A Arte de Demonstrar

Francisco Medeiros

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Diretoria Acadêmica de Ciências

Sumário

Vimos da vez passada:

- A apresentação do minicurso.
- Que exemplos não servem como provas (com exceção dos contra-exemplos).

Veremos hoje:

- Que exemplos não servem como provas.
- O que são **sentenças matemáticas** (ou **teoremas**).

Números de Mersenne – sec. XVII

Marin Mersenne

Os números da forma $M(n) = 2^n - 1$ seriam primos quando $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ e 257 e compostos para os outros 44 valores primos de n menores que 257.

- Euler, em 1732, afirmou que $M(41)$ e $M(47)$ seriam primos;

Números de Mersenne – sec. XVII

Marin Mersenne

Os números da forma $M(n) = 2^n - 1$ seriam primos quando $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ e 257 e compostos para os outros 44 valores primos de n menores que 257.

- Euler, em 1732, afirmou que $M(41)$ e $M(47)$ seriam primos;
- Pervusin e Seelhof, em 1886, descobriram que $M(61)$ é primo;

Números de Mersenne – sec. XVII

Marin Mersenne

Os números da forma $M(n) = 2^n - 1$ seriam primos quando $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ e 257 e compostos para os outros 44 valores primos de n menores que 257.

- Euler, em 1732, afirmou que $M(41)$ e $M(47)$ seriam primos;
- Pervusin e Seelhof, em 1886, descobriram que $M(61)$ é primo;
- Sabe-se também que $M(89)$ e $M(107)$ são primos;

Números de Mersenne – sec. XVII

Marin Mersenne

Os números da forma $M(n) = 2^n - 1$ seriam primos quando $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ e 257 e compostos para os outros 44 valores primos de n menores que 257.

- Euler, em 1732, afirmou que $M(41)$ e $M(47)$ seriam primos;
- Pervusin e Seelhof, em 1886, descobriram que $M(61)$ é primo;
- Sabe-se também que $M(89)$ e $M(107)$ são primos;
- A lista de Mersenne inclui os compostos $M(67)$ e $M(257)$.

Números de Mersenne – sec. XVII

Marin Mersenne

Os números da forma $M(n) = 2^n - 1$ seriam primos quando $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ e 257 e compostos para os outros 44 valores primos de n menores que 257.

- Euler, em 1732, afirmou que $M(41)$ e $M(47)$ seriam primos;
- Pervusin e Seelhof, em 1886, descobriram que $M(61)$ é primo;
- Sabe-se também que $M(89)$ e $M(107)$ são primos;
- A lista de Mersenne inclui os compostos $M(67)$ e $M(257)$.

Nota.: Em 25/01/2013 foi descoberto o 48° primo de Mersenne: $M(57.885.161) = 2^{57.885.161} - 1$, que possui 17.425.170 dígitos.

Quem foi **Pierre de Fermat** (1601 - 1665)?

- Advogado por profissão e brilhante matemático em suas horas vagas.

Quem foi **Pierre de Fermat** (1601 - 1665)?

- Advogado por profissão e brilhante matemático em suas horas vagas.
- Se correspondia de forma intensa com vários matemáticos e cientistas.

Quem foi **Pierre de Fermat** (1601 - 1665)?

- Advogado por profissão e brilhante matemático em suas horas vagas.
- Se correspondia de forma intensa com vários matemáticos e cientistas.
- Ajudou a fundamentar a base da Teoria (moderna) dos Números.

Quem foi **Pierre de Fermat** (1601 - 1665)?

- Advogado por profissão e brilhante matemático em suas horas vagas.
- Se correspondia de forma intensa com vários matemáticos e cientistas.
- Ajudou a fundamentar a base da Teoria (moderna) dos Números.
- Foi um dos precursores do Cálculo Diferencial e Integral.

Quem foi **Pierre de Fermat** (1601 - 1665)?

- Advogado por profissão e brilhante matemático em suas horas vagas.
- Se correspondia de forma intensa com vários matemáticos e cientistas.
- Ajudou a fundamentar a base da Teoria (moderna) dos Números.
- Foi um dos precursores do Cálculo Diferencial e Integral.
- De forma independente, foi coinventor da Geometria Analítica (compartilhada com R. Descartes) e da Teoria da Probabilidade (compartilhada com B. Pascal).

Quem foi **Pierre de Fermat** (1601 - 1665)?

- Advogado por profissão e brilhante matemático em suas horas vagas.
- Se correspondia de forma intensa com vários matemáticos e cientistas.
- Ajudou a fundamentar a base da Teoria (moderna) dos Números.
- Foi um dos precursores do Cálculo Diferencial e Integral.
- De forma independente, foi coinventor da Geometria Analítica (compartilhada com R. Descartes) e da Teoria da Probabilidade (compartilhada com B. Pascal).
- Na Ótica, formulou o Princípio do Tempo Mínimo (Princípio de Fermat).

Números de Fermat – sec. XVII

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o número $F(n) = 2^{2^n} + 1$.

Números de Fermat – sec. XVII

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o número $F(n) = 2^{2^n} + 1$.
- Em uma carta de 1640 a outro matemático (amador), Fermat enumerou os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$, para os valores de n entre 0 e 6:

$$3, 5, 17, 257, 65.537, 4.294.967.297 \text{ e } 18.446.744.073.709.551.617$$

Números de Fermat – sec. XVII

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o número $F(n) = 2^{2^n} + 1$.
- Em uma carta de 1640 a outro matemático (amador), Fermat enumerou os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$, para os valores de n entre 0 e 6:

$$3, 5, 17, 257, 65.537, 4.294.967.297 \text{ e } 18.446.744.073.709.551.617$$

  - Fermat conjecturou que todos os números desta forma eram primos.

Números de Fermat – sec. XVII

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o número $F(n) = 2^{2^n} + 1$.
- Em uma carta de 1640 a outro matemático (amador), Fermat enumerou os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$, para os valores de n entre 0 e 6:

$$3, 5, 17, 257, 65.537, 4.294.967.297 \text{ e } 18.446.744.073.709.551.617$$

  - Fermat conjecturou que todos os números desta forma eram primos.
  - Quase cem anos mais tarde Euler mostrou que $F(5) = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ é composto.

Números de Fermat – sec. XVII

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o número $F(n) = 2^{2^n} + 1$.
- Em uma carta de 1640 a outro matemático (amador), Fermat enumerou os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$, para os valores de n entre 0 e 6:

$$3, 5, 17, 257, 65.537, 4.294.967.297 \text{ e } 18.446.744.073.709.551.617$$

  - Fermat conjecturou que todos os números desta forma eram primos.
  - Quase cem anos mais tarde Euler mostrou que $F(5) = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ é composto.

Nota.: Até hoje não se descobriu nenhum número $F(n)$ primo com $n \geq 5$.

As “demonstrações” com casos particulares (ou exemplos) **não são válidas**.

As "demonstrações" com casos particulares (ou exemplos) **não são válidas**.

- **Exceção!** Para mostrar que determinada sentença é falsa, basta dar um exemplo de um objeto/elemento que não possui a propriedade geral.

As "demonstrações" com casos particulares (ou exemplos) **não são válidas**.

- **Exceção!** Para mostrar que determinada sentença é falsa, basta dar um exemplo de um objeto/elemento que não possui a propriedade geral. Neste caso, dizemos que temos um **contra-exemplo**.

As "demonstrações" com casos particulares (ou exemplos) **não são válidas**.

- **Exceção!** Para mostrar que determinada sentença é falsa, basta dar um exemplo de um objeto/elemento que não possui a propriedade geral. Neste caso, dizemos que temos um **contra-exemplo**.

"Todo número primo é ímpar."

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
7. O Brasil é o quarto maior mercado consumidor de automóveis do mundo.

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
7. O Brasil é o quarto maior mercado consumidor de automóveis do mundo.
8. $1 > 0$?

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
7. O Brasil é o quarto maior mercado consumidor de automóveis do mundo.
8. $1 > 0$?
9. $2x + 6 = 8$.

Sentenças?

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
7. O Brasil é o quarto maior mercado consumidor de automóveis do mundo.
8. $1 > 0$?
9. $2x + 6 = 8$.
10. $1 + 1$.

Definição (Sentença ou Proposição Matemática)

Uma sentença é uma frase, expressa em linguagem matemática, declarativa afirmativa que ou é definitivamente verdadeira ou é definitiamente falsa, mas não ambas. Além disso, deve satisfazer a lei do terceiro excluído.

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
7. O Brasil é o quarto maior mercado consumidor de automóveis do mundo.

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
7. O Brasil é o quarto maior mercado consumidor de automóveis do mundo.
8. $1 > 0$? $(1 > 0.)$

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
7. O Brasil é o quarto maior mercado consumidor de automóveis do mundo.
8. $1 > 0$? $(1 > 0.)$
9. $2x + 6 = 8$. (Existe $x \in \mathbb{N}$, tal que $2x + 6 = 8$.)

1. O quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar.
2. O número 45 não é maior do que ou igual 10^2.
3. Todo número par é divisível por 3.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $n^2 + n + 41$ é um número primo.
5. $2 + 9 = 12$.
6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
7. O Brasil é o quarto maior mercado consumidor de automóveis do mundo.
8. $1 > 0$? $(1 > 0.)$
9. $2x + 6 = 8$. (Existe $x \in \mathbb{N}$, tal que $2x + 6 = 8$.)
10. $1 + 1$. $(1 + 1 = 3.)$

Um fato matemático . . .

. . . é frequentemente chamado de *teorema*.

Significado: Vem do grego e originalmente significava ‘espetáculo ou festa’. Mas hoje significa ‘proposição a ser demonstrada’ (Euclides);

Um fato matemático ...

... é frequentemente chamado de *teorema*.

Significado: Vem do grego e originalmente significava 'espetáculo ou festa'. Mas hoje significa 'proposição a ser demonstrada' (Euclides);

Decifrando: 1. O enunciado de um teorema é constituído de duas partes:

Um fato matemático ...

... é frequentemente chamado de *teorema*.

Significado: Vem do grego e originalmente significava ‘espetáculo ou festa’. Mas hoje significa ‘proposição a ser demonstrada’ (Euclides);

Decifrando: 1. O enunciado de um teorema é constituído de duas partes:

As hipóteses: Aquilo que estamos supondo ser **verdade**.

Um fato matemático . . .

. . . é frequentemente chamado de *teorema*.

Significado: Vem do grego e originalmente significava ‘espetáculo ou festa’. Mas hoje significa ‘proposição a ser demonstrada’ (Euclides);

Decifrando: 1. O enunciado de um teorema é constituído de duas partes:

- As hipóteses: Aquilo que estamos supondo ser **verdade**.
- A tese: A **conclusão** do teorema.

Um fato matemático . . .

. . . é frequentemente chamado de *teorema*.

Significado: Vem do grego e originalmente significava ‘espetáculo ou festa’. Mas hoje significa ‘proposição a ser demonstrada’ (Euclides);

Decifrando:
1. O enunciado de um teorema é constituído de duas partes:
   - As hipóteses: Aquilo que estamos supondo ser **verdade**.
   - A tese: A **conclusão** do teorema.
2. Um teorema diz que a propriedade que os elementos/objetos possuem é comum a todos os elementos/objetos.

Dois exemplos

Teorema

Se a é um número inteiro par, então a^2 também é par.

Dois exemplos

Teorema

Se a é um número inteiro par, então a^2 também é par.

Hipótese a é um *inteiro par*.

Dois exemplos

Teorema

Se a é um número inteiro par, então a^2 também é par.

Hipótese a é um *inteiro par*.

Tese a^2 é par.

Dois exemplos

Teorema

Se a é um número inteiro par, então a^2 também é par.

Hipótese a é um *inteiro par*.

Tese a^2 é par.

Propriedade O quadrado de qualquer número par é ainda um número par.

Dois exemplos

Teorema

Sejam $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$ os ângulos internos de um ΔABC. Então,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

Dois exemplos

Teorema

Sejam $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$ os ângulos internos de um ΔABC. Então,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

Hipótese $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são os ângulos internos de um ΔABC.

Dois exemplos

Teorema

Sejam $\widehat{A}, \widehat{B}$ *e* $\widehat{C}$ *os ângulos internos de um* ΔABC. *Então,*

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

Hipótese $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são os ângulos internos de um ΔABC.

Tese $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Dois exemplos

Teorema

Sejam $\widehat{A}, \widehat{B}$ *e* $\widehat{C}$ *os ângulos internos de um* ΔABC. *Então,*

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°.$$

Hipótese $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são os ângulos internos de um ΔABC.

Tese $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Propriedade A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180 graus.

E como tenho certeza que determinada sentença matemática é verdadeira?

Demonstrando-a!

E como tenho certeza que determinada sentença matemática é verdadeira?

Demonstrando-a!

E como faço isso?

Usando argumentos lógicos que nos permita partir da *hipótese* e chegar à *tese*.

E onde busco esses argumentos?

E onde busco esses argumentos?

Aqui:

- Hipótese(s).
- Axiomas.
- Definições.
- Teoremas já demonstrados.
- Os passos da demonstração, previamente provados.
- Técnicas de demonstrações.

Vejamos mais um exemplo

Teorema

Se Pedro é brasileiro, então ele é terráqueo.

Vejamos mais um exemplo

Teorema

Se Pedro é brasileiro, então ele é terráqueo.

Hipótese Pedro é brasileiro.

Vejamos mais um exemplo

Teorema

Se Pedro é brasileiro, então ele é terráqueo.

Hipótese Pedro é brasileiro.

Tese Pedro é terráqueo.

Vejamos mais um exemplo

Teorema

Se Pedro é brasileiro, então ele é terráqueo.

Hipótese Pedro é brasileiro.

Tese Pedro é terráqueo.

Admitindo que a sentença "Pedro é brasileiro" é verdadeira, de que forma podemos deduzir a *Tese* "Pedro é terráqueo"?

Sentenças do tipo *Se H, então T*

Proposição (A)

Se m e n são inteiros pares, então o produto $m \cdot n$ é um inteiro par.

H: m e n são inteiros pares. (Hipótese)
T: o produto $m \cdot n$ é um inteiro par. (Tese)

Forma abreviada

$$H \Rightarrow T \text{ (Lê-se: } H \text{ implica } T\text{)}$$

$$m \text{ e } n \text{ são inteiros pares} \Rightarrow \text{o produto } m \cdot n \text{ é um inteiro par}$$

Sentenças do tipo *Se H, então T*

Quando é verdadeira?

Quando em **todas** as situações nas quais a *hipótese H* se verifique a *tese* T também esteja satisfeita.

Quando é falsa?

Quando existe **um** *objeto matemático* que satisfaz a *hipótese H* e não satisfaz a *tese T*.

Obs.: Um tal objeto se chama *contra-exemplo* para a sentença *Se H, então T*. Por outro lado, um objeto que satisfaz a *hipótese H* e a *tese T* se diz um *exemplo* para a sentença *Se H, então T*.

Sentenças do tipo *Se H, então T*

Proposição (A)

Se m e n são inteiros pares, então o produto $m \cdot n$ é um inteiro par.

- A dupla de inteiros 4 e 10 é um exemplo, pois 4 e 10 são inteiros pares e seu produto 40 é par.

Sentenças do tipo *Se H, então T*

Proposição (A)

Se m e n são inteiros pares, então o produto $m \cdot n$ é um inteiro par.

- A dupla de inteiros 4 e 10 é um exemplo, pois 4 e 10 são inteiros pares e seu produto 40 é par.

Proposição (B)

Se m é um inteiro ímpar, então $m = 2k^2 + 1$, para algum inteiro k.

Sentenças do tipo *Se H, então T*

Proposição (A)

Se m e n são inteiros pares, então o produto $m \cdot n$ é um inteiro par.

- A dupla de inteiros 4 e 10 é um exemplo, pois 4 e 10 são inteiros pares e seu produto 40 é par.

Proposição (B)

Se m é um inteiro ímpar, então $m = 2k^2 + 1$, para algum inteiro k.

- Os inteiros $1, 3$ e 9 são exemplos, pois todos são números ímpares e $1 = 2 \cdot 0^2 + 1; 3 = 2 \cdot 1^2 + 1$ e $9 = 2 \cdot 2^2 + 1$.

Sentenças do tipo *Se H, então T*

Proposição (A)

Se m e n são inteiros pares, então o produto $m \cdot n$ é um inteiro par.

- A dupla de inteiros 4 e 10 é um exemplo, pois 4 e 10 são inteiros pares e seu produto 40 é par.

Proposição (B)

Se m é um inteiro ímpar, então $m = 2k^2 + 1$, para algum inteiro k.

- Os inteiros $1, 3$ e 9 são exemplos, pois todos são números ímpares e $1 = 2 \cdot 0^2 + 1; 3 = 2 \cdot 1^2 + 1$ e $9 = 2 \cdot 2^2 + 1$.
- Já o inteiro 5 é um contra-exemplo, pois 5 é ímpar e $5 \neq 2k^2 + 1$, qualquer que seja o inteiro de k.

Um erro comum . . .

Cuidado!!!

Enquanto apenas **um** contra-exemplo é suficiente para concluir que uma determinada sentença é falsa, **não** basta testar vários exemplos particulares para mostrar que uma proposição seja verdadeira.

Perguntas

- Como verificar a veracidade de uma proposição do tipo *Se H, então T*?
- Quantos números você teria que testar para garantir uma resposta? É possível fazer isso?

Proposição (C)

Se $n \in \{2, 3, 17, 53, 19\}$, *então* n *número primo.*

Neste caso, em se tratando de um número **finito** e **pequeno** de casos possíveis, basta examiná-los um a um.

E se o número de casos possíveis não for finito?

Proposição (A)

Se m e n são inteiros pares, então o produto $m \cdot n$ é um inteiro par.

Demonstração da Prop.(A):

E se o número de casos possíveis não for finito?

Proposição (A)

Se m e n são inteiros pares, então o produto $m \cdot n$ é um inteiro par.

Demonstração da Prop.(A): Como m e n são inteiros pares, então podemos escrever $m = 2k$ e $n = 2q$, onde k e q são inteiros. Fazendo o produto, obtemos $m \cdot n = (2k) \cdot (2q) = 2 \cdot (2kq)$, que é um número par, pois $2kq \in \mathbb{Z}$. Logo a proposição é verdadeira.

Formas equivalentes para *Se H, então T*

Proposição (A)

Se m e n são inteiros pares, então o produto $m \cdot n$ é um inteiro par.

Pode ser reformulada das seguintes formas equivalentes:

- O produto de dois inteiros pares é ainda um inteiro par.
- Para toda dupla de inteiros pares m e n tem-se que seu produto $m \cdot n$ é par.
- O produto de inteiros $m \cdot n$ é par desde que m e n sejam inteiros pares.
- Para que o produto dos inteiros m e n seja par, é suficiente que m e n sejam pares.

Formas equivalentes para *Se H, então T*

- Se H, então T.
- Se H for verdadeira, então T será verdadeira.
- T é verdadeira sempre que H for verdadeira.
- T é verdadeira **se** H for verdadeira.
- H é condição **suficiente** para T.
- T é condução **necessária** para H.
- H será verdadeira **somente se** T for verdadeira.

A Recíproca

Proposição (D)

Se n é um inteiro par, então n^2 é número par.

Dem.: n inteiro par $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Assim,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2).$$

Pergunta comum: "Vale a recíproca?"
A recíproca da Prop.(D) é a sentença:

Se n é um inteiro e n^2 é par, então n é par.

A Recíproca

De uma forma geral, a recíproca de uma proposição do tipo *Se* H, *então* T, é a sentença *Se* T, *então* H.

Importante!

É perfeitamente possível que a recíproca de uma determinada proposição **não** seja verdadeira.

Por exemplo, a recíproca da Prop.(A) é falsa:

Recíproca: Se o produto $m \cdot n$ de dois inteiros é par, então cada um dos inteiros m, n é par.

Contra-exemplo: $2 \cdot 3 = 6$ é par, mas 3 é ímpar.

A Recíproca

Exemplo

1. **Proposição**: *Se n é par*, *então n^2 é par*
   Recíproca: *Se n^2 é par*, *então n é par*
2. **Proposição**: *Se m e n são pares*, *então o produto $m \cdot n$ é par*
   Recíproca: *Se o produto $m \cdot n$ é par*, *então m, n são pares*
3. **Prop.**: *Se m e n são ímpares*, *então o produto $m \cdot n$ é ímpar*
   Rec.: *Se o produto $m \cdot n$ é ímpar*, *então m e n são ímpares*