seja $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V.

- Escreva u_1 como combinação linear dos elementos de C;
- Verifique que existe algum escalar não nulo no item anterior.
- Suponha que o escalar não nulo obtido no item anterior é o coeficiente de v_1. Use o Lema 1 para concluir que $\{u_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V;
- Então u_2 é combinação linear dos vetores $u_1, v_2, \dots, v_n$, isto é, existem $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ em $\mathbb{R}$ tais que
$$u_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n.$$
Verifique que não podemos ter $\beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$;
- Suponha que $\beta_2 \neq 0$ na conclusão do item anterior e use o Lema 1, novamente, para mostrar que $\{u_1, u_2, v_3, \dots, v_n\}$ é também uma base para o espaço V;
- Conclua. $\square$

O próximo lema nos garante que nenhum subconjunto **L.I.** de um espaço vetorial, finitamente gerado, pode ter mais vetores que uma base desse espaço.

Lema 3. *Suponhamos que exista uma base de V com n vetores. Então todo subconjunto de V que seja* **L.I.** *tem no máximo n vetores.*

Ideia da Prova: Suponha que exista $S = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_t\} \subset V$ que tenha $t > n$ vetores e que seja **L.I.**

- Use o fato de subconjunto de conjunto **L.I.** ser também **L.I.** e o Lema 2 para concluir que $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V;
- Conclua que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\mathbb{R}$ tais que $u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$;
- Do item anterior conclua que o conjunto $B' = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ é **L.D.**;
- Finalmente, conclua que S é **L.D.** e que assim temos um absurdo. $\square$

Teorema da Invariância. *Duas bases quaisquer do mesmo espaço vetorial finitamente gerado têm o mesmo número de vetores.*

Ideia da Prova: Sejam $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ duas bases quaisquer de V.

- Aplique o Lema 3 a base B e ao conjunto C, que é **L.I.**, para concluir que $m \leq n$;
- Aplique o Lema 3 a base C e ao conjunto B, que é **L.I.**, para concluir que $n \leq m$;
- Conclua que $n = m$. $\square$