Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte
Diretoria de Educação e Ciências
Prof. Francisco Medeiros

Lista de Exercícios – Extra

0.1 Conjuntos Finitos

1. Seja X um conjunto finito. Mostre que uma função $f\colon X \to X$ é *injetiva* se, e somente se, é *sobrejetiva*.

2. Mostre que todo subconjunto de um conjunto finito também é finito.

3. Seja $X \subseteq \mathbb{N}$. Mostre que X é *finito* se, e somente se, é *limitado*.

0.2 Conjuntos Infinitos

1. Mostre que se $\mathbb{N}_1 := \mathbb{N} - \{1\}$, então a função $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$, definida por $\varphi(n) = n + 1$, é uma bijeção. Elabore e prove um resultado análogo para o conjunto $\mathbb{N}_p := \mathbb{N} - \{1, \ldots, p\}$, onde $p \in \mathbb{N}$.

2. Mostre que o conjunto dos números *ímpares positivos* e o conjunto dos *números naturais* são equivalentes.

3. Sejam P e I o conjunto dos *pares positivos* e o conjunto dos *ímpares positivos*, respectivamente. Assinale V para verdadeiro ou F para falso. Justifique!

   ( ) P e I são conjuntos finitos.
   ( ) $\mathbb{N} - P$ é um conjunto infinito.
   ( ) $\mathbb{N} - I$ é um conjunto infinito.
   ( ) $\mathbb{N} - \mathbb{N}_p$ é um conjunto finito.

0.3 Conjuntos Enumeráveis

Importante: Entregar os exercícios desta seção até às 18:00 do dia 29/10/2015 (quinta-feira), na CLIMAT. Isto significa, naturalmente, que esta atividade vale pontos. ;)

1. Sejam $f\colon X \to Y$ uma função *injetiva* e Y um conjunto *enumerável*. Mostre que X também é um conjunto enumerável.

2. Enuncie e demonstre o caso análogo para uma função *sobrejetiva*.

3. Mostre que é *injetiva* a função $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\varphi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Use isto e o Exercício 1, desta seção, para mostrar que o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto enumerável.

4. Sejam X e Y dois conjuntos enumeráveis. Mostre que o produto cartesiano $X \times Y$ também é um conjunto unumerável.

5. Mostre que é *bijetora* a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} \ , & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\frac{n}{2} \ , & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} .$$

   Conclua que $\mathbb{Z}$ é um conjunto enumerável.

6. Mostre que é *sobrejetora* a função $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ definida por $f(m,n) = \dfrac{m}{n}$. Conclua que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.