INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE
DEP. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I, 2012.1
PROF. FRANCISCO MEDEIROS

LIMITES

Introdução

O conceito de limite é o mais fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, pois é nele que se baseiam na Matemática atual as definições de convergência, divergência, continuidade, derivada e integral.

A falta de compreensão da noção de limite, no passado, levou a vários paradoxos, sendo os mais antigos que se tem notícia devidos a Zenão de Eléia, datando de aproximadamente 2.450 anos. Um dos problemas propostos por Zenão era equivalente ao seguinte:

Imagine que um atleta deva correr, em linha reta, de um ponto a outro distando 1km. Quando o atleta chegar na metade do caminho, ainda faltará 0,5 km para chegar ao seu destino. Quando ele percorrer a metade dessa metade do caminho, ainda faltará 0,25 km e quando percorrer a metade dessa distância ainda faltará 0,125 km e assim, sucessivamente. Repetindo esse raciocínio indefinidamente, argumentava Zenão, o atleta nunca chegaria ao destino, pois não importando a distância percorrida, sempre restaria alguma distância a ser percorrida.

Note que a distância que separa o atleta da sua meta se tornará *tão próxima de zero quanto ele quiser*, bastando para isso que ele repita os deslocamentos acima descritos um número suficientemente grande de vezes.

O paradoxo de Zenão só se sustentava pois não levava em conta o fator tempo, subjacente a qualquer movimento, e o fato de que, ao somar sucessivamente as distâncias percorridas,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

o resultado é limitado por 1 e dele se aproxima o quanto quisermos.

São essas ideias intuitivas de *estar tão próximo quanto se quiser que encerra o conceito de limite*.

Embora fundamental, esse conceito demorou mais de dois milênios para finalmente ser rigorosamente definido pelos matemáticos do século XIX.

Um pouco de história

A primeira vez em que se tem notícia do aparecimento da ideia de limite, foi por volta de 450 a.C. com os paradoxos de Zenão de Eléia. Em seguida, foi Eudoxo de Cnido (século IV a.C.) e, posteriormente, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) que utilizaram o chamado método de exaustão que, para calcular a área ou o volume de uma região, nela inscreviam uma sequência infinita de figuras de áreas ou volumes conhecidos e tal que a soma das áreas ou dos volumes dessas figuras *tendiam* à área ou volume da região. É essa noção de *tender* que está por trás do conceito de limite.

No século XVII vários matemáticos desenvolveram métodos algébricos para encontrar retas tangentes a determinadas curvas. Em cada um desses métodos o conceito de limite era utilizado, sem ser formulado explicitamente. Isaac Newton (1641-1727), em *Principia Mathematica*, foi o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite. No início do Livro I do Princípia, ele tenta dar uma formulação precisa para o conceito de limite. Por outro lado, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716),

LIMITES

que juntamente com Newton é considerado um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral, no seu tratamento do cálculo de áreas por meio da uniformização do método de exaustão, fazia uso da noção de somas de infinitésimos, ou seja, somas de séries.

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) foi o único matemático da sua época que reconheceu a centralidade do limite no Cálculo e afirmou que a definição apropriada do conceito de derivada requer primeiramente a compreensão de limite para o qual propôs uma definição.

Em 1812 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) deu o primeiro tratamento rigoroso para a noção de convergência de sequências e séries, ao realizar o estudo da série hipergeométrica, embora não utilizasse a terminologia de limite.

Finalmente, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), um dos grandes matemáticos franceses da primeira metade do século XIX, formulou as noções modernas de limite, continuidade e convergência de séries, obtendo resultados que marcaram uma nova era para a Análise Matemática.

No século XIX, por obra de Abel, Weierstrass, Riemann e outros, foi desenvolvida a teoria das funções analíticas, que faz uso de séries polinomiais convergentes para representar a importante classe das funções analíticas.

Fonte: Material de cálculo do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática)