INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR - 2012.1

PROF. FRANCISCO MEDEIROS

Equações Diferenciais - Parte II

Consideremos agora o seguinte problema: dados $p, q \in \mathbb{R}$, encontrar funções $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possuam derivada segunda e que verifiquem

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aqui vamos estudar apenas o caso em que esta equação pode ser escrita na forma

$$y''(t) - (a+b)y'(t) + aby(t) = 0, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(ou seja, a equação do segundo grau $x^2 + px + q = 0$ tem raízes reais a e b).

Esta última relação pode ser reescrita como

$$[y'(t) - ay(t)]' - b[y'(t) - ay(t)] = 0;$$

se a função $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica esta relação, chamando $u(t) := y'(t) - ay(t)$, obtemos da equação acima que $u'(t) - bu(t) = 0$, ou seja, $u'(t) = bu(t)$, donde, pelo exemplo feito em sala de aula, temos que $u(t) = Ae^{bt}$, com $A \in \mathbb{R}$ e então

$$Ae^{bt} = u(t) := y'(t) - ay(t), \text{ ou ainda } Ae^{(b-a)t} = e^{-at}[y'(t) - ay(t)],$$

donde, pela regra do produto para derivadas, segue que

$$[y(t)e^{-at}]' = Ae^{(b-a)t}. \tag{2}$$

Se $a \neq b$, integrando os dois lados da igualdade acima teremos

$$y(t)e^{-at} = \frac{A}{b-a}e^{(b-a)t} + B, \text{ com } B \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$y(t) = C_1e^{at} + C_2e^{bt}, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

onde $C_1 = B$ e $C_2 = A/(b-a)$. Vemos então que todas as soluções são "combinações lineares" das funções e^{at} e e^{bt}, que também são soluções da equção (1) (e^{at} é a solução obtida para $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$; analogamente para e^{bt}).

Se $a = b$, teremos $e^{(b-a)t} = e^{0t} = 1$ e então a equação (2) tornar-se

$$[y(t)e^{-at}]' = A,$$

e integrando os dois lados dessa igualdade obtemos

$$y(t)e^{-at} = At + B, \text{ com } B \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$y(t) = Ate^{at} + Be^{at},$$

e novamente todas as soluções são "combinações lineares" das duas soluções te^{at} e e^{at}.

Em qualquer dos dois casos ($a \neq b$ ou $a = b$) vemos que todas as soluções são escritas como "combinações lineares" de duas funções (soluções), analogamente ao que acontece em certos sistemas lineares (como, por exemplo, no sistema $x + 2y - z = 0$, feito em sala de aula).

Podemos concluir, com base nessas notas e no que foi trabalhado em sala de aula, que dois problemas, apesar de aparentemente serem de natureza completamente diferente, apresentam uma certa analogia no comportamento de suas soluções.

O que faz com que haja esta analogia é que ambos são problema lineares, num sentido que estudaremos já na próxima aula (25 de abril).