Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte

Diretoria de Educação e Ciências
Prof. Francisco Medeiros

Lista 1 - Intodução à Álgebra Linear

1. Escreva as soluções do sistema
$$\begin{cases} x+2y-z+w-t &= 0 \\ x-y+z+3w-2t &= 0 \end{cases}$$
como combinações lineares de n-uplas ($n = 5$).

2. Escreva as soluções da equação $x - 3y - z + 2w = 0$ como combinações lineares de quádruplas de duas maneiras:
   (a) tirando x em função das outras incógnitas;
   (b) tirando y em função das outras incógnitas.

   A seguir, obtenha as soluções $(2, 1, 1, 1)$ e $(-3, 2, -5, 2)$ utilizando as expressões obtidas em (a) e (b).

3. Escreva todas as soluções da equação $y(t) = 3y'(t)$.

4. Determine uma solução da equação $y'(t) + 4y(t) = 0$ que verifique $y'(0) = 2$. Quantas soluções existem verificando esta condição?

5. Escreva todas as soluções da equação $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$.

6. No conjunto $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ definimos "adição" assim:
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, 0)$$
e multiplicação por escalar como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $a \in \mathbb{R}$,
$$a(x, y) := (ax, ay).$$
Nessas condições V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

7. No conjunto V do exercício anterior definimos a "adição" como o fazemos habitualmente no $\mathbb{R}^2$ e a multiplicação por escalares assim:
$$a(x, y) := (ax, 0).$$
É então V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

8. Considere a regra usual para somar vetores no $\mathbb{R}^2$ e o conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$. Vale a propriedade "$a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$"? Justifique. V é um espaço vetorial com as regras usuais para somar vetores e multiplicar vetor por escalar no $\mathbb{R}^2$?

9. Mostrar que todo espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. É verdade que todo espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$?

10. No espaço vetorial da matrizes $\mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, consideremos os vetores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcular $2A + B - 2C$;
   (b) Clacular $X \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\dfrac{A+X}{2} - \dfrac{X-B}{3} = C$;
   (c) Existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ de maneira que $A = t_1 B + t_2 A$?

11. No espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sejam dados os vetores $f(t) = t^3 - 1$, $g(t) = t^2 + t - 1$ e $h(t) = t + 2$.
   (a) Clacular $2f(t) + 3g(t) - 4h(t)$;
   (b) Existe $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $f(t) + k \cdot g(t) = h(t)$?
   (c) Existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = k_1 \cdot g(t) + k_2 \cdot h(t)$?

12. No $\mathbb{R}^2$ consideremos os vetores $u = (1,1)$, $v = (3,-2)$ e $w = (3,2)$. Resolver a equação $\dfrac{x+u}{2} + \dfrac{v+x}{3} = w$, na incógnita $x \in \mathbb{R}^2$.

13. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $0 \cdot v = 0$ para todo vetor $v \in V$.

14. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ um plano do $\mathbb{R}^3$ passando pela origem. Mostre que S é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

15. Descreva o espaço vetorial das soluções do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ 2x + 2y + 5z + 3w & = 0 \\ 4x + 4y + 10z + 3w & = 0 \end{cases}$$

16. Verifique que o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que têm derivada segunda e que verificam a equação $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$ é um espaço vetorial com as operações usuais. (*Nota*: As soluções dessa equação diferencial são obtidas no exercício 5)