Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte
Diretoria de Educação e Ciências
Prof. Francisco Medeiros

Lista 8 - Cálculo Diferencial e Integral I

1. Mostre que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:
   (a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)+\lambda$
   (b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \ln|x^2-1|+\lambda$
   (c) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}+\lambda$
   (d) $\displaystyle\int \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = \operatorname{sen}(x^2)+\lambda$
   (e) $\displaystyle\int 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \operatorname{sen}^2(x)+\lambda$

2. Encontre uma função primitiva para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por
$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{se } x\le 1\\ 1, & \text{se } x>1\end{cases}$$
(Note que a função f como definida acima é contínua.)

3. Calcule as seguintes integrais:
   (a) $\displaystyle\int [3e^x - \operatorname{sen}(x)]\,dx$
   (b) $\displaystyle\int [4x^3-8x^2+17x-3]\,dx$
   (c) $\displaystyle\int \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+x^2\right]dx$
   (d) $\displaystyle\int \left[\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}\right]dx$
   (e) $\displaystyle\int \left[\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+4\right]dx$
   (f) $\displaystyle\int -4x^2\sqrt[3]{x^2}\,dx$
   (g) $\displaystyle\int [5^x-\cos(x)]\,dx$
   (h) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4-1}\,dx$
   (i) $\displaystyle\int e^x\cdot\cos(x)\,dx$
   (j) $\displaystyle\int 7^x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx$
   (k) $\displaystyle\int 5^x\cdot e^x\,dx$
   (l) $\displaystyle\int x^3\cdot\cos(x^2)\,dx$
   (m) $\displaystyle\int x^n\cdot\ln(x)\,dx$
   (n) $\displaystyle\int x^3\cdot e^x\,dx$
   (o) $\displaystyle\int \cos^2(x)\,dx$
   (p) $\displaystyle\int x\cdot\cos(x)\,dx$

4. Calcule as seguintes integrais definidas:
   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot\cos(x)\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_1^4 -4x^2\sqrt[3]{x^2}\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x)\,dx$
   (d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\,dx$
   (e) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx$
   (f) $\displaystyle\int_1^2 \left[\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right]dx$
   (g) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^4-1)\,dx$
   (h) $\displaystyle\int_1^2 5^x\cdot e^x\,dx$

5. Seja $f\colon A\to\mathbb{R}$ uma função que admite primitivas e $[-a,a]\subset A$, onde $a>0$. Mostre que:
   (a) se f for uma função **par**, então
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$
   (b) se f for uma função **ímpar**, então
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

6. Use o exercício anterior para calcular as integrais definidas abaixo.
   (a) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^3\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_{-\pi/7}^{\pi/7}\operatorname{sen}(x)\,dx$
   (c) Sabendo que f é uma função par e que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=5$, determine o valor de $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

7. Desenhe as regiões determinadas pelos conjuntos abaixo e calcule as suas áreas:
   (a) $\{(x,y)\mid 0\le x\le 2 \ \text{ e }\ 1\le y\le 2^x\}$
   (b) $\{(x,y)\mid -1\le x\le 1 \ \text{ e }\ x^2-1\le y\le -x^2+1\}$

8. Calcule a área da região delimitada pelas retas $x=0$, $x=3\pi/2$, $y=0$ e o gráfico da função cosseno.

9. Desenhe a região (finita) delimitada pelos gráficos das funções $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=x^3$ e calcule sua área.

10. Suponha que a receita (em milhares de reais) de venda de *notebooks* de uma determinada marca seja dada por meio da função
$$p(t) = -\frac{t^2}{1000}+500t+10000$$
na qual t é o tempo medido em meses. Quanto se arrecadou após 3 anos?

11. Calcule as seguintes integrais indefinidas.
   (a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\,dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\,dx$
   (c) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}(x)\,dx$
   (d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\cdot\sec^2(x)\,dx$
   (e) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
   (f) $\displaystyle\int 2x\cdot\ln(x^2)\,dx$

12. Sabendo-se que $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg}(x) + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), calcule:

    (a) $\displaystyle\int \frac{1}{2+x^2}\,dx$

    (b) $\displaystyle\int \frac{3}{2+5x^2}\,dx$

    (c) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

13. Ache a área da região delimitada pelas retas $x=-1$, $x=1$, $y=0$ e pelo gráfico de $f(x) = x/(x^2+3)$.

14. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

    (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$

    (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$

    (c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-9}\,dx$

    (d) $\displaystyle\int \frac{5x^2+1}{x-1}\,dx$

    (e) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)^2}\,dx$

    (f) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-2)^3}\,dx$

    (g) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x}\,dx$