Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Seminário: A Arte de Demonstrar
Probleminhas Pra Pensar

Prof. Francisco Medeiros

1. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Responda às seguintes perguntas, justificando sua resposta:

   - Se você não conhece os números m e n, e alguém afirma "$m > 0$ **ou** $n > 0$", então pode-se concluir que:
     (a) m pode ser negativo?
     (b) n pode ser negativo?
     (c) m pode ser negativo ou zero?
     (d) n não pode ser negativo?

   - E se a pessoa diz "$m > 0$ **e** $n < 0$", então:
     (a) m ou n podem ser nulos?
     (b) m e n podem ser nulos?
     (c) m ou n podem ser positivos?
     (d) m pode ser negativo ou nulo ou n pode ser positivo?

2. Reescreva a proposição abaixo usando, primeiramente, os termos *condição necessária*, e depois, usando os termos *condição suficiente*.

   - Se dois números inteiros terminarem em 6, então o mesmo ocorre com seu produto.

3. Três professores, Léo, Robson e Jaquelline, ensinam apenas uma disciplina dentre as de Lógica, Cálculo e Análise Combinatória.

   Certa ocasião, foram abordados por uma aluna caloura querendo saber qual deles era seu(ua) professor(a) de Lógica. Para a aluna já começar treinando o raciocínio lógico, combinaram que cada um diria uma frase. Apenas uma das frases era verdadeira, e com isso a aluna deveria deduzir quem era o(a) professor(a) que procurava. As frases foram:

   Robson: *Léo é o professor de Cálculo.*

   Jaquelline: *Robson não é o professor de Cálculo.*

   Léo: *Jaquelline não é a professora de Análise Combinatória.*

   Observação: Apesar de possíveis coincidências com a realidade, este problema pode ser apenas uma "obra de ficção".

4. Para resolver a equação $\sqrt{x} = x - 2$, com $x \in \mathbb{R}$, procede-se assim:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4 \Rightarrow x \in \{1, 4\}$$

Pergunta-se:

(a) O conjunto solução da equação dada é $\{1, 4\}$? Em caso negativo, descubra o conjunto solução.

(b) Vale a recíproca de todas as implicações? Em caso negativo, quais delas não são válidas?

(c) O que exatamente a sequência de implicações, acima, mostra?

5. O propósito deste exercício é mostrar que devemos ter cuidado na representação dos números.

A experiência nos induz a aceitar a validade da seguinte proposição:

Proposição 1 *A soma de um número par com um número ímpar resulta em um número ímpar.*

Considere a seguinte "demonstração" desse fato dada por um calouro, estudante de Matemática.

"Demonstração": dados um número par e outro ímpar, eles são, respectivamente, da forma $2k$ e $2k+1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$2k + (2k+1) = 4k + 1 = 2(2k) + 1 = 2m + 1, \quad \text{onde } m = 2k \in \mathbb{Z}.$$

Das últimas igualdades, concluímos que a soma de número par com um número ímpar é um número ímpar, como queríamos demonstrar. $\square$

Analise a "demonstração" anteiror e responda:

(a) Ela mostra, por exemplo, que 4+5 é um número ímpar? Por quê?

(b) Ela mostra, por exemplo, que 4+7 é um número ímpar? Por quê?

(c) Onde está o erro na "demonstração"? O que o calouro realmente demonstrou?

(d) Agora, dê uma demonstração de verdade para a proposição enunciada no começo do exercício.