# A Arte de Demonstrar

Francisco Medeiros

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Diretoria Acadêmica de Ciências

# Sumário

## Proposição

*Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, $n$ é par se e somente se $n^2$ é par.*

**Demonstração**:

($\Rightarrow$) Se $n$ é par, então $n^2$ é par.

($\Leftarrow$) Se $n^2$ é par, então $n$ é par.

## Proposição

*Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, $n$ é par se e somente se $n^2$ é par.*

**Demonstração**:

($\Rightarrow$) Se $n$ é par, então $n^2$ é par.

($\Leftarrow$) Se $n^2$ é par, então $n$ é par.

**E agora?**

## Proposição

*Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, $n$ é par se e somente se $n^2$ é par.*

**Demonstração**:

($\Rightarrow$) Se $n$ é par, então $n^2$ é par.

($\Leftarrow$) Se $n^2$ é par, então $n$ é par.

**E agora?**

S Eu vou à festa se chegar cedo em casa.

## Proposição

*Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, $n$ é par se e somente se $n^2$ é par.*

**Demonstração**:

($\Rightarrow$) Se $n$ é par, então $n^2$ é par.

($\Leftarrow$) Se $n^2$ é par, então $n$ é par.

**E agora?**

S Eu vou à festa se chegar cedo em casa.

A Cheguei cedo em casa.

B Vou à festa.

## Proposição

*Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, $n$ é par se e somente se $n^2$ é par.*

**Demonstração**:

($\Rightarrow$) Se $n$ é par, então $n^2$ é par.

($\Leftarrow$) Se $n^2$ é par, então $n$ é par.

**E agora?**

S Eu vou à festa se chegar cedo em casa.

A Cheguei cedo em casa.

B Vou à festa.

- S é equivalente a "A $\Rightarrow$ B".

## Proposição

*Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, $n$ é par se e somente se $n^2$ é par.*

**Demonstração**:

($\Rightarrow$) Se $n$ é par, então $n^2$ é par.

($\Leftarrow$) Se $n^2$ é par, então $n$ é par.

**E agora?**

S Eu vou à festa se chegar cedo em casa.

A Cheguei cedo em casa.

B Vou à festa.

- S é equivalente a "A $\Rightarrow$ B".
- Se não fui à festa, foi porque ...

## Proposição

*Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, $n$ é par se e somente se $n^2$ é par.*

**Demonstração**:

($\Rightarrow$) Se $n$ é par, então $n^2$ é par.

($\Leftarrow$) Se $n^2$ é par, então $n$ é par.

**E agora?**

S Eu vou à festa se chegar cedo em casa.

A Cheguei cedo em casa.

B Vou à festa.

- S é equivalente a "A $\Rightarrow$ B".
- Se não fui à festa, foi porque ...
- Podemos concluir então que "não B" implica "não A".

## Proposição

*Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então, $n$ é par se e somente se $n^2$ é par.*

**Demonstração**:

($\Rightarrow$) Se $n$ é par, então $n^2$ é par.

($\Leftarrow$) Se $n^2$ é par, então $n$ é par.

**E agora?**

S Eu vou à festa se chegar cedo em casa.

A Cheguei cedo em casa.

B Vou à festa.

- S é equivalente a "A $\Rightarrow$ B".
- Se não fui à festa, foi porque ...
- Podemos concluir então que "não B" implica "não A".
- Forma simplificada:

"A $\Rightarrow$ B" é equivalente a "$\neg$B $\Rightarrow$ $\neg$A".

# Negação

## Proposição (1)

*Se* $m \cdot n$ *é ímpar, então* $m$ *e* $n$ *são ímpares.*

# Negação

## Proposição (1)

*Se $m \cdot n$ é ímpar, então $m$ e $n$ são ímpares.*

H: $m \cdot n$ é ímpar.

# Negação

**Proposição (1)**

*Se $m \cdot n$ é ímpar, então $m$ e $n$ são ímpares.*

H: $m \cdot n$ é ímpar.

$\neg$H: $m \cdot n$ é par.

# Negação

## Proposição (1)

*Se $m \cdot n$ é ímpar, então $m$ e $n$ são ímpares.*

H: $m \cdot n$ é ímpar.

T: $m$ e $n$ são ímpares.

$\neg$H: $m \cdot n$ é par.

# Negação

## Proposição (1)

*Se $m \cdot n$ é ímpar, então $m$ e $n$ são ímpares.*

H: $m \cdot n$ é ímpar.

T: $m$ e $n$ são ímpares.

$\neg$H: $m \cdot n$ é par.

$\neg$T: $m$ ou $n$ é par.

# Negação

## Proposição (1)

*Se $m \cdot n$ é ímpar, então $m$ e $n$ são ímpares.*

H: $m \cdot n$ é ímpar.

T: $m$ e $n$ são ímpares.

- H $\Rightarrow$ T

$\neg$H: $m \cdot n$ é par.

$\neg$T: $m$ ou $n$ é par.

# Negação

## Proposição (1)

*Se $m \cdot n$ é ímpar, então $m$ e $n$ são ímpares.*

H: $m \cdot n$ é ímpar.

T: $m$ e $n$ são ímpares.

- H $\Rightarrow$ T

¬H: $m \cdot n$ é par.

¬T: $m$ ou $n$ é par.

- ¬T $\Rightarrow$ ¬H

# Negação

## Proposição (1)

*Se $m \cdot n$ é ímpar, então $m$ e $n$ são ímpares.*

H: $m \cdot n$ é ímpar.

T: $m$ e $n$ são ímpares.

- H $\Rightarrow$ T

$\neg$H: $m \cdot n$ é par.

$\neg$T: $m$ ou $n$ é par.

- $\neg$T $\Rightarrow$ $\neg$H

## Proposição (2)

*Se $m$ ou $n$ é par, então $m \cdot n$ é par.*

# Tipos de Demonstração

# Tipos de Demonstração

- Demonstrações Diretas

# Tipos de Demonstração

- Demonstrações Diretas
- Demonstrações Indiretas

# Tipos de Demonstração

- Demonstrações Diretas
- Demonstrações Indiretas
    - Contrapositiva ( "$H \Rightarrow T$" é equivalente a "$\neg T \Rightarrow \neg H$" )

# Tipos de Demonstração

- Demonstrações Diretas
- Demonstrações Indiretas
  - Contrapositiva ( "$H \Rightarrow T$" é equivalente a "$\neg T \Rightarrow \neg H$" )
  - Redução a um Absurdo

# Tipos de Demonstração

- Demonstrações Diretas
- Demonstrações Indiretas
  - Contrapositiva ("H $\Rightarrow$ T" é equivalente a "$\neg$T $\Rightarrow$ $\neg$H" )
  - Redução a um Absurdo

**Se vale a ida e a volta** ...

- H se e somente se T

# Tipos de Demonstração

- Demonstrações Diretas
- Demonstrações Indiretas
  - Contrapositiva ( "$H \Rightarrow T$" é equivalente a "$\neg T \Rightarrow \neg H$" )
  - Redução a um Absurdo

**Se vale a ida e a volta ...**

- H se e somente se T
- $H \iff T$

# Tipos de Demonstração

- Demonstrações Diretas
- Demonstrações Indiretas
  - Contrapositiva ("H $\Rightarrow$ T" é equivalente a "$\neg$T $\Rightarrow$ $\neg$H")
  - Redução a um Absurdo

**Se vale a ida e a volta ...**

- H se e somente se T
- H $\Longleftrightarrow$ T
- H é equivalente a T

# Tipos de Demonstração

- Demonstrações Diretas
- Demonstrações Indiretas
  - Contrapositiva ( “$H \Rightarrow T$” é equivalente a “$\neg T \Rightarrow \neg H$” )
  - Redução a um Absurdo

**Se vale a ida e a volta ...**

- H se e somente se T
- $H \iff T$
- H é equivalente a T
- H é condição necessária e suficiente para T

**Redução ao absurdo**, *que Euclides gostava tanto, é uma das armas mais admiráveis de um matemático. É um jogada mais admirável do que qualquer jogada de xadrez: um jogador de xadrez pode oferecer o sacrifício de um peão ou mesmo de qualquer outra peça, mas [na* **redução ao absurdo**] *o matemático oferece todo o jogo.*

**Godfrey H. Hardy** (1877-1947)
*In A Mathematician's Apology*,
London, Cambridge University Press, 1941.

## Exemplo ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Não existe um número racional $x$ tal que $x^2 = 2$.*

- Informações necessárias para entender o problema:

## Exemplo ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Não existe um número racional $x$ tal que $x^2 = 2$.*

- Informações necessárias para entender o problema:
  - definição de número racional

## Exemplo ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Não existe um número racional $x$ tal que $x^2 = 2$.*

- Informações necessárias para entender o problema:
  - definição de número racional
  - definição de número irracional

## Exemplo ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Não existe um número racional $x$ tal que $x^2 = 2$.*

- Informações necessárias para entender o problema:
  - definição de número racional
  - definição de número irracional
- Técnica de demonstração por *redução ao absurso*:

## Exemplo ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Não existe um número racional $x$ tal que $x^2 = 2$.*

- Informações necessárias para entender o problema:
  - definição de número racional
  - definição de número irracional
- Técnica de demonstração por *redução ao absurso*:

  Teorema Se $H$, então $T$

## Exemplo ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Não existe um número racional $x$ tal que $x^2 = 2$.*

- Informações necessárias para entender o problema:
  - definição de número racional
  - definição de número irracional
- Técnica de demonstração por *redução ao absurso*:

  Teorema: Se $H$, então $T$

  Técnica: Admite-se que $H$ e $\neg T$ ocorram e deduz-se uma sentença contraditória qualquer: $\neg Q \wedge Q$.

## Exemplo ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Não existe um número racional $x$ tal que $x^2 = 2$.*

- Informações necessárias para entender o problema:
  - definição de número racional
  - definição de número irracional
- Técnica de demonstração por *redução ao absurso*:

Teorema: Se $H$, então $T$

Técnica: Admite-se que $H$ e $\neg T$ ocorram e deduz-se uma sentença contraditória qualquer: $\neg Q \wedge Q$.

Absurdo!: A sentença $\neg Q \wedge Q$ é chamada **absurdo** ou **contradição**.

## Exemplo ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Não existe um número racional $x$ tal que $x^2 = 2$.*

- Informações necessárias para entender o problema:
  - definição de número racional
  - definição de número irracional
- Técnica de demonstração por *redução ao absurso*:

Teorema Se $H$, então $T$

Técnica Admite-se que $H$ e $\neg T$ ocorram e deduz-se uma sentença contraditória qualquer: $\neg Q \wedge Q$.

Absurdo! A sentença $\neg Q \wedge Q$ é chamada **absurdo** ou **contradição**.

Nomenclatura A hipótese adicional $\neg T$ chama-se **hipótese de absurdo** ou **hipótese de contradição**.

## Praia de Jaqueline ...

$$(H \Rightarrow T) \text{ é equivalente a } [(H \wedge \neg T) \Rightarrow (\neg Q \wedge Q)]$$

Isto funciona basicamente porque **não** se pode deduzir uma sentença **contraditória**, $\neg Q \wedge Q$, partindo-se uma sentença verdadeira e, portanto, a suposição inicial $H \wedge \neg T$ **não** pode ocorrer e, assim, $\neg T$ também **não** pode ocorrer.

Antes de passarmos ao nosso Teorema, um lembrete!

## Lema

*Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $n^2$ for par, então $n$ é par.*

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

$$\textbf{H}: x^2 = 2 \mid \textbf{T}: x \notin \mathbb{Q} \mid \neg\textbf{T}: x \in \mathbb{Q}$$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ $p^2$ é par

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ $p^2$ é par

$\Rightarrow$ $p$ é par

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ $p^2$ é par

$\Rightarrow$ $p$ é par

$\Rightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ de modo que $p = 2k$

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ $p^2$ é par

$\Rightarrow$ $p$ é par

$\Rightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ de modo que $p = 2k$

$\Rightarrow$ $2k^2 = q^2$

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ $p^2$ é par

$\Rightarrow$ $p$ é par

$\Rightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ de modo que $p = 2k$

$\Rightarrow$ $2k^2 = q^2$

$\Rightarrow$ $q^2$ é par

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ $p^2$ é par

$\Rightarrow$ $p$ é par

$\Rightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ de modo que $p = 2k$

$\Rightarrow$ $2k^2 = q^2$

$\Rightarrow$ $q^2$ é par

$\Rightarrow$ $q$ é par

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ $p^2$ é par

$\Rightarrow$ $p$ é par

$\Rightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ de modo que $p = 2k$

$\Rightarrow$ $2k^2 = q^2$

$\Rightarrow$ $q^2$ é par

$\Rightarrow$ $q$ é par

$\Rightarrow$ $p$ e $q$ têm o $2$ como um divisor comum

## Teorema ($\sqrt{2}$ é irracional)

*Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

**Demonstração**:

**H**: $x^2 = 2$ | **T**: $x \notin \mathbb{Q}$ | $\neg$**T**: $x \in \mathbb{Q}$

$\neg$ T $x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, tal que $x = p/q$ e $p, q$ sem divisores comuns

$\Rightarrow$ $2 = x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ $p^2$ é par

$\Rightarrow$ $p$ é par

$\Rightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ de modo que $p = 2k$

$\Rightarrow$ $2k^2 = q^2$

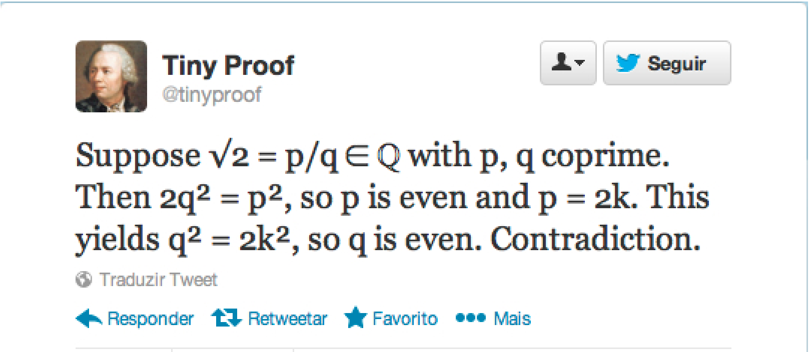
$\Rightarrow$ $q^2$ é par

$\Rightarrow$ $q$ é par

$\Rightarrow$ $p$ e $q$ têm o $2$ como um divisor comum

$\Rightarrow$ Absurdo!

# Num tuíte


Tiny Proof
@tinyproof
Seguir
Suppose $\sqrt{2} = p/q \in \mathbb{Q}$ with p, q coprime. Then $2q^2 = p^2$, so p is even and $p = 2k$. This yields $q^2 = 2k^2$, so q is even. Contradiction.
Traduzir Tweet
Responder
Retweetar
Favorito
Mais

# Síntese da demonstração

dem: $\big[(x^2 = 2) \wedge (x \in \mathbb{Q})\big] \Rightarrow (2$ é um divisor comum de $p$ e $q)$

Q: $p$ e $q$ não têm divisor(es) comum.

$\neg$Q: $p$ e $p$ têm divisor(es) comum.

- $(H \wedge \neg T) \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)$.

## Quando usar?

Recorre-se a uma prova indireta quando a hipótese não fornece informações suficientes para deduzir diretamente a tese. No caso da **redução ao absurdo**, recorre-se à hipótese adicional de contradição $\neg T$.

## Alguns casos

## Quando usar?

Recorre-se a uma prova indireta quando a hipótese não fornece informações suficientes para deduzir diretamente a tese. No caso da **redução ao absurdo**, recorre-se à hipótese adicional de contradição $\neg T$.

## Alguns casos

- *a equação não tem solução*

## Quando usar?

Recorre-se a uma prova indireta quando a hipótese não fornece informações suficientes para deduzir diretamente a tese. No caso da **redução ao absurdo**, recorre-se à hipótese adicional de contradição $\neg T$.

## Alguns casos

- *a equação não tem solução*
- *um número é irracional* (ou seja, *não é racional*)

## Quando usar?

Recorre-se a uma prova indireta quando a hipótese não fornece informações suficientes para deduzir diretamente a tese. No caso da **redução ao absurdo**, recorre-se à hipótese adicional de contradição $\neg T$.

## Alguns casos

- *a equação não tem solução*
- *um número é irracional* (ou seja, *não é racional*)
- *um número é primo* (ou seja, *não é composto*)

## Quando usar?

Recorre-se a uma prova indireta quando a hipótese não fornece informações suficientes para deduzir diretamente a tese. No caso da **redução ao absurdo**, recorre-se à hipótese adicional de contradição $\neg T$.

## Alguns casos

- *a equação não tem solução*
- *um número é irracional* (ou seja, *não é racional*)
- *um número é primo* (ou seja, *não é composto*)
- *não existe um objeto satisfazendo uma determinada propriedade*

# Vantagens e desvantagens

## Prós

- Muito eficiente.

## Contras

# Vantagens e desvantagens

## Prós

- Muito eficiente.
- Tem-se duas hipóteses disponíveis, $H$ e $\neg T$, ao invés de uma.

## Contras

# Vantagens e desvantagens

## Prós

- Muito eficiente.
- Tem-se duas hipóteses disponíveis, $H$ e $\neg T$, ao invés de uma.

## Contras

- Temos a sensação que a demonstração tem algum "truque".

# Vantagens e desvantagens

## Prós

- Muito eficiente.
- Tem-se duas hipóteses disponíveis, $H$ e $\neg T$, ao invés de uma.

## Contras

- Temos a sensação que a demonstração tem algum "truque".
- A ligação entre a *hipótese* e *tese* não é diretamente percebida.

# Vantagens e desvantagens

## Prós

- Muito eficiente.
- Tem-se duas hipóteses disponíveis, $H$ e $\neg T$, ao invés de uma.

## Contras

- Temos a sensação que a demonstração tem algum "truque".
- A ligação entre a *hipótese* e *tese* não é diretamente percebida.
- Mesmo com as hipóteses $H \wedge \neg T$ em mãos, não se sabe, a princípio, o que deduzir (onde chegar).

# Usando a recíproca de uma sentença

## Exemplo

*Para* $x \in \mathbb{R}$, *considere a seguinte sequência de implicações:*

- $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ *ou* $x + 3 = 0 \Rightarrow x = 2$ *ou* $x = -3 \Rightarrow x \in \{2, -3\}$.

## Exemplo

*Para* $x \in \mathbb{R}$, *considere a seguinte sequência de implicações:*

# Usando a recíproca de uma sentença

## Exemplo

*Para $x \in \mathbb{R}$, considere a seguinte sequência de implicações:*

- $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ *ou* $x + 3 = 0 \Rightarrow x = 2$ *ou* $x = -3 \Rightarrow x \in \{2, -3\}$.

## Exemplo

*Para $x \in \mathbb{R}$, considere a seguinte sequência de implicações:*

- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x \in \{1, -1\}$.