A Arte de Demonstrar

Prof. Dr. Francisco Medeiros

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Diretoria Acadêmica de Ciências

"Nenhuma investigação feita pelo homem pode ser chamada realmente de ciência se não puder ser demonstrada matematicamente."
Leonardo da Vinci (1452-1519)

Sumário

CONTEÚDO

- Apresentação
- Pensando Logicamente
- Definições, Teoremas e Demonstrações
- Técnicas de Demonstrações

CRONOGRAMA

- **20/fev**: Apresentação

CARGA HORÁRIA

CONTEÚDO

- Apresentação
- Pensando Logicamente
- Definições, Teoremas e Demonstrações
- Técnicas de Demonstrações

CRONOGRAMA

- **20/fev**: Apresentação
- **27/fev**: Sentenças Matemáticas & Teoremas

CARGA HORÁRIA

CONTEÚDO

- Apresentação
- Pensando Logicamente
- Definições, Teoremas e Demonstrações
- Técnicas de Demonstrações

CRONOGRAMA

- **20/fev**: Apresentação
- **27/fev**: Sentenças Matemáticas & Teoremas
- **06/mar**: Técnicas de Demonstração

CARGA HORÁRIA

CONTEÚDO

- Apresentação
- Pensando Logicamente
- Definições, Teoremas e Demonstrações
- Técnicas de Demonstrações

CRONOGRAMA

- **20/fev**: Apresentação
- **27/fev**: Sentenças Matemáticas & Teoremas
- **06/mar**: Técnicas de Demonstração
- **14/mar**: Atividade

CARGA HORÁRIA

CONTEÚDO

- Apresentação
- Pensando Logicamente
- Definições, Teoremas e Demonstrações
- Técnicas de Demonstrações

CRONOGRAMA

- **20/fev**: Apresentação
- **27/fev**: Sentenças Matemáticas & Teoremas
- **06/mar**: Técnicas de Demonstração
- **14/mar**: Atividade
- **20/mar**: Discussão da Atividade & Fechamento

CARGA HORÁRIA

CONTEÚDO

- Apresentação
- Pensando Logicamente
- Definições, Teoremas e Demonstrações
- Técnicas de Demonstrações

CRONOGRAMA

- **20/fev**: Apresentação
- **27/fev**: Sentenças Matemáticas & Teoremas
- **06/mar**: Técnicas de Demonstração
- **14/mar**: Atividade
- **20/mar**: Discussão da Atividade & Fechamento

CARGA HORÁRIA

- 10 h/a (certificados: mínimo de 75% de frequência)

BIBLIOGRAFIA

- **Revista do Professor de Matemática** (vários números), SBM.

BIBLIOGRAFIA

- **Revista do Professor de Matemática** (vários números), SBM.
- **Um Convite à Matemática**. Daniel C. de Morais Filho – Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.

BIBLIOGRAFIA

- **Revista do Professor de Matemática** (vários números), SBM.
- **Um Convite à Matemática**. Daniel C. de Morais Filho – Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.
- **How to Think Like a Mathematican**. Kevin Houston – Cambridge University Press, 2009.

BIBLIOGRAFIA

- **Revista do Professor de Matemática** (vários números), SBM.
- **Um Convite à Matemática**. Daniel C. de Morais Filho – Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.
- **How to Think Like a Mathematican**. Kevin Houston – Cambridge University Press, 2009.
- **Book of Proof**. Richard Hammack – `www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof`, ed. 1.3, Creative Commons, 2009.

BIBLIOGRAFIA

- **Revista do Professor de Matemática** (vários números), SBM.
- **Um Convite à Matemática**. Daniel C. de Morais Filho – Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.
- **How to Think Like a Mathematican**. Kevin Houston – Cambridge University Press, 2009.
- **Book of Proof**. Richard Hammack – `www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof`, ed. 1.3, Creative Commons, 2009.
- **On Proof and Progress in Mathematics**. William P. Thurston – Bulletin of the AMS, volume 30, n. 2, 1994.

- ~ 2500 a.C.: Egípcios e mesopotâmicos: a matemática era uma coleção de regras para resolver problemas práticos.

- ~ 2500 a.C.: Egípcios e mesopotâmicos: a matemática era uma coleção de regras para resolver problemas práticos.
- ~ 600 a.C.: Influência (dos filósofos Tales e Pitágoras) grega fez da matemática uma ciência. A noção de que um *fato matemático* pode ser *demonstrado* é fruto da interação entre matemática e filosofia.

- ~ 2500 a.C.: Egípcios e mesopotâmicos: a matemática era uma coleção de regras para resolver problemas práticos.
- ~ 600 a.C.: Influência (dos filósofos Tales e Pitágoras) grega fez da matemática uma ciência. A noção de que um *fato matemático* pode ser *demonstrado* é fruto da interação entre matemática e filosofia.
- ~ 300 a.C.: Em "Os Elementos" de Euclides as hipóteses fundamentais passaram a ser enunciadas de maneira sistemática. Por exemplo, no *Livro I* são definidos os **objetos**: *ponto*, *reta*, *plano* etc. Em seguida os **axiomas** (verdades primitivas): "por dois pontos passa uma e apenas uma reta". definições $+$ axiomas $+$ argumentos $\rightarrow$ resultados mais complexos.

Matemática Moderna

A *matemática moderna* está preocupada com **sentenças** (ou **afirmações**) sobre **objetos matemáticos**.

São exemplos de objetos matemáticos:

- números inteiros, racionais, reais etc
- conjuntos
- funções
- ponto, reta, plano etc

São exemplos de sentenças matemáticas:

- Existem infinitos números primos.
- Para todo real a, a equação $x^2 + a = 0$ tem uma raiz real.
- $\sqrt{2}$ é um número irracional.

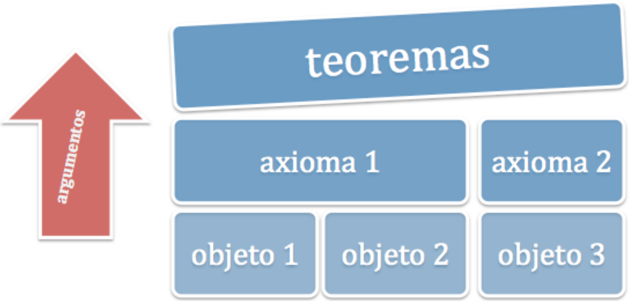

Figura : Estrutura Básica da Matemática Moderna

"É justamente quando entram na universidade que a maioria de nossos alunos se chocam ao se deparar com o **formalismo** e a **abstração** que requerem algumas das primeiras disciplinas de Matemática. O choque decorre, principalmente, de carências na formação dos alunos, de seus professores e de um Ensino Médio que, na maioria das vezes, não lhes fornece um preparo adequado e nem lhes treina para usar o **raciocínio lógico dedutivo** que posteriormente lhes será cobrado. Juntam-se a esse danoso fato alguns livros didáticos que trazem erros conceituais, a exemplo de não distinguir definições de demonstrações, além de provar fatos matemáticos com exemplos, fazer mal uso de notações, dentre outros disparates."
Daniel Cordeiro de Morais Filho, em **Um Convite à Matemática** – Coleção do Professor de Matemática, SBM

A Matemática é uma linguagem. Tentar compreendê-la sem ter consciência disso, é como está participando de um jogo sem conhecer suas regras.

O grande livro da natureza pode ser lido somente por aqueles que conhecem a linguagem na qual ele foi escrito. E esta linguagem é a matemática. – Galileo

Objetivo principal

Apresentar ao estudante essa linguagem chamada *Matemática*, de modo que ele sinta a necessidade de se comunicar de forma **clara**, **precisa** e **fundamentado na Lógica**.

A Matemática é uma linguagem. Tentar compreendê-la sem ter consciência disso, é como está participando de um jogo sem conhecer suas regras.

O grande livro da natureza pode ser lido somente por aqueles que conhecem a linguagem na qual ele foi escrito. E esta linguagem é a matemática. – Galileo

Objetivo principal

Apresentar ao estudante essa linguagem chamada *Matemática*, de modo que ele sinta a necessidade de se comunicar de forma **clara**, **precisa** e **fundamentado na Lógica**. Sujando as mãos ...

O caminho . . .

Mas como fazer isso?

- Desvinculando o significado matemático (que é mais restrito) do significado de sentenças análogas na linguagem do cotidiano.
- Usando uma linguagem **simples** e **leve** (Aritmética).
- Apresentando as *peças que formam a Linguagem Matemática*, assim como explorando as principais técnicas de demonstração, através de exemplos *concretos*.
- Expondo e discutindo erros comuns dos estudantes.
- Ilustrando, através de exemplos, como as ideias da Matemática surgem e se desenvolvem.

Devo voltar aqui nas próximas sextas?

Mas pra quê?

- Entenda a diferença entre *exemplos*, *demonstrações* e *contra-exemplos*.
- Saiba distinguir um *resultado* de sua *recíproca*.
- Sinta a necessidade de demonstrações precisas e gerais, de modo que passe a dar o mínimo de atenção ao rigor que a Matemática exige.
- Perceba que não existe um método universal de demonstração que possa ser aplicado de forma mecânica.
- Tenha um desempenho satisfatório nas disciplinas específicas do curso, principalmente naquelas mais avançadas.

Devo voltar aqui nas próximas terças?

Mas pra quê?

- Entenda que estudar as propriedades fundamentais de uma determinada teoria, fugindo um pouco de sua *logística* (arte de calcular), é importante.

Devo voltar aqui nas próximas terças?

Mas pra quê?

- Entenda que estudar as propriedades fundamentais de uma determinada teoria, fugindo um pouco de sua *logística* (arte de calcular), é importante.
  - Na **Teoria dos Números** estudamos as propriedades fundamentais dos Números Inteiros; na **Geometria Euclidiana Plana** estudamos as propriedades fundamentais da geometria plana; na **Análise Matemática** as propriedades fundamentais dos números reais e das funções reais ...

Devo voltar aqui nas próximas terças?

Mas pra quê?

- Entenda que estudar as propriedades fundamentais de uma determinada teoria, fugindo um pouco de sua *logística* (arte de calcular), é importante.
  - Na **Teoria dos Números** estudamos as propriedades fundamentais dos Números Inteiros; na **Geometria Euclidiana Plana** estudamos as propriedades fundamentais da geometria plana; na **Análise Matemática** as propriedades fundamentais dos números reais e das funções reais ...
  - Neste estágio deveríamos sentir a necessidade de **entender**, mais que de calcular. Ao invés de descrever uma fórmula e começar a aplicá-la, nos dedicaremos a entender **porque** a fórmula é verdadeira. “Calcule ...” $\rightsquigarrow$ “Por que?”

E qual o conhecimento necessário?

- "**Nenhum**" conhecimento anterior específico de matemática é exigido – somente, no máximo, uma certa familiaridade com ela, como ensinada no ensino médio.
- E aí está a principal dificuldade destes encontros! Não se trata de matemática nova, mas de uma maneira diferente de abordar muitas coisas que até já lhe são conhecidas.
- Infelizmente mudar atitudes é justamente o mais difícil.

Um erro comum

Cuidado!!!

Enquanto apenas **um** contra-exemplo é suficiente para concluir que uma determinada sentença é falsa, **não** basta testar vários exemplos (particulares) para mostrar que uma determinada afirmação é verídica.

Ilustraremos essa observação com alguns exemplos.

- Se n é par, então $n^2 + 1$ é primo.

  Primeiro, pergunte-se:

  - Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?

- Se n é par, então $n^2 + 1$ é primo.

  Primeiro, pergunte-se:

  - Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
  - O que eu quero verificar/provar?

- Se n é par, então $n^2 + 1$ é primo.

  Primeiro, pergunte-se:

  - Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
  - O que eu quero verificar/provar?
  - É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

- Se n é par, então $n^2 + 1$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + 1$

- Se n é par, então $n^2 + 1$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + 1$
2	5

- Se n é par, então n^2+1 é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	n^2+1
2	5
4	17

- Se n é par, então $n^2 + 1$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + 1$
2	5
4	17
6	37

- Se n é par, então $n^2 + 1$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + 1$
2	5
4	17
6	37
8	65

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

  Primeiro, pergunte-se:

  - Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
  - O que eu quero verificar/provar?
  - É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + n + 41$

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + n + 41$
1	43

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

  - Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
  - O que eu quero verificar/provar?
  - É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47
3	53

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71

- (RPM 09) Se n é positivo, então n^2+n+41 é primo.

  Primeiro, pergunte-se:

  - Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
  - O que eu quero verificar/provar?
  - É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	n^2+n+41
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
$\cdots$	$\cdots$

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
...	...
39	1.601

- (RPM 09) Se n é positivo, então $n^2 + n + 41$ é primo.

Primeiro, pergunte-se:

- Conheço todos os elementos que compõem o enunciado?
- O que eu quero verificar/provar?
- É possível verificar se a afirmação é válida para alguns exemplos?

n	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
...	...
39	1.601
40	41×41

p "fatorial"

Seja p um primo. Definimos $p^{\#}$ como sendo o produto de todos os primos menores ou iguais a p.

Exemplo

- $2^{\#} = 2$

p "fatorial"

Seja p um primo. Definimos $p^{\#}$ como sendo o produto de todos os primos menores ou iguais a p.

Exemplo

- $2^{\#} = 2$
- $3^{\#} = 2 \times 3 = 6$

p "fatorial"

Seja p um primo. Definimos $p^{\#}$ como sendo o produto de todos os primos menores ou iguais a p.

Exemplo

- $2^{\#} = 2$
- $3^{\#} = 2 \times 3 = 6$
- $5^{\#} = 2 \times 3 \times 5 = 30$

p "fatorial"

Seja p um primo. Definimos $p^{\#}$ como sendo o produto de todos os primos menores ou iguais a p.

Exemplo

- $2^{\#} = 2$
- $3^{\#} = 2 \times 3 = 6$
- $5^{\#} = 2 \times 3 \times 5 = 30$
- $7^{\#} = 5^{\#} \times 7 = 210$

p "fatorial"

Seja p um primo. Definimos $p^{\#}$ como sendo o produto de todos os primos menores ou iguais a p.

Exemplo

- $2^{\#} = 2$
- $3^{\#} = 2 \times 3 = 6$
- $5^{\#} = 2 \times 3 \times 5 = 30$
- $7^{\#} = 5^{\#} \times 7 = 210$
- $11^{\#} = 7^{\#} \times 11 = 2.310$

p "fatorial"

Seja p um primo. Definimos $p^{\#}$ como sendo o produto de todos os primos menores ou iguais a p.

Exemplo

- $2^{\#} = 2$
- $3^{\#} = 2 \times 3 = 6$
- $5^{\#} = 2 \times 3 \times 5 = 30$
- $7^{\#} = 5^{\#} \times 7 = 210$
- $11^{\#} = 7^{\#} \times 11 = 2.310$

- Se p é primo, então $p^{\#} + 1$ é primo.

p "fatorial"

Observe a seguinte tabela:

p	$p^{\#}$	$p^{\#}+1$
2	2	3
3	6	7
5	30	31
7	210	211
11	2.310	2.311

p "fatorial"

Observe a seguinte tabela:

p	$p^{\#}$	$p^{\#}+1$
2	2	3
3	6	7
5	30	31
7	210	211
11	2.310	2.311

Paramos propositalmente em $p = 11$ porque

$$13^{\#} + 1 = 30.031 = 59 \times 509$$

p "fatorial"

Observe a seguinte tabela:

p	$p^{\#}$	$p^{\#}+1$
2	2	3
3	6	7
5	30	31
7	210	211
11	2.310	2.311

Paramos propositalmente em $p = 11$ porque

$$13^{\#} + 1 = 30.031 = 59 \times 509$$

- $p^{\#} + 1$ raramente é primo.

p "fatorial"

Observe a seguinte tabela:

p	$p^{\#}$	$p^{\#}+1$
2	2	3
3	6	7
5	30	31
7	210	211
11	2.310	2.311

Paramos propositalmente em $p = 11$ porque

$$13^{\#} + 1 = 30.031 = 59 \times 509$$

- $p^{\#} + 1$ raramente é primo.
- São conhecidos somente 16 primos desta forma, o maior dos quais corresponde a $p = 24.029$.

- (RPM 09) Se $n \in \mathbb{Z}$, então $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.

n	$991n^2 + 1$
1	992
2	3.965
3	8.920
4	15.857
5	24.777
6	35.678
7	48.560
...	...

- (RPM 09) Se $n \in \mathbb{Z}$, então $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.

n	$991n^2 + 1$
1	992
2	3.965
3	8.920
4	15.857
5	24.777
6	35.678
7	48.560
...	...

O 1.o natural para o qual $991n^2 + 1$ é um quadrado perfeito tem 29 dígitos e é 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767.

Pra pensar

Amigo furão?

Imagine que um amigo (honesto!) lhe diga:

Pra pensar

Amigo furão?

Imagine que um amigo (honesto!) lhe diga:

- "Eu vou à festa se chegar cedo em casa"

Pra pensar

Amigo furão?

Imagine que um amigo (honesto!) lhe diga:

- "Eu vou à festa se chegar cedo em casa"

À noite você espera seu amigo na festa e ele não vem.

Pra pensar

Amigo furão?

Imagine que um amigo (honesto!) lhe diga:

- "Eu vou à festa se chegar cedo em casa"

À noite você espera seu amigo na festa e ele não vem.

- O que você imediatamente poderia concluir?

Pra pensar

Amigo furão?

Imagine que um amigo (honesto!) lhe diga:

- “Eu vou à festa se chegar cedo em casa”

À noite você espera seu amigo na festa e ele não vem.

- O que você imediatamente poderia concluir?
- Qual a lógica por trás da sua dedução?

Antes de encerrar . . .

. . . é importante salientar que a ideia desses encontros não é *treiná-lo* em demonstrações e, sim, apenas apresentá-lo a essa "ferramenta".

Além disso, é importante deixar claro, também, que, como qualquer outra habilidade, a *arte de demonstrar* tem que ser praticada com assiduidade.

Antes de encerrar . . .

. . . é importante salientar que a ideia desses encontros não é *treiná-lo* em demonstrações e, sim, apenas apresentá-lo a essa "ferramenta".

Além disso, é importante deixar claro, também, que, como qualquer outra habilidade, a *arte de demonstrar* tem que ser praticada com assiduidade.

> *– Euclides, não existe uma maneira mais fácil de aprender geometria que ler os treze livros de Os Elementos? Perguntou Ptolomeu, rei do Egito.*
> *– Em geometria, não existe uma estrada especial para os reis. Respondeu Euclides.*