OPERADORES LINEARES DIAGONALIZÁVEIS

PROF. FRANCISCO MEDEIROS

Introdução à Álgebra Linear - 2012.1

http://docente.ifrn.edu.br/franciscomedeiros

Entregar na aula do dia 04/08/2012

O objetivo dessa atividade é *deduzir* as condições necessárias e suficientes para que um operador linear do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$ seja diagonalizável.

Os próximos exercícios, juntamente com os exemplos feitos em sala de aula[1], lhe ajudará a encontrar tais condições.

Exercícios Propostos

(1) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os *autovalores* de T.
- (b) Encontre os *subespaços próprios* associados aos valores determinado em (a).
- (c) Use os itens (a) e (b) para comparar as multiplicidades *algébrica* e *geométrica* de cada um dos autovalores de T.
- (d) O operador T é diagonalizável?

(2) Resolvas as mesmas questões do item (1) para o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 7 & -8 & -15 \\ -6 & 8 & 13 \end{bmatrix}.$$

(3) Quais são as condições necessárias e suficientes sobre a quantidade de **raízes** do polinômio característico, $p_T(x)$, de T e sobre as multiplicidades algébrica e geométrica dos **autovalores** de T para que esse operador seja diagonalizvél?

[1] Veja o anexo!

ANEXO

(1) Considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$. Então $p_T(x) = (x-3)(x-4)$ é o polinômio característico de T e, portanto, 3 e 4 são os *autovalores* de T e, além disso, os *subespaços próprios* são dados por:

$$V(3) = [(1,1)] \text{ e } V(4) = [(2,3)].$$

Logo $B = \{(1,1),(2,3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T. E assim temos que:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(2) Considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Então $p_T(x) = (1-x)(x-3)(x-9)$ é o polinômio característico de T e, portanto, $1, 3$ e 9 são os *autovalores* de T e, além disso, os *subespaços próprios* são dados por:

$$V(1) = [(3,3,-2)], V(3) = [(7,1,2)] \text{ e } V(9) = [(1,1,2)].$$

Logo $B = \{(3,3,-2),(7,1,2),(1,1,2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. E assim temos que:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(3) Considere o operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -7 & -8 & -3 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então $p_T(x) = (2-x)(x+3)^2$ é o polinômio característico de T e, portanto, 2 e -3 são os *autovalores* de T e, além disso, os *subespaços próprios* são dados por:

$$V(2) = [(1,-1,1)] \text{ e } V(-3) = [(1,-2,1)].$$

Note que neste exemplo **não** é possível encontrar uma base para o $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e, portanto, T não é diagonalizável.