Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte
Diretoria de Educação e Ciências
Prof. Francisco Medeiros

Lista 4 - Cálculo Diferencial e Integral I

1. Suponha que a função $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = -t^2 + 4t$ descreve o deslocamento de uma bola de basquete arremessada ao ar em função do tempo (o tempo marcado em segundos e a distância percorrida em metros). Calcule a velocidade instantânea dessa bola em $t_0 = 1$.

2. Usando a definição de derivada, calcule $f'(0)$ e $f'(x_0)$, onde $f(x) = 3x + 2$.

3. Usando a definição de derivada, calcule $f'(1)$ e $f'(x_0)$, onde $f(x) = x^2 + 1$.

4. Calcule $f'(a)$, pela definição, sendo dados:
   (a) $f(x) = x^2 + x$ e $a = 1$
   (b) $f(x) = 1/x$ e $a = 2$
   (c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $a = 3$
   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $a = 1$

5. Decida se alguma das funções abaixo são deriváveis no ponto a especificado:
   (a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$ em $a = 1$
   (b) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 2 \\ x^2/2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$ em $a = 2$.

6. Determine a equção da reta tangente ao ponto $(a, f(a))$ sendo dados:
   (a) $f(x) = x^2 + x$ e $a = 1$
   (b) $f(x) = 1/x$ e $a = 2$
   (c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $a = 3$
   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $a = 1$

7. Calcule $f'(x)$, pela definição, onde:
   (a) $f(x) = x^2 + x$
   (b) $f(x) = x^3$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
   (d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

8. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1) = 0$.

9. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1) > f'(0)$.

11. Seja $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
    (a) Mostre que g é derivável em $x_0 = 1$ e calcule $g'(1)$.
    (b) Esboce o gráfico de g.

12. Seja $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$
    (a) Esboce o gráfico de f.
    (b) f é derivável em $a = 0$? Em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

13. Construa uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua em $\mathbb{R}$ e que seja diferenciável em todos os pontos do conjunto $\mathbb{R} - \{1, 0, -1\}$.

14. Dê exemplo de uma função que é contínua em $a = 1$, mas não é diferenciável neste ponto.

15. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivavel num ponto $a \in (0, +\infty)$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

16. Verifique que a reta $y = -x$ é tangente ao gráfico da função f definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência.