Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte

Diretoria de Educação e Ciências
Prof. Francisco Medeiros

Lista 2 - Intodução à Álgebra Linear

1. Num espaço vetorial V, escreva os vetores u e v como combinações lineares de $3u - 2v$ e $2u + v$.

2. Sejam u e v dois vetores de um espaço vetorial V e seja $S \subset V$ o subconjunto formado por todas as combinações lineares de u e v. Mostre que S é um subespaço vetorial do espaço V.

3. Verifique que é um subespaço vetorial de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ o subconjunto $S = \{A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a_{12} = a_{21}\}$.

4. Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são subespaços do $\mathbb{R}^3$?

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$
   (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \text{ é irracional}\}$
   (d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3z = 0\}$

5. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços do espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios reais?

   (a) $W = \{f(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid f(t) \text{ tem grau maior que } 2\}$
   (b) $W = \{f(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid f(0) = 2f(1)\}$
   (c) $W = \{f(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$
   (d) $W = \{f(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid f(t) + f'(t) = 0\}$

6. Seja $I = [0, 1]$. Verificar se são subespaços vetoriais do espaço $\mathcal{C}(I)$ das funções contínuas de I em $\mathbb{R}$:

   (a) $\{f \in \mathcal{C}(I) \mid f(0) = 0\}$
   (b) $\{f \in \mathcal{C}(I) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$
   (c) $\{f \in \mathcal{C}(I) \mid f(0) = f(1)\}$

7. Sejam U, V e W os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}, \\ V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} \text{ e} \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

   Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3, U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em algum dos casos a soma é direta?

8. Mostrar que os polinômios $1 - t, (1 - t)^2, (1 - t)^3$ e 1 geram $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

9. Dar um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:
   (a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$
   (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$
   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$
   (d) $U \cap V$

10. Sejam U e V subespaços vetoriais do espaço W. Provar que:
    (a) $U \subset V \Longrightarrow U + V = V$
    (b) $U \subset V \Longrightarrow U \cap V = U$
    (c) $U + V = U \Longrightarrow V \subset U$
    (d) $U \cap V = U \Longrightarrow U \subset V$

11. Sejam u e v dois vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$. Se nãno existe nenhum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$, mostrar que $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos subespaços $[u]$ e $[v]$.

12. Verificar se as seguintes matrizes geram o espço vetorial $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. Mostrar que é subespaço de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ o subconjunto formado pelas matrizes anti-simétricas. Mostrar também que $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ é soma direta dos subespaços das matrizes simétricas e das anti-simétricas.

14. Mostrar que os dois conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

15. Mostrar com um exemplo que a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial não precisa ser um subespaço vetorial desse espaço.

16. Mostrar que a união de dois subespaços vetoriais do mesmo espaço é também um subespaço se, e somente se, um dos subespaços dados está contido no outro.

17. Mostrar que os dois subconjuntos abaixo formados de funções contínuas reais definidas em $\mathbb{R}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$:

$$\{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cdot \cos t\} \text{ e } \{1, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\}$$