Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia
Rio Grande do Norte
Diretoria de Educação e Ciências
Prof. Francisco Medeiros

Lista 2 - Cálculo Diferencial e Integral I

1. Seja
$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$
   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.
   (c) Esboce o gráfico de f.

2. Prove, usando ε's e δ's, que a função dada é contínua no ponto dado.
   (a) $f(x) = 4x - 3$ em $a = 2$
   (b) $f(x) = x + 1$ em $a = 1$

3. A função $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 1 \\ 2x, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ é contínua em 1? Justifique.

4. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$, que não seja contínua em 3, mas que $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$.

5. Seja
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}, & \text{se } x \neq -3 \\ k, & \text{se } x = -3 \end{cases}$$
   Determine o valor k de modo que $f(-3) = \lim_{x \to -3} f(x)$.

6. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.
   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $a = 2$
   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $a = 0$

7. Calcule:
   (a) $\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 1}{x + 1}}$
   (b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x + 7} - 2}{x - 1}$
   (c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 - 1}$

8. Seja f definida em $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Calcule:
   (a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$
   (b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$

9. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e seja a um número real dado. Suponha que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$
   Calcule os limites abaixo (em função de L):
   (a) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$
   (b) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + 3h) - f(a)}{h}$

10. Calcule $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) \cdot g(x)$, onde $g(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x > 1 \\ -1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

11. Calcule $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) \cdot g(x)$, onde $g(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x > 1 \\ -1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

12. Dada a função f definida em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \neq 1$,
$$-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$
   calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$ e justifique..

13. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|$ para todo x. Use o **Teorema do Confronto** para mostrar que f é contínua em a.

14. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo x, $|f(x) - 3| \leq 2|x - 1|$. Sabendo que f é contínua em 1, determine o valor de $f(1)$.