

A ARTE DE DEMONSTRAR

FRANCISCO MEDEIROS

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE
Diretoria Acadêmica de Ciências

Sumário

Sentenças do tipo *Se H, então T*

Recíproca de *Se H, então T*

Conectores “E” e “Ou”

Formas equivalentes para *Se H, então T*

- ▶ *Se H, então T.*
- ▶ *Se H for verdadeira, então T será verdadeira.*
- ▶ *T é verdadeira sempre que H for verdadeira.*
- ▶ *T é verdadeira se H for verdadeira.*
- ▶ *H é condição suficiente para T.*
- ▶ *T é condição necessária para H.*
- ▶ *H será verdadeira somente se T for verdadeira.*

Exemplos

Proposição

Se Pedro é brasileiro, então ele é terráqueo.

- ▶ Ser “brasileiro” é uma condição **suficiente** para ser “terráqueo”. É **necessário** também?
- ▶ Ser “terráqueo” é uma condição **necessária** para ser “brasileiro”. É **suficiente** também?

Exemplos

Proposição

Se $p > 2$ e p é primo, então p é ímpar.

- ▶ Quais são as hipóteses e a tese?
- ▶ " $p > 2$ " e " p é primo" são condições **suficientes** para que p seja ímpar. São também condições necessárias?
- ▶ " p é ímpar" é uma condição **necessária** para que p seja um primo maior do que 2. É suficiente também?
- ▶ Alguém teria um argumento para provar este fato?
- ▶ Vale a RECÍPROCA?

A Recíproca

De uma forma geral, a recíproca de uma proposição do tipo *Se H, então T*, é a sentença

Se T, então H.

Importante!

É perfeitamente possível que a recíproca de uma determinada proposição **não** seja verdadeira.

Exemplos

Proposição

Se m e n são pares, então $m \cdot n$ é par.

- ▶ **Recíproca:** Se $m \cdot n$ é par, então m e n são pares.
- ▶ **Contra-exemplo:** $2 \cdot 3 = 6$ é par, mas 3 é ímpar.

Proposição

Se $p > 2$ e p é primo, então p é ímpar.

- ▶ **Recíproca:** Se p é ímpar, então $p > 2$ e p é primo.
- ▶ **Contra-exemplos:** 1 é ímpar e $1 < 2$; 9 é ímpar e não é primo.

Exemplos

Proposição

Se n é par, então n^2 é par.

- ▶ **Pergunta:** Vale a recíproca?

Se n^2 é par, então n é par.

- ▶ **Conclusão:** n ser par é uma condição *necessária* e *suficiente* para que n^2 seja par.

A Recíproca

Exemplo

- Proposição:** *Se n é par, então n^2 é par*
Recíproca: *Se n^2 é par, então n é par*
- Proposição:** *Se m e n são pares, então o produto $m \cdot n$ é par*
Recíproca: *Se o produto $m \cdot n$ é par, então m, n são pares*
- Proposição:** *Se $p > 2$ e p é primo, então p é ímpar*
Recíproca: *Se p é ímpar, então $p > 2$ e p é primo*

“E” e “Ou”

As palavras “E” e “Ou” podem ser usadas para combinar duas sentenças de modo a formar uma nova sentença.

Exemplo

R O número 2 é um número par e o número 3 é ímpar.

Note que a sentença R pode ser dividida em duas outras sentenças mais simples:

P O número 2 é um número par.

Q O número 3 é ímpar.

“E” e “Ou”

As palavras “E” e “Ou” podem ser usadas para combinar duas sentenças de modo a formar uma nova sentença.

Exemplo

R *O número 2 é um número par e o número 3 é ímpar.*

Note que a sentença R pode ser dividida em duas outras sentenças mais simples:

P *O número 2 é um número par.*

Q *O número 3 é ímpar.*

A sentença R afirma que P e Q são ambas verdadeiras. Dado que tanto P quanto Q são de fato verdadeiras, então a sentença R é também verdadeira. ($V \wedge V \rightarrow V$)

“E” e “Ou”

Exemplo

S *O número 1 é par e o número 3 é ímpar.* ($F \wedge V \rightarrow F$)

T *O número 2 é par e o número 4 é ímpar.* ($V \wedge F \rightarrow F$)

U *O número 3 é par e o número 2 é ímpar.* ($F \wedge F \rightarrow F$)

“E” e “Ou”

Exemplo

S O número 1 é par e o número 3 é ímpar. ($F \wedge V \rightarrow F$)

T O número 2 é par e o número 4 é ímpar. ($V \wedge F \rightarrow F$)

U O número 3 é par e o número 2 é ímpar. ($F \wedge F \rightarrow F$)

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

“E” e “Ou”

Exemplo

R *O número 2 é par ou o número 3 é ímpar.* ($V \vee V \rightarrow V$)

“E” e “Ou”

Exemplo

R *O número 2 é par ou o número 3 é ímpar.* ($V \vee V \rightarrow V$)

S *O número 1 é par ou o número 3 é ímpar.* ($F \vee V \rightarrow V$)

“E” e “Ou”

Exemplo

R *O número 2 é par ou o número 3 é ímpar.* ($V \vee V \rightarrow V$)

S *O número 1 é par ou o número 3 é ímpar.* ($F \vee V \rightarrow V$)

T *O número 2 é par ou o número 4 é ímpar.* ($V \vee F \rightarrow V$)

“E” e “Ou”

Exemplo

R *O número 2 é par ou o número 3 é ímpar.* ($V \vee V \rightarrow V$)

S *O número 1 é par ou o número 3 é ímpar.* ($F \vee V \rightarrow V$)

T *O número 2 é par ou o número 4 é ímpar.* ($V \vee F \rightarrow V$)

U *O número 3 é par ou o número 2 é ímpar.* ($F \vee F \rightarrow F$)

“E” e “Ou”

Atenção

É importante saber que o significado da palavra “ou” expressada acima é diferente, algumas vezes, daquele que usamos no nosso dia a dia.

“E” e “Ou”

Atenção

É importante saber que o significado da palavra “ou” expressada acima é diferente, algumas vezes, daquele que usamos no nosso dia a dia.

- ▶ *Você paga suas mensalidades **ou** você terá sua matrícula cancelada.*

“E” e “Ou”

Atenção

É importante saber que o significado da palavra “ou” expressada acima é diferente, algumas vezes, daquele que usamos no nosso dia a dia.

- ▶ *Você paga suas mensalidades **ou** você terá sua matrícula cancelada.*
- ▶ *Pedro é filho de Maria **ou** de Joana?*

“E” e “Ou”

Exemplo (em matemática)

- ▶ *Se m **ou** n é par, então $m \cdot n$ é par.*
- ▶ *Seja $m \in \mathbb{Z}$. Então m é par **ou** m é ímpar.*

“E” e “Ou”

Exemplo (em matemática)

- ▶ *Se m **ou** n é par, então $m \cdot n$ é par.*
- ▶ *Seja $m \in \mathbb{Z}$. Então m é par **ou** m é ímpar.*

Pra Pensar

- ▶ Explique por que $5 \geq 5$ é uma sentença verdadeira.

“E” e “Ou”

Exemplo (em matemática)

- ▶ *Se m **ou** n é par, então $m \cdot n$ é par.*
- ▶ *Seja $m \in \mathbb{Z}$. Então m é par **ou** m é ímpar.*

Pra Pensar

- ▶ Explique por que $5 \geq 5$ é uma sentença verdadeira.
- ▶ Explique por que $3 < \pi < 4$ é uma sentença verdadeira.

“E” e “Ou”

Exemplo (em matemática)

- ▶ *Se m **ou** n é par, então $m \cdot n$ é par.*
- ▶ *Seja $m \in \mathbb{Z}$. Então m é par **ou** m é ímpar.*

Pra Pensar

- ▶ Explique por que $5 \geq 5$ é uma sentença verdadeira.
- ▶ Explique por que $3 < \pi < 4$ é uma sentença verdadeira.
- ▶ Explique por que $2 < 3 < 1$ é uma sentença falsa.