

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE
(CEFET-RN)
DIRETORIA DE ENSINO
DEPARTAMENTO EDUCACIONAL DE CONSTRUÇÃO CIVIL

DESENHO GEOMÉTRICO

Professor Aldan Nóbrega Borges

Natal/RN
AGOSTO DE 2007

SUMÁRIO

1. Introdução ao estudo do desenho geométrico.....	1
1.1. Conceitos fundamentais.....	1
2. Utilização do material e operações básicas com segmentos e ângulos.....	6
2.1. Instrumentos e materiais: apresentação, uso e conservação.....	6
2.2. Operações básicas com segmentos e ângulos.....	8
3. Construções fundamentais.....	13
3.1. Traçado de bissetriz.....	13
3.2. Construção de ângulos.....	15
3.3. Traçado de perpendiculares e paralelas.....	15
3.4. Divisão de segmentos.....	18
3.5. Exercícios.....	22
4. Polígonos.....	25
4.1. Definição.....	25
4.2. Tipos.....	25
4.3. Elementos de um polígono.....	25
4.4. Nomenclatura.....	26
4.5. Polígono regular.....	26
5. Triângulos e quadriláteros.....	27
5.1. Triângulos.....	27
5.2. Quadriláteros.....	36
6. Circunferência, tangência e concordância.....	41
6.1. Circunferência.....	41
6.2. Tangência.....	46
6.3. Concordância.....	50
BIBLIOGRAFIA.....	54

1. Introdução ao estudo do desenho geométrico.

1.1. Conceitos fundamentais

1.1.1. Geometria

É o estudo das propriedades relativas a pontos, linhas, planos e superfícies.

1.1.2. Desenho Geométrico

O Desenho Geométrico tem por finalidade representar figuras planas e resolver, com régua e compasso, os problemas relativos a Geometria Plana.

1.1.3. História do Desenho Geométrico

Putnoki (1989), faz um breve relato da História do Desenho Geométrico:

Como linguagem de comunicação e expressão, a arte do desenho antecede em muito a da escrita. O que é a escrita se não a combinação de pequenos símbolos desenhados? Através de gravuras traçadas nas paredes das cavernas, o homem pré-histórico registrou fatos relacionados com o seu cotidiano, deixando indicadores importantes para os pesquisadores modernos estudarem os ancestrais de nossa espécie. Enfim, a arte do desenho é inerente ao homem.

Não se sabe quando, ou onde, alguém formulou pela primeira vez, em forma de desenho, um problema que pretendia resolver - talvez tivesse sido um "projeto" de moradia ou templo, ou algo semelhante. Mas esse passo representou um avanço fundamental na capacidade de raciocínio abstrato, pois representava algo que não existia. Essa ferramenta, gradativamente aprimorada, foi bastante importante para o desenvolvimento das civilizações babilônicas e egípcias, os quais realizaram verdadeiras façanhas arquitetônicas.

Uma outra civilização, os gregos, deram um molde dedutivo à matemática. A obra *Elementos*, de Euclides (aproximadamente 300 a.C.), é um marco de valor inestimável, na qual a Geometria é desenvolvida de modo bastante elaborado. É na geometria grega que surge o Desenho Geométrico. Na realidade, não havia entre os gregos uma diferenciação entre Desenho Geométrico e Geometria. O primeiro aparecia simplesmente na forma de problemas de construções geométricas, após a exposição de um item teórico dos textos de Geometria. Essa conduta euclidiana é seguida até hoje em países como França, Suíça, Espanha etc.

1.1.4. Elementos fundamentais da Geometria

Entes primitivos (não possuem definição).

1.1.4.1. O ponto: representação gráfica indicada por (A, B, C...).

1.1.4.2. A reta: representação gráfica indicada por (a, b, c...).

OBS.:

- (a) A reta pode ser considerada como o resultado do deslocamento linear de um ponto, não possuindo, portanto, início e fim;
- (b) A reta possui infinitos pontos, porém pode ser determinada por apenas dois pontos distintos;
- (c) Por um ponto podemos passar infinitas retas.

1.1.4.3. Plano: representação gráfica indicada por (alfa, beta, gama...).

OBS.: O plano possui, como a reta, infinitos pontos. Por três pontos não colineares, ou um ponto e uma reta, que não o contenha, também definem um plano.

1.1.5. Semi-reta:

1.1.6. Segmento de reta:

1.1.6.a. Medida de segmento: sendo uma parte limitada da reta, o segmento pode ser medido. MEDIR uma grandeza significa comparar, estabelecendo diferenças ou semelhanças.

1.1.6.b. EXEMPLO DE UNIDADE DE MEDIDA: o metro, seus múltiplos e submúltiplos.

1.1.6.c. Ponto médio de segmento: é o ponto do segmento que o divide em dois segmentos congruentes (medidas iguais).

1.1.7. A reta no plano:

1.1.7.1. Retas coincidentes: quando possuem todos os pontos comuns.

$$r \equiv s$$

1.1.7.2. Retas concorrentes ou secantes: quando possuem um único ponto comum.

$$r \cap s = \{P\}$$

1.1.7.3. Retas paralelas: quando não possuem ponto comum.

$$r // s$$

OBS.: Dizemos que duas ou mais retas têm a mesma direção se elas são paralelas entre si.

1.1.7.4. Retas perpendiculares: quando são concorrentes e formam um ângulo de 90° (ângulo reto) entre si.

$$r \perp s$$

1.1.8. Mediatriz de um segmento de reta

É a reta perpendicular ao segmento e que passa pelo ponto médio desse segmento.

OBS.: Conceito de Lugar Geométrico.

Lugar Geométrico – é o lugar onde todos os pontos de uma figura, e somente eles, gozam de certas propriedades.

Mediatriz do segmento **AB** é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos dois pontos **A** e **B** dados.

1.1.9. Distâncias:

1.1.9.1. Distância de dois pontos: dados dois pontos **A** e **B**, chama-se de distância de **A** e **B** a medida do segmento **AB**.

Notação: $d(A,B)$.

1.1.9.2. Distância de um ponto a uma reta: consideremos um ponto **P** e uma reta **r**. Chama-se de distância de um ponto **P** a reta **r** a medida do segmento que tem uma extremidade em **P** e a outra em **r** e que é perpendicular a **r**.

Notação: $d(P,r)$.

1.1.9.3. Distância de duas retas paralelas: chama-se de distância de duas retas paralelas a distância de um ponto qualquer de uma delas a outra reta.

Notação: $d(r,s)$.

1.1.10. Ângulo:

1.1.10.1. Definição: ângulo é a região do plano limitada por duas semi-retas que têm a mesma origem.

1.1.10.2. Medida: a unidade mais empregada é o grau.

1.1.10.3. Classificação quanto à abertura dos lados

1.1.10.3.a. A. reto: ($\alpha=90^\circ$);

1.1.10.3.b. A. agudo: ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$);

1.1.10.3.c. A. obtuso: ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$);

1.1.10.3.d. A. raso ou de meia volta: ($\alpha=180^\circ$);

1.1.10.3.e. A. de volta inteira: ($\alpha=360^\circ$);

1.1.10.3.f. A. nulo: ($\alpha=0^\circ$);

- 1.1.10.4. Soma das medidas de dois ângulos:
 - 1.1.10.4.a A. complementares: quando a soma de suas medidas é igual a 90° ;
 - 1.1.10.4.b A. suplementares: quando a soma de suas medidas é igual a 180° ;
 - 1.1.10.4.c A. replementares: quando a soma de suas medidas é igual a 360° ;
- 1.1.10.5. Congruência: dois ou mais ângulos são congruentes quando têm a mesma medida.
- 1.1.10.6. Bissetriz: bissetriz de um ângulo é a semi-reta que tem origem no vértice do ângulo e o divide em dois ângulos adjacentes e congruentes.

2. Utilização do material e operações básicas com segmentos e ângulos.

2.1. Instrumentos e materiais: apresentação, uso e conservação

2.1.1. Introdução

Para obtermos um bom desempenho no desenvolvimento do Desenho Geométrico, precisamos além de conhecer todo o Material de Desenho, desenvolver algumas qualidades específicas tais como: a limpeza, a ordem, a atenção, o capricho, a exatidão e, sobretudo, a perseverança. Um Desenho para ser bem executado, exige uma técnica que vai da qualidade do papel, sua posição, o lápis, a borracha e os demais materiais.

2.1.2. Instrumentos e materiais

LÁPIS OU A LAPISEIRA

O desenhista pode escolher entre o uso de lápis ou lapiseira. O lápis deve ter perfil hexagonal, para melhor manipulação, deve estar seguro na mão, mas não preso, isto é, deve mover-se com facilidade. Muitas vezes o peso do próprio lápis é suficiente para nos darmos um traço leve. Com o lápis podemos conseguir diferentes tonalidades através da pressão a aplicar ao lápis. Deve estar sempre bem apontado e a grafite ou mina bem afiada com uma lixa. A mina apresenta grau de dureza variável e por isso é classificada de três modos: por números, letras ou números e letras.

Classificação:

Por número

Nº. 1 - grafite macia - de traço forte é usada para destacar traços e fazer esboços.

Nº. 2 - grafite média - de traço médio é usada para escrita em geral e traços pouco relevantes.

Nº 3 - grafite dura - de traço fraco é usada para traços que não precisem ser destacados, mas necessitam de muita exatidão.

Por letras

Letra B - grafite macia - equivalente à grafite Nº. 1.

Letra HB e F - grafite média - equivalente à grafite Nº. 2.

Letra H - grafite dura - equivalente à grafite Nº. 3.

Por Números e Letras

2B,3B, , 6B - grafites muito macias.

2H,3H, , 9H - grafites muito duras

Nesta classificação, os números que antecedem as letras indicam o aumento ou a diminuição do grau de dureza da grafite.

As Lapiseiras do tipo 0,5 mm e 0,7 mm apresentam grafites finas, que não precisa ser apontada.

PAPEL

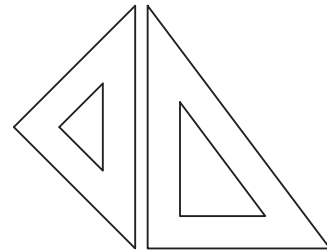
Podemos trabalhar com blocos, cadernos ou folhas avulsas, de preferência papel peso 40 e no formato A4.

RÉGUA

Instrumento usado para medir e executar traços retos. É aconselhável o uso de régua transparente, graduada em centímetros (cm) e milímetros (mm). Quando suja deve ser limpa com flanela ou lavada em água fria.

PAR DE ESQUADROS

Como o nome está dizendo, é composto de dois instrumentos, utilizados para traçar retas paralelas, perpendiculares e ângulos, processos que serão vistos oportunamente. Devemos dar preferência aos esquadros transparentes e sem graduação, pois a finalidade dos esquadros não é medir. Para limpá-los, também usamos uma flanela ou lavamos com água fria. Ao adquirirmos um par de esquadros, devemos verificar se eles podem ser dispostos como na figura, pois existem esquadros de vários tamanhos.



BORRACHA

Utilizada para apagar erros. Existem diversas marcas e tipos no mercado, mas as borrachas sintéticas ou bem macias são mais apropriadas para o nosso uso. Par limpar as borrachas, devemos esfregá-las num papelão grosso. Nunca devemos lavá-las. Para erros muito pequenos, podemos usar o lápis-borracha, que tem uma ponta fina e deve ser apontado como um lápis.

COMPASSO

Instrumento utilizado para traçar circunferências, arcos de circunferências e transportar medidas, processos que estudaremos oportunamente. A ponta-seca (de metal) e a de grafite devem estar no mesmo nível. A grafite deve ser lixada obliquamente e a parte lixada (chanfro) deve ficar para o lado de fora.

TRANSFERIDOR

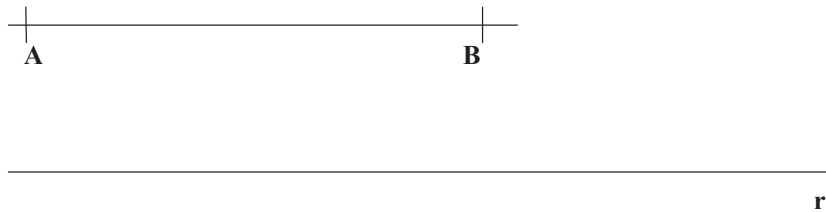
É o instrumento que se utiliza para medir e traçar ângulos. Os transferidores transparentes de plástico ou acrílico, são os mais indicados para o nosso uso. Existem dois modelos: o de meia volta (180°) e o de volta inteira (360°). Ensinaresmos o seu manuseio oportunamente, conforme a necessidade.

2.2. Operações básicas com segmentos e ângulos

Daqui por diante utilizaremos apenas a régua e o compasso como instrumentos básicos de desenho para a resolução dos problemas propostos, obedecendo, assim, ao conceito e finalidades do Desenho Geométrico.

2.2.1. Transporte de segmentos

Ex.: Dado o segmento de reta **AB**, transportá-lo para a reta suporte **r** dada:



2.2.2. Soma e diferença entre segmentos de reta

Ex.: Dados os segmentos **AB** e **CD**, faça o que se pede a seguir:



- Determine a soma **AB + CD**, sobre a reta suporte **s**, dada;
- Determine a diferença **AB - CD**, sobre a reta suporte **u**, dada.

s

u

2.2.3. Multiplicação de um segmento de reta por um escalar (um número)

Ex.: Dado o segmento **EF**, trace o segmento de medida $3 \times \mathbf{EF}$, sobre a reta suporte **z**, dada.



z

2.2.4. Determinação ou Construção da reta Mediatriz

Ex.: Determinar a Mediatriz do segmento de reta **AB**, dado.



2.2.5. Determinação do Ponto Médio

Ex.: Determinar o Ponto Médio do segmento **EF**, dado.



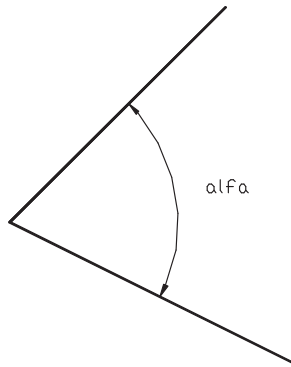
2.2.6. Divisão de um segmento de reta em duas partes iguais

Ex.: Dividir o segmento de reta **AB** dado em duas partes iguais:



2.2.7. Transporte de um ângulo

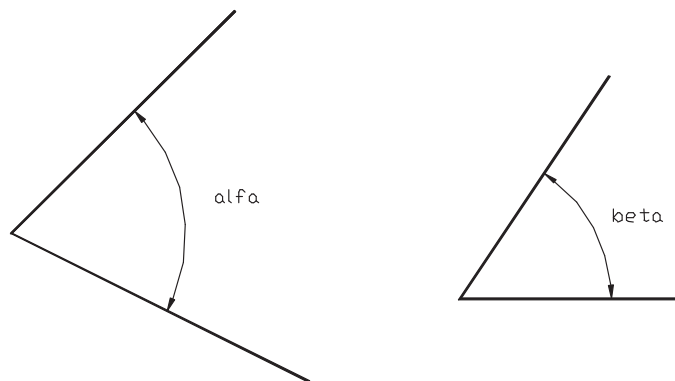
Ex.: Transporte o Ângulo **alfa**, dado, para a origem O_1 :

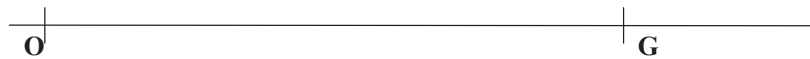


2.2.8. Soma e diferença entre ângulos

Ex.: Dados os ângulos **Alfa** e **Beta**, faça o que se pede a seguir:

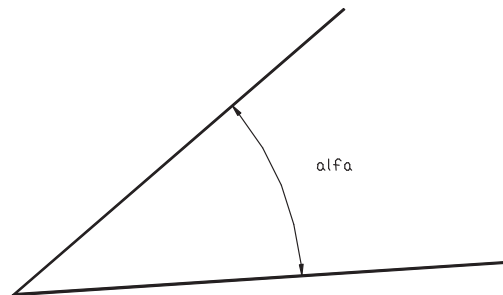
- Determine a soma **Alfa + Beta**, a partir da origem da semi-reta **OH**, dada;
- Determine a diferença **Alfa - Beta**, a partir da origem da semi-reta **OG**, dada.





2.2.9. Multiplicação de um ângulo por um escalar (um número)

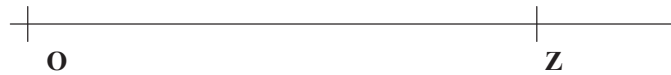
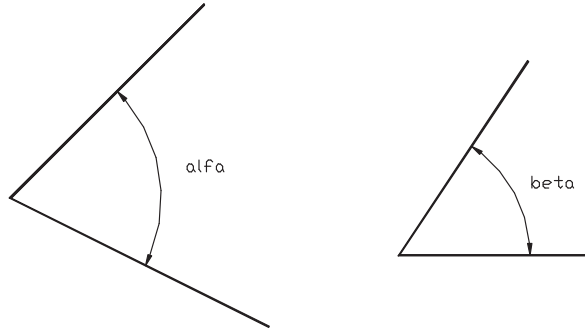
Ex.1: Dado o ângulo **alfa**, construa o ângulo de medida igual a $3 \times \mathbf{alfa}$, a partir da origem da semi-reta **OK**, dada.



O

K

Ex.2: Dado o ângulo **alfa** e o ângulo **beta**, construa o ângulo de medida igual a $3 \times \text{alfa} - 2 \times \text{beta}$, a partir da origem da semi-reta **OZ**, dada.

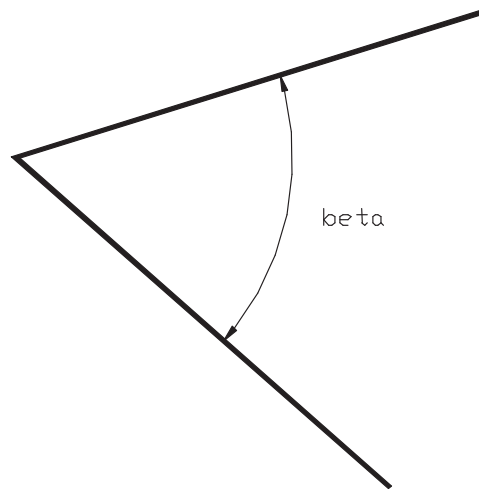


3. Construções fundamentais

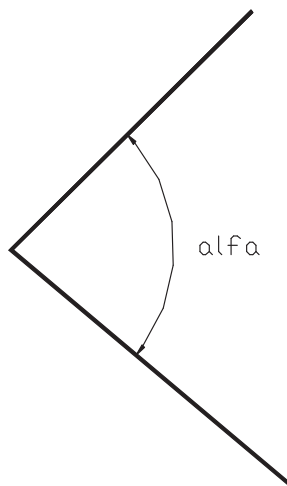
(Traçado de retas perpendiculares, retas paralelas, mediatriz e ponto médio de segmento)

3.1. Traçado de bissetriz

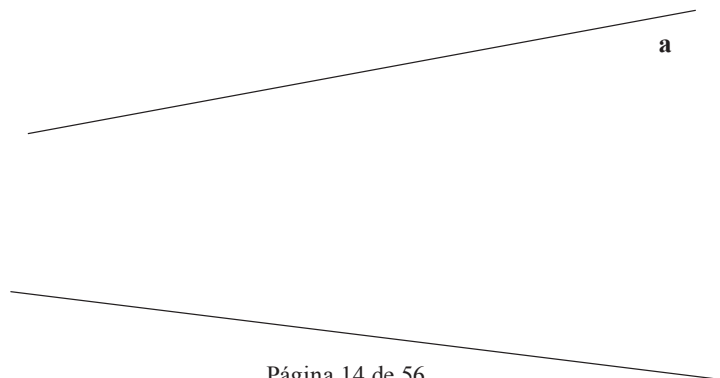
3.1.1. Traçar a **bissetriz** do ângulo **beta**, dado:



3.1.2. Dividir o ângulo dado em **duas** partes iguais:



3.1.3. Traçar a **bissetriz** de um ângulo, sem utilizar o seu vértice:



b

3.2. Construção de ângulos

3.2.a. Construir um ângulo de **60°** e outro de **30°**:

Obs. 01.: O comprimento da circunferência é calculado por $C = 2 \times \pi \times r$;

Obs. 02.: A circunferência equivale a: $C = 360^0$

3.2.b. Construir um ângulo de **90°** e outro de **105°**: ($105^{\circ}=90^{\circ}+15^{\circ}=120^{\circ}-15^{\circ}$):

3.2.c. Sugestões: construir ângulos de **45°, 75°, 120°, 135°, 150°, 165°**, etc.

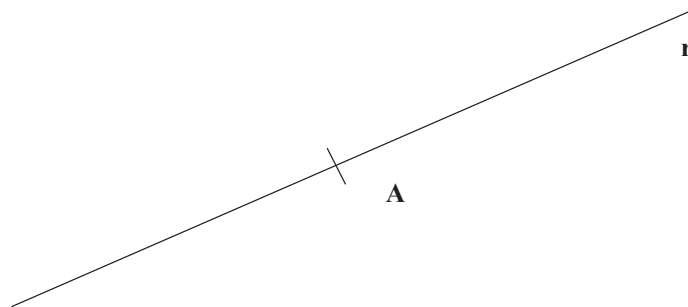
3.3. Traçado de perpendiculares e paralelas

3.3.1. Traçado de retas perpendiculares

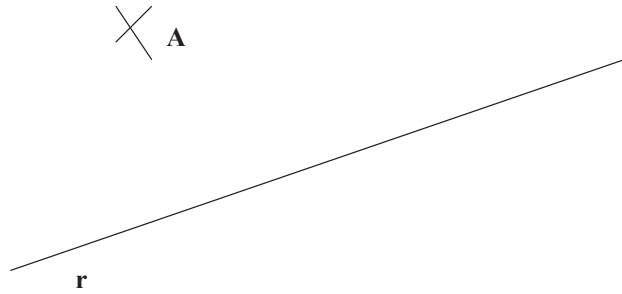
3.3.1.1. Por um ponto **A**, dado, traçar uma reta perpendicular à reta **r** dada.

Obs.: Utilizar o conceito de Mediatriz para resolução do problema.

3.3.1.1.a. **A** ∈ a reta **r** dada;



3.3.1.1.b. **A** ∉ a reta **r** dada;



3.3.1.2. Traçar, a partir da semi-reta **OA** dada, uma reta perpendicular:

3.3.2.1.a. Construção do ângulo de **90°**;



3.3.2.1.b. Teorema de **Pitágoras**;

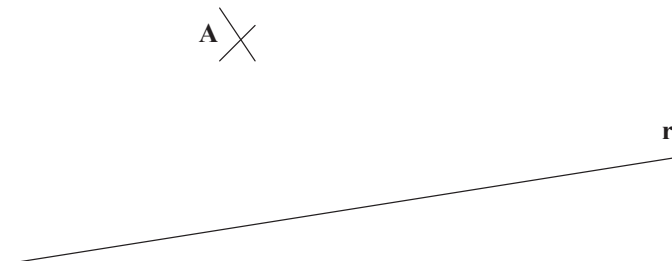
Obs.: Em um triângulo retângulo a relação entre os lados é: $c^2 = a^2 + b^2$, onde a menor relação inteira é 5, 3 e 4 respectivamente.



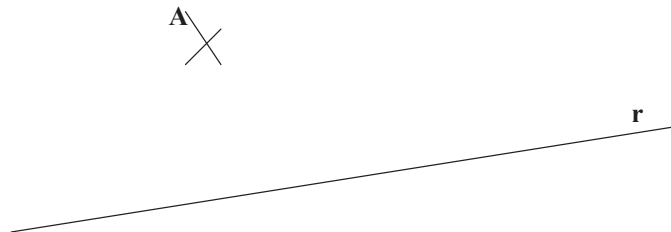
3.3.2. Traçado de retas paralelas:

3.3.2.1. Traçar uma reta paralela a **r** e que passe pelo ponto **A** dado.

3.3.2.1.a. Transporte de ângulos:



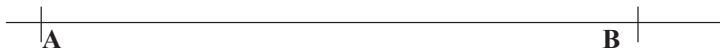
3.3.2.1.b. Processo dos quadriláteros:



3.4. Divisão de segmentos

3.4.1. Partes iguais

3.4.1.1. Dividir o segmento de reta **AB** em **quatro** partes iguais

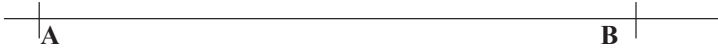


3.3.2.2. Dividir o segmento de reta **AB** em **n** partes iguais, onde:

3.4.1.2.a. **n=3**



3.4.1.2.b. $n=5$

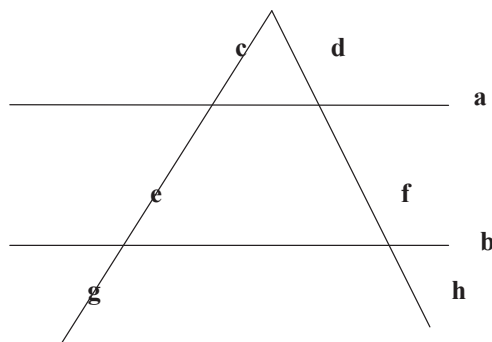


OBS.: Dividir um segmento de reta em n partes iguais é dividi-lo em n partes proporcionais a 1.

OBS.: TEOREMA DE TALES:

"Um feixe de retas paralelas determina sobre duas ou mais transversais quaisquer segmentos de uma proporcionais aos segmentos correspondentes nas outras". (Putnoki, 1989)

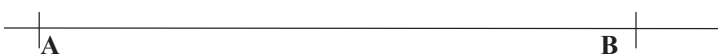
$$c:d :: e:f \quad \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad \frac{c}{e} = \frac{d}{f} \quad c:e :: d:f$$



3.4.2. Partes proporcionais

3.4.2.1. Dado o segmento de reta **AB**, dividi-lo em partes proporcionais aos segmentos de medidas $a=4,5\text{cm}$ e $b=3,0\text{cm}$.

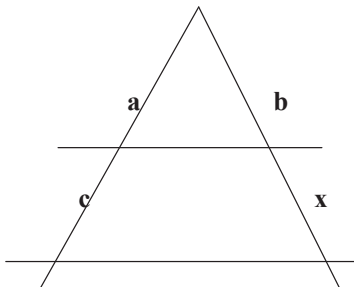
Obs.: Construa os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.



3.4.2.2. Determinar a quarta proporcional entre os segmentos dados:

$a=2,0\text{cm}$; $b=2,5\text{cm}$ e $c=3,0\text{cm}$.

Obs. 01: "Chama-se Quarta proporcional entre os segmentos a , b e c , citados nessa ordem, o segmento x que se obtém na proporção: $a:b::c:x$ ".



Obs.02: Construa os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

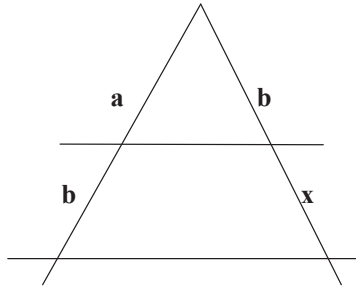
3.4.2.3. Dados os segmentos $a=1,5$; $b=2,0\text{cm}$ e $c=2,5\text{cm}$, determinar o segmento $y=(b.c)/a$.

Obs.: Construa os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

3.4.2.4. Dados **a** e **b**, determinar a terceira proporcional entre os segmentos dados.

a=1,5cm e **b**=2,5cm.

OBS.01: "Chama-se Terceira proporcional entre os segmentos **a** e **b**, citados nessa ordem, o segmento **x** que se obtém na proporção: **a:b::b:x**". (Putnoki, 1989)



Obs.02: Construa os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

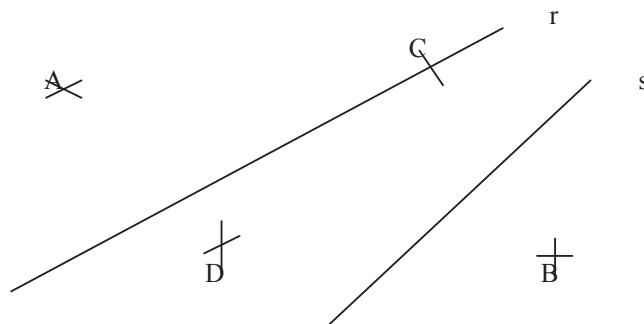
3.4.2.5. Determinar um segmento de reta $x=2/3$ do segmento de reta **AB**=5,0cm dado.

Obs.: Construa os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

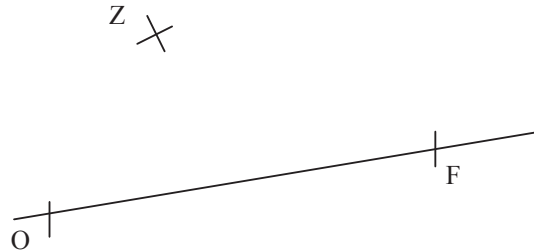
3.5. Exercícios

3.5.1. Dadas as retas (r) e (s) e os pontos (A), (B), (C) e (D). Pedem-se:

- (a) Pelo ponto (A) uma paralela a (r);
- (b) Pelo ponto (B) uma perpendicular a (s);
- (c) Pelo ponto (C) uma perpendicular a (r);
- (d) Pelo ponto (D) uma paralela a (s).



- 3.5.2. Dada a semi-reta OF e o ponto Z, não pertencente a referida semi-reta, faça o que se pede:
Trace uma reta perpendicular a semi-reta OF, a partir de sua origem;
Trace pelo ponto Z uma reta paralela a semi-reta OF.



- 3.5.3. Dado as semi-retas OA e OB, construa os ângulos de 120° e 75° , respectivamente.



- 3.5.4. Sabendo que o ângulo alfa mede 45° e o ângulo beta mede 90° , faça o que se pede:

- (a) Construa alfa e beta;
(b) Faça: $3 \times \text{alfa} - \text{beta}$.

Obs.: Desenhe cada ângulo dado para depois empregá-los na solução do problema.

- 3.5.5. Dados os segmentos de reta $m = 3,0\text{cm}$ e $n = 3,5\text{cm}$ e $p = 2,7$, Determinar o segmento de reta z tal que:

$$z = n.p/m.$$

Obs.: Desenhe cada segmento dado para depois empregá-los na solução do problema.

- 3.5.6. Dados os segmentos de reta $a=3,0\text{cm}$ e $b=3,5\text{cm}$. Determinar o segmento de reta x tal que:

$$x = b^2/a$$

Obs.: Desenhe cada segmento dado para depois empregá-los na solução do problema.

- 3.5.7. Traçar, à partir da origem de uma **semi-reta OA** qualquer, uma **reta perpendicular** a referida semi-reta, utilizando o conhecimento do **Teorema de Pitágoras**.

Obs.: Desenhe a **semi-reta OA** dada.

- 3.5.8. Traçar uma **reta paralela** a r e que passe pelo ponto A dados:

Obs.: Desenhe a reta r e o ponto A externo à r dados.

3.5.9. Determine a **mediatriz** do segmento de reta **AB=6cm** dado:

Obs.: Desenhe o segmento de reta **AB** dado.

3.5.10. **Dividir** o segmento de medida igual a **7cm** em **5(cinco)** partes proporcionais a **1(um)**.

Obs.: Desenhe o segmento dado para depois transporta-lo.

4. Polígonos

4.1. Definição

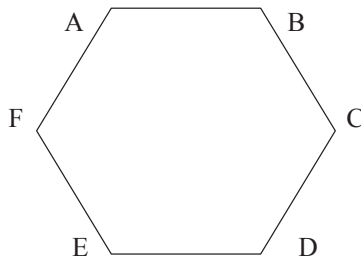
É uma figura plana, fechada, formada por segmentos de reta consecutivos não colineares.

Poli = vários

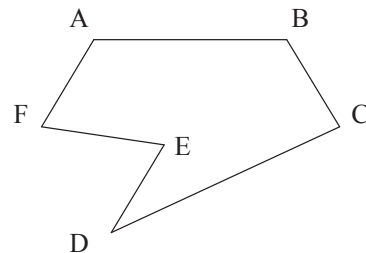
Gono = ângulos \Rightarrow Vários ângulos

4.2. Tipos

4.2.1.a. Convexo

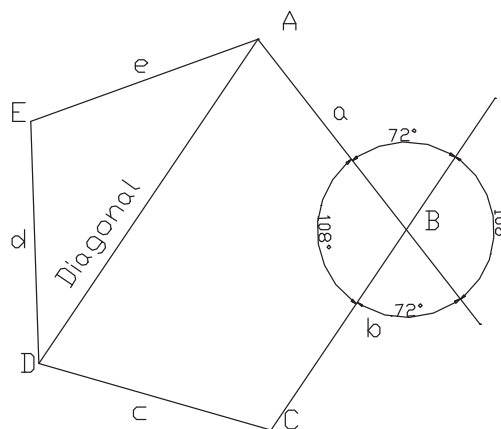


4.2.1.b. Côncavo



4.3. Elementos de um polígono

- Lados(a,b,c,d,e), Vértices(A,B,C,D,E) e ângulos internos(Ex.:108°) e externos(Ex.:72°);
- Perímetro: é a soma das medidas de seus lados; ($2P = a + b + c + d + e$)
- Diagonal: todo segmento com extremidades em dois vértices não-consecutivos de um polígono.



Obs.: Não se define ângulos externos para polígonos côncavos.

4.4. Nomenclatura

Número de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono
20	Icoságono

4.5. Polígono regular

Definição

Um polígono convexo é regular quando tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

Ex.:

Quadrilátero regular: Quadrado;

Hexágono regular;

Triângulo regular: Equilátero.

- a. O polígono que tem lados congruentes é denominado equilátero;
- b. O polígono que tem os ângulos congruentes é denominado equiângulo.

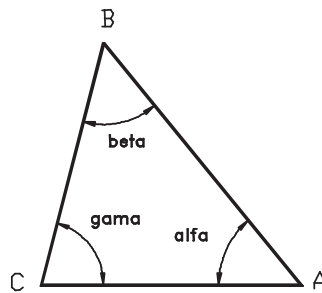
5. Triângulos e quadriláteros

5.1. Triângulos

5.1.1. Definição

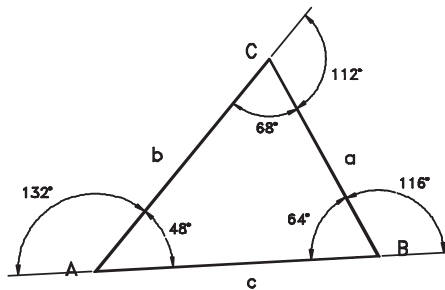
Triângulo é o polígono de três lados e três ângulos.

Obs.: Polígono é a reunião de uma poligonal fechada simples com o seu interior.



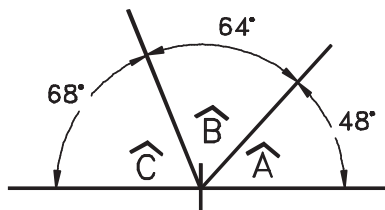
5.1.2. Elementos formadores

- Lados(a,b,c), Vértices(A,B,C) e ângulos internos(68° , 48° , 64°) e externos(132° , 116° , 112°);
- Perímetro: é a soma das medidas de seus lados; ($2P = a + b + c$)
- Área: é a medida da superfície ou região interna limitada pelos seus lados:

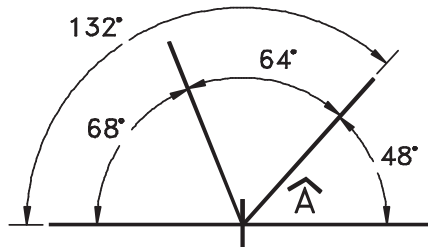


5.1.3. Teoremas:

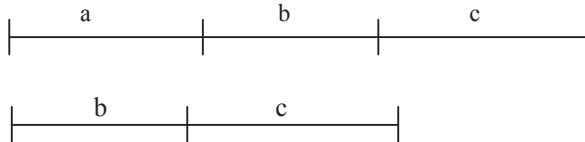
5.1.3.a. Num triângulo qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180° ;



5.1.3.b. Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo qualquer é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



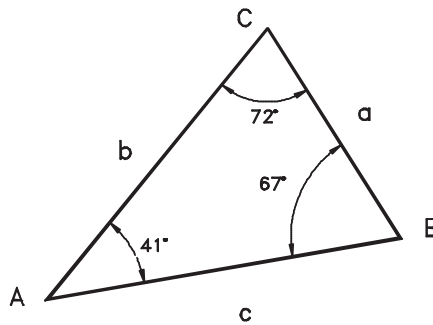
5.1.3.c Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois lados.



5.1.4. Classificação quanto à dimensão dos lados

5.1.4.a. Triângulo Escaleno: não possui lados congruentes: $a \neq b \neq c$

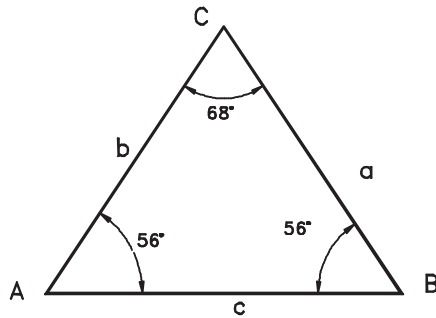
Obs.: Um triângulo que não possui lados congruentes não possui também ângulos internos congruentes.



5.1.4.b. Triângulo Isósceles: possui dois lados congruentes. $a \cong b$

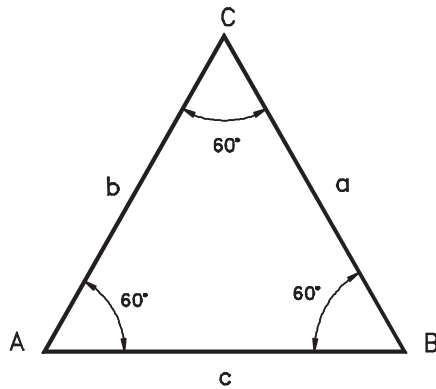
Obs.:

- 1ª) O ângulo compreendido entre os lados congruentes é o ângulo do vértice do triângulo isósceles;
- 2ª) O lado oposto ao ângulo do vértice é a base do triângulo isósceles;
- 3ª) Os ângulos da base são congruentes.



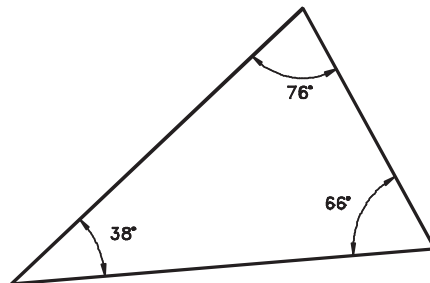
5.1.4.c. Triângulo Equilátero: possui os três lados congruentes. $a \cong b \cong c$

Obs.: Os três ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes. Daí se deduz que cada um deles mede 60° .



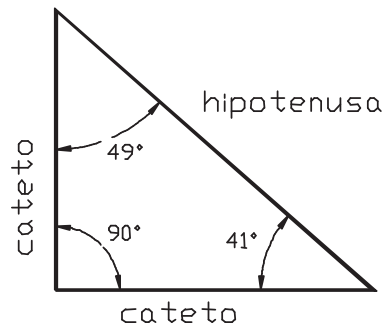
5.1.5. Classificação quanto à natureza dos ângulos

5.1.5.a. Triângulo Acutângulo: possui os três ângulos internos agudos;

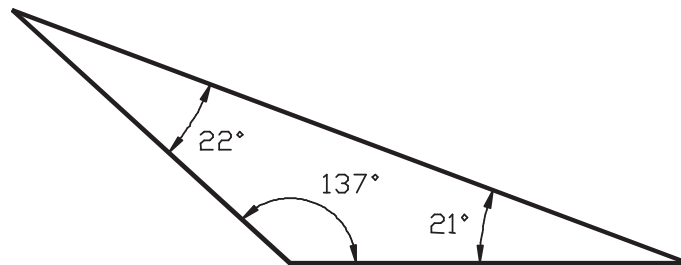


5.1.5.b. Triângulo Retângulo: possui um ângulo interno reto:

Obs.: Num Triângulo Retângulo o lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa, e os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos.

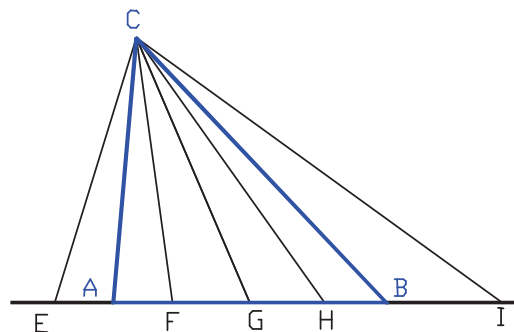


5.1.5.c. Triângulo Obtusângulo: possui um ângulo interno obtuso.



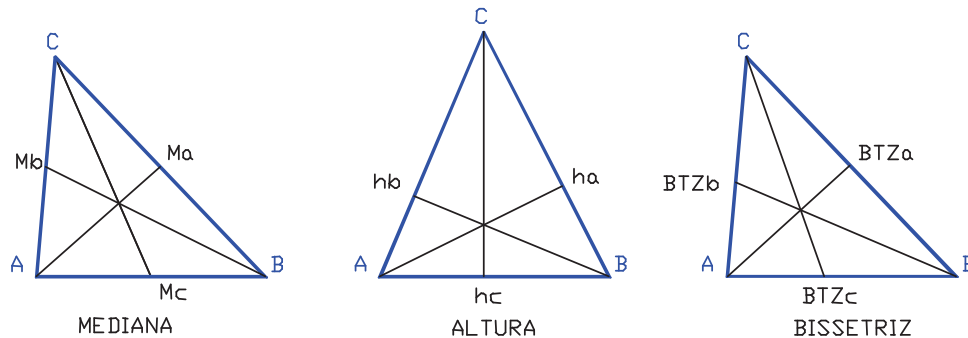
5.1.6. Cevianas

5.1.6.a. Definição: é todo segmento que tem extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice;



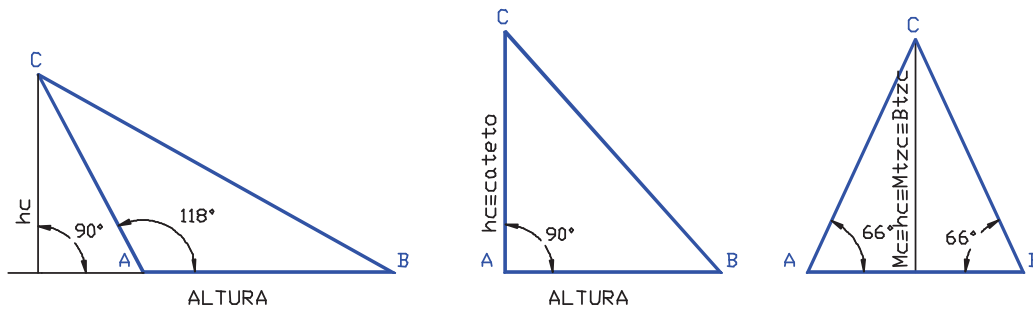
5.1.6.b. Cevianas notáveis

- 1ª) Mediana: é toda ceviana que tem extremidade no ponto médio de um lado;
- 2ª) Bissetriz interna: é toda ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes e congruentes;
- 3ª) Altura: é toda ceviana perpendicular a um lado ou ao seu suporte.



Obs.:

- a) A Altura é a única ceviana que pode ser externa (no triângulo obtusângulo), ou mesmo coincidir com um lado (no triângulo retângulo).
- b) A Mediana, a Bissetriz interna e a Altura, relativas a um mesmo vértice, são cevianas distintas, mas as três coincidem quando relativas à base de um triângulo isósceles, e nesse caso estão ainda contidas na mediatriz da base.

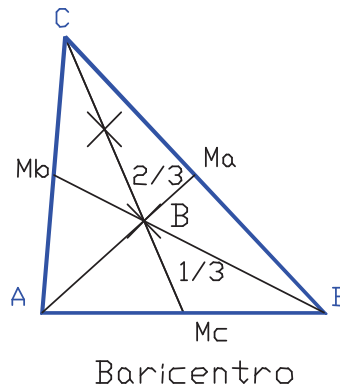


5.1.7. Pontos notáveis de um triângulo

Obs.: Para qualquer triângulo valem as seguintes propriedades: As três medianas, as três Bissetrizes internas, as retas suportes das três alturas e as mediatrizes dos lados concorrem num mesmo ponto. Esses pontos de encontro das cevianas notáveis e das mediatrizes são denominados pontos notáveis.

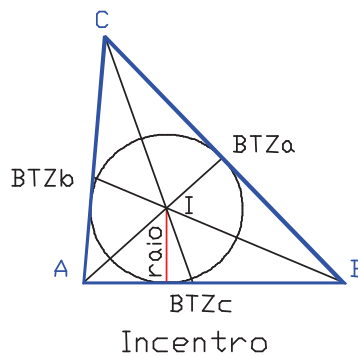
5.1.7.a. Baricentro: é o ponto onde concorrem as medianas de um triângulo qualquer, e está ligado ao centro de gravidade da figura.

Propriedade: O baricentro de um triângulo divide cada mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice.



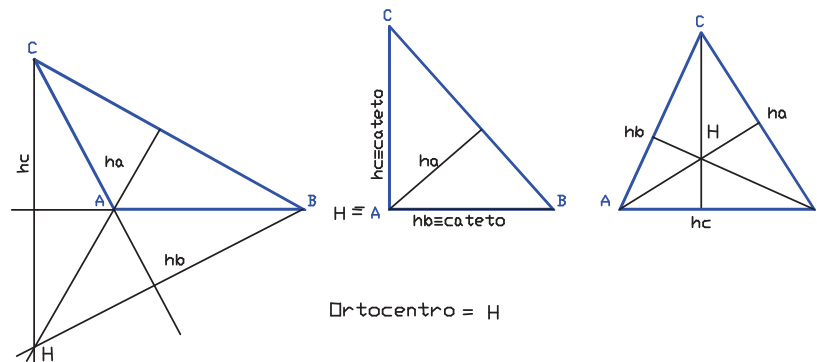
5.1.7.b. Incentro: é o ponto onde concorrem as bissetrizes internas de um triângulo qualquer.

Propriedade: O incentro é o centro da circunferência inscrita num triângulo.



5.1.7.c. Ortocentro: é o ponto onde concorrem as retas suportes das alturas de um triângulo qualquer.

Obs.: O Ortocentro pode ser interno (no Triângulo Acutângulo), externo (no triângulo obtusângulo) ou coincidente com um vértice (no triângulo retângulo).

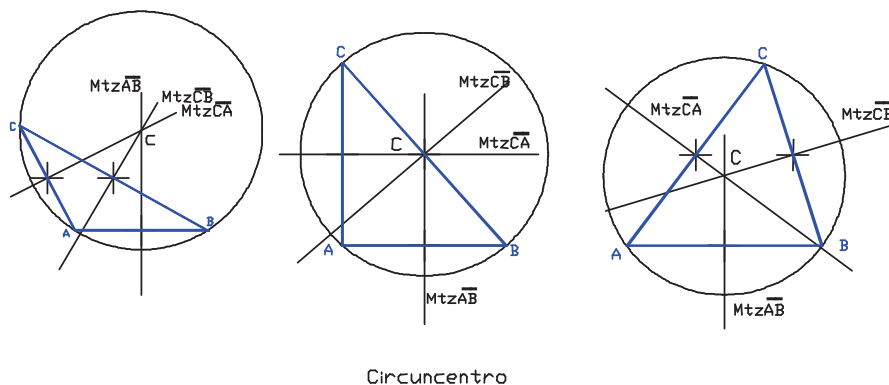


Orientação: Quando se trata de traçar as três medianas, as três bissetrizes ou as três alturas, basta construir duas delas, pois a terceira passa pelo vértice restante e pelo ponto de interseção das duas primeiras.

5.1.7.d. Circuncentro: é o ponto onde concorrem as mediatrizes dos lados de um triângulo qualquer.

Propriedade: O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo.

Obs.: O circuncentro pode ser interno (no Triângulo Acutângulo), externo (no triângulo obtusângulo) ou pertencer a um lado (no triângulo retângulo).



5.1.8. Construção

5.1.8.a. Introdução: Construir um triângulo equivale a determinar três pontos no plano;

5.1.8.b. Propriedade: Um triângulo fica bem determinado em forma e tamanho quando dele são conhecidos três elementos, sendo pelo menos um deles linear, isto é, um lado ou uma altura ou uma mediana, etc.

5.1.8.c. Casos particulares: (Triângulos notáveis)

1º) Triângulo retângulo: dado uma condição (um ângulo), são necessários dois elementos;

2º) Triângulo Isósceles: dado uma condição (dois lados congruentes), são necessários dois elementos;

3º) Triângulo Equilátero: dado duas condições (ângulos e lados congruentes), é necessário um elemento;

5.1.8.d. Condição de existência de um triângulo: “A medida de cada um de seus lados é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados”.

5.1.8.e. Normas gerais para a construção de um triângulo:

1ª) Imagina-se o problema já resolvido e faz-se uma figura-rascunho onde comparecem, além do contorno do triângulo propriamente dito, todos os elementos dados (alturas, medianas, etc.);

2ª) Destacam-se os elementos dados com uma tonalidade mais acentuada;

3ª) Estuda-se a figura-rascunho em busca de propriedades que permitam obter os vértices;

4ª) Determinadas tais propriedades, passa-se à construção.

5.1.9. Exercícios

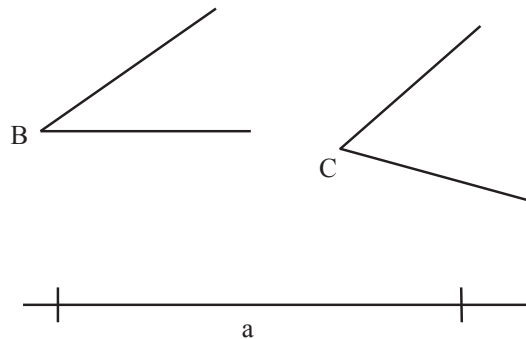
5.1.9.1. Dados os lados **a**, **b**, e **c**, construa um **Triângulo Qualquer**.

Dados: **a** = 5cm, **b** = 3cm e **c** = 7cm.

Obs.: Desenhe os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

5.1.9.2. Construir um **Triângulo**, conhecendo um lado **a** e os dois ângulos adjacentes **B** e **C**.

Dados:

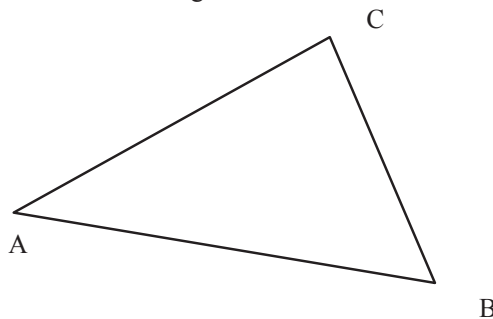


5.1.9.3. Construir um **Triângulo**, conhecendo dois lados **a** e **c** e o ângulo compreendido entre eles.

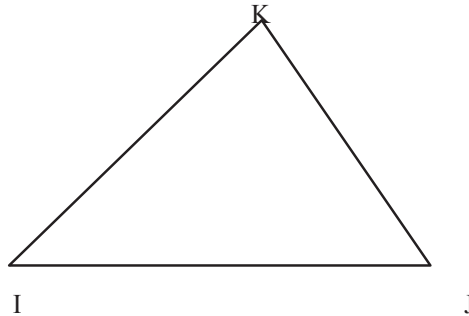
Dados: **a**=4,0cm, **c**=3,5cm e **beta**=75°

Obs.: Desenhe os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

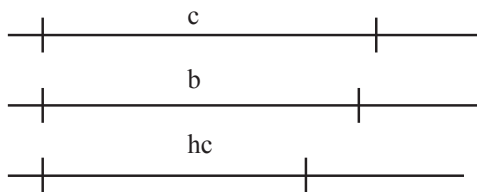
5.1.9.4. **Inscrever** uma Circunferência num Triângulo dado:



5.1.9.5. **Circunscrever** uma Circunferência num Triângulo dado:



5.1.9.6. Construir um **Triângulo Qualquer**, sendo dados dois lados e a altura relativa a um deles.
Dados:



5.1.9.7. Construir um **triângulo retângulo** conhecendo-se a **hipotenusa** e um **cateto**.
Dados: $h=6,0\text{cm}$ e $a=4,0\text{cm}$

Obs.: Desenhe os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

5.1.9.8. Dados os lados $a=3,2\text{cm}$, $b=2,8\text{cm}$, e $c=4,0\text{cm}$, construa um **Triângulo Qualquer**.

Obs.: Desenhe os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

5.1.9.9. Seja $I=11,5\text{cm}$; $a_1=3,5\text{cm}$; $b_1=4,5\text{cm}$ e $c_1=3\text{cm}$, o **perímetro**, os **segmentos proporcionais** aos lados a , b e c de um triângulo, respectivamente, construa-o.

Obs.: Desenhe os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

5.1.9.10. Construa o **triângulo ABC**, cujos lados são $a=4,5\text{cm}$; $b=6,0\text{cm}$ e $c=3,0\text{cm}$ e, em seguida determine suas cevianas **NOTÁVEIS** a partir de um único vértice.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.1.9.11. Construir um **Triângulo Equilátero**, sabendo que seu **perímetro** mede $9,5\text{cm}$.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

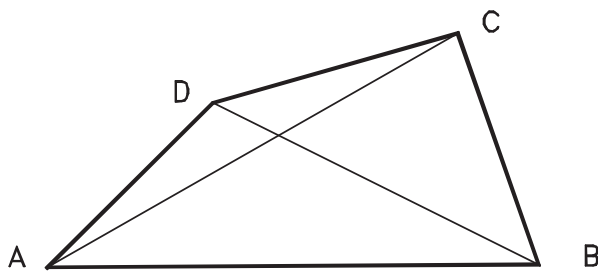
5.2. Quadriláteros

5.2.1. Conceito

Quadrilátero é o polígono de quatro lados.

OBS.: O segmento de reta definido por dois vértices não consecutivos, denomina-se Diagonal.

5.2.2. Trapezoíde



AC e BD - diagonais;

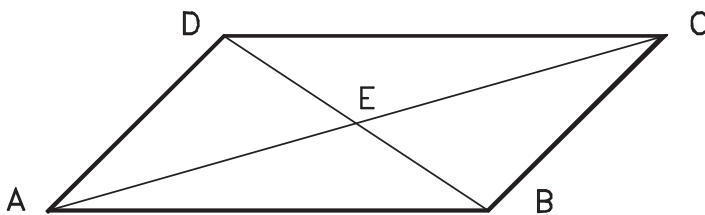
$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ.$$

5.2.3. Classificação dos Quadriláteros:

- a. Paralelogramo: Retângulo; Quadrado; Losango e Rombóide.
- b. Trapézio: Trapézio Escaleno, Trapézio Isósceles e Trapézio Retângulo.

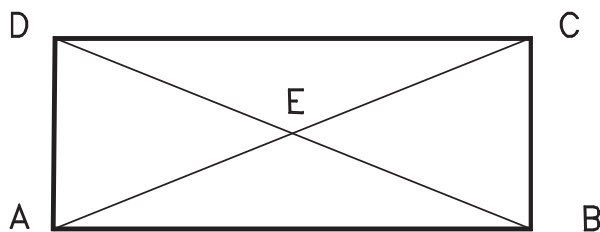
5.2.4. Paralelogramo

É o quadrilátero de lados opostos paralelos e diagonais que se cruzam no ponto médio.



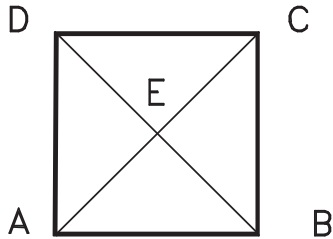
AB//CD e AD//BC

5.2.4.a. Retângulo:



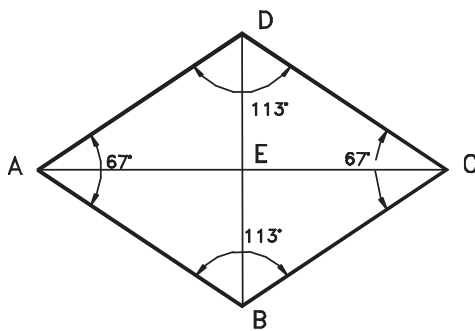
$$\forall A = \forall B = \forall C = \forall D = 90^\circ; AC = BD.$$

5.2.4.b. Quadrado:



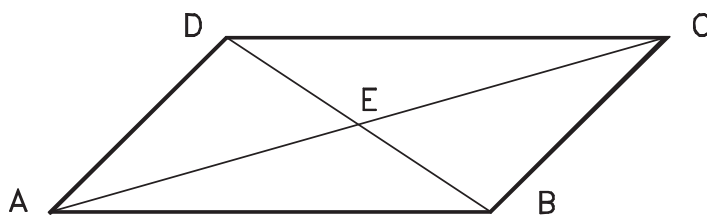
$$\begin{aligned} \forall A = \forall B = \forall C = \forall D = 90^\circ; \\ AB = BC = CD = DA; \\ AC = BD. \end{aligned}$$

5.2.4.c. Losango:



$$\begin{aligned} AB = BC = CD = DA; \\ \forall A = \forall C \text{ e } \forall B = \forall D; \\ BD = AC; \\ AE = EC \text{ e } BE = ED. \end{aligned}$$

5.2.4.d. Rombóide (PARALELOGRAMO propriamente dito).



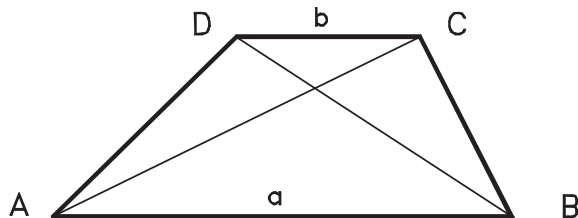
$$\forall A = \forall C \text{ e } \forall B = \forall D;$$

$$AE = EC \text{ e } BE = ED;$$

$$AB = CD \text{ e } AD = BC.$$

5.2.5. Trapézio

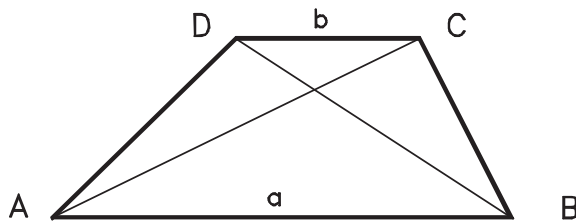
É o quadrilátero que apresenta apenas dois lados paralelos, chamados de bases:



Base maior: AB.

Base menor: CD.

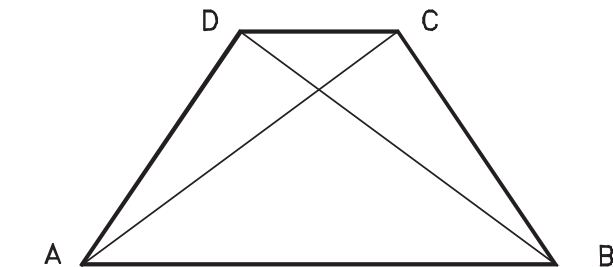
5.2.5.a. Trapézio Escaleno : é aquele em que todos os lados e ângulos possuem medidas diferentes.



$$AD \neq BC$$

$$\forall A \neq \forall B \neq \forall C \neq \forall D$$

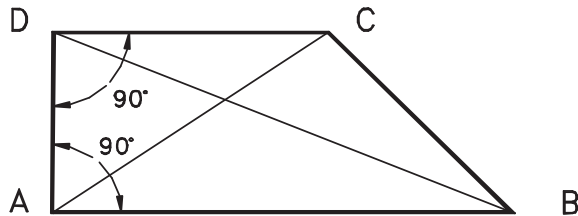
5.2.5.b Trapézio Isósceles: é aquele em que os lados não paralelos são iguais.



$$AD = BC;$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B \text{ e } \sphericalangle C = \sphericalangle D.$$

5.2.5.c Trapézio Retângulo: é aquele que apresenta dois ângulos retos.



$$\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ.$$

5.2.6. Construção

5.2.6.1 Introdução:

Um quadrilátero pode ser entendido como uma composição de dois triângulos. Para construí-lo é necessário conhecer CINCO elementos (de um quadrilátero), dos quais, pelo menos um deve ser linear. Com TRÊS deles, constrói-se um dos Triângulos em que o quadrilátero fica dividido por uma de suas diagonais, e com os outros DOIS determina-se o QUARTO vértice.

5.2.6.2 Para os QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS:

5.2.6.2.a. Trapézio: 4 dados para construí-lo, pois 1 já é conhecido, $AB \parallel CD$;

5.2.6.2.b. Paralelogramo Qualquer: 3 dados para construí-lo, pois 2 já são conhecidos, $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$;

5.2.6.2.c. Retângulo: 2 dados para construí-lo, pois 3 já são conhecidos, $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ e que seus ângulos são retos;

5.2.6.2.d. Losango: 2 dados para construí-lo, pois 3 já são conhecidos, $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ e os lados são congruentes;

5.2.6.2.e. Quadrado: 1 dado para construí-lo, pois 4 já são conhecidos, $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, os lados são congruentes e os ângulos são retos.

OBS.: “As técnicas de construção de quadriláteros são as mesmas utilizadas em Triângulos, isto é, imagina-se o problema já resolvido e faz-se uma figura rascunho onde se destaca os elementos dados”. (Putnoki, 1989)

5.2.7. Exercícios

5.2.7.1 Construir um Quadrado, sabendo-se que o **lado** é igual a $\frac{1}{3}$ do segmento $AB=11,5\text{cm}$ dado.
Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.2 Construir um Quadrado, conhecendo-se a sua diagonal= $4,5\text{cm}$.
Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.3 Construir um Quadrado, dado o **lado**= $3,0\text{cm}$.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.4 Construir um Retângulo, sabendo-se que a **base** é igual a 2,5 vezes maior que a **altura** $h=2,3\text{cm}$.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.5 Construir um Losango, dados o **perímetro**=16,0cm e a **diagonal maior**=6,5cm.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.6 Construir um Retângulo, dados a **base**=3,5cm e a **altura**=2,5cm.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.7 Construir um Losango, dados o **lado**=4,3cm e a **diagonal maior**=6,5cm.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.8 Construir um Trapézio Retângulo, conhecendo-se: **base1**=3,2cm; **base2**=5,2cm e **altura**=3,8cm.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.9 Construir um **Trapézio**, dados: **lado1**=3,2cm; **lado2**=3,5cm; **base1**=4,0cm e **base2**=6,2cm.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.10 Construir um **Trapézio Isósceles**, dados: **altura**=2,5cm; **base1**=4,2cm e **base2**=6,3cm.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.11 Construir um **Trapézio Isósceles**, dados: **diagonal**=6,0cm; **base1**=4,2cm e **base2**=6,3cm.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.12 Traçar um **Paralelogramo**, dados: um **ângulo**= $37,5^{\circ}$; um **lado**=4,6cm e a **diagonal oposta**=3,5cm ao ângulo dado.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.13 Traçar um Paralelogramo, dados: um **ângulo**= $37,5^{\circ}$; um **lado**=4,6cm e a **diagonal**=9,5cm que parte da origem do ângulo dado.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

5.2.7.14 Construir um Paralelogramo, conhecendo-se: **lado1**=5,2cm; **lado2**=3,1cm e o **ângulo**= 30° por eles formados.

Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema.

6. Circunferência, Tangência e Concordância

6.1. Circunferência

6.1.1. Conceito

É o lugar geométrico em que todos os pontos e somente eles tem a mesma distância do centro (O), que é o raio.

6.1.2. Elementos

6.1.2.a. Corda: qualquer segmento que tem as extremidades em dois pontos de uma circunferência;

6.1.2.b. Diâmetro: qualquer corda que passe pelo centro de uma circunferência;

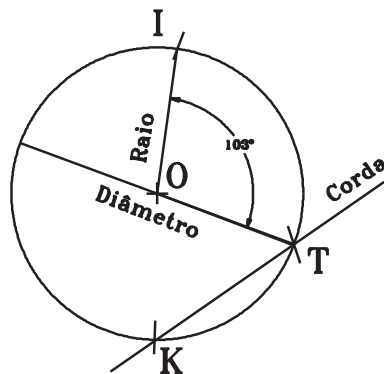
6.1.2.c. Ângulo central: ângulo cujo vértice é o centro da circunferência;

6.1.2.d. Arco: Intersecção da circunferência com um ângulo central qualquer.

Obs.: medida de um arco: grau

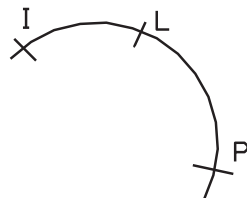
Arco de volta inteira: 360°

Arco de meia volta: 180°

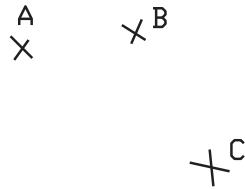


6.1.3. Determinação do centro da circunferência

6.1.3.a. Traçar as mediatrizes de duas de suas cordas



6.1.3.b. Traçar a circunferência determinada por três pontos A, B e C (03 pontos não colineares determinam uma circunferência).

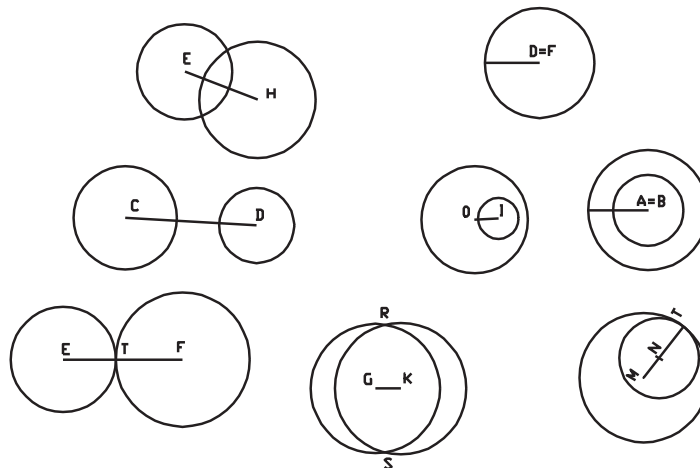


6.1.4 Posições relativas entre reta e circunferência

- 6.1.4.a. Exterior: reta e circunferência não possuem ponto comum;
- 6.1.4.b. Tangente: reta e circunferência possuem um ponto comum (ponto de tangência);
- 6.1.4.c. Secante: reta e circunferência possuem dois pontos comuns;

6.1.5 Posições relativas entre circunferências

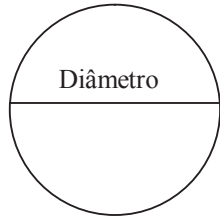
- 6.1.5.a. Exteriores: não possuem ponto comum;
- 6.1.5.b. Tangentes externas: têm um ponto comum e o centro de uma não está na região interior da outra;
- 6.1.5.c. Secantes externas: têm dois pontos comuns e o centro de uma não está na região interior à outra;
- 6.1.5.d. Secantes internas: têm dois pontos comuns e o centro de uma está na região interior à outra;
- 6.1.5.e. Tangentes internas: têm um ponto comum e o centro de uma está na região interior à outra;
- 6.1.5.f. Excêntrica: não existe ponto comum e uma está na região interior da outra;
- 6.1.5.g. Concêntricas: têm raios de medidas diferentes e centros coincidentes;
- 6.1.5.h. Coincidentes: têm raios de mesma medida e centros coincidentes.



6.1.6 Círculo

- 6.1.6.a. Definição: é a reunião da circunferência com a região interior a ela;

6.1.6.b. Semicírculo: é cada uma das partes do círculo limitada por um diâmetro.

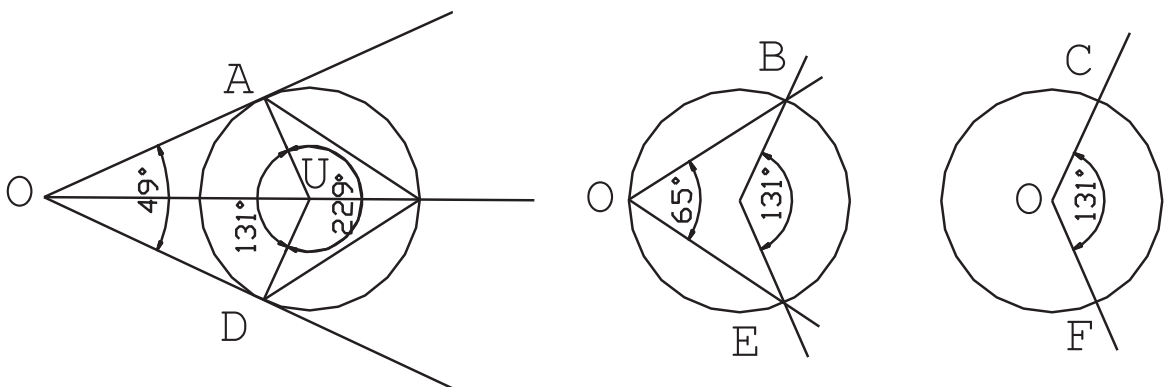


6.1.7 Ângulos na circunferência

6.1.7.a. Ângulo central: é o ângulo que têm o centro da circunferência como vértice;

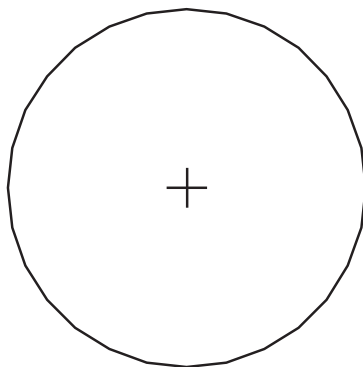
6.1.7.b. Ângulo inscrito: é aquele cujo vértice pertence a circunferência e cujos lados são semi-retas secantes a mesma;

6.1.7.c. Ângulo circunscrito: é aquele cujo vértice é exterior à circunferência e seus lados são semi-retas tangentes a ela.

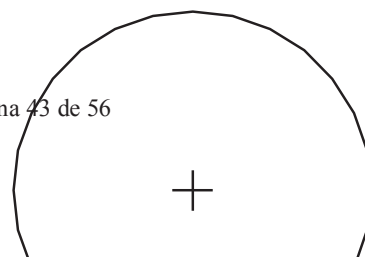


6.1.8 Divisão de circunferência

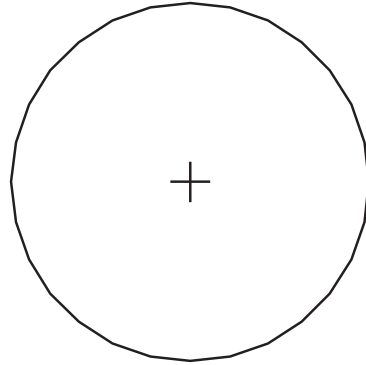
6.1.8.a. Divisão em números pares: 2, 4, 8, 16, 32, etc.



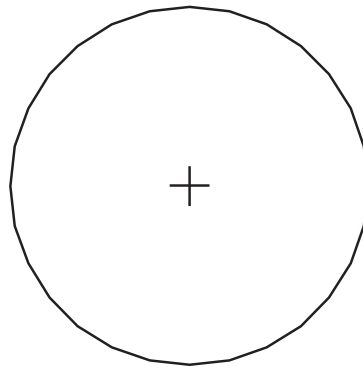
6.1.8.b. Divisão em 06 partes;



6.1.8.c. Divisão em 05 partes;



6.1.8.d. Divisão em partes iguais: processo geral (Rinaldini).

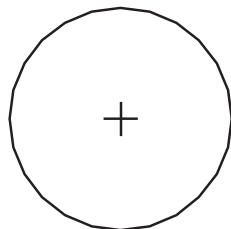


6.1.9 Retificação de circunferência

Processo aproximado:

6.1.9.a. Processo de Arquimedes:

$$C = 2 \times \pi \times r = 360^\circ \Rightarrow C = 2 \times r \times 3,14 \Rightarrow C = d \times \frac{22}{7} \Rightarrow C = 3d + \frac{d}{7}$$



6.1.10 Exercícios

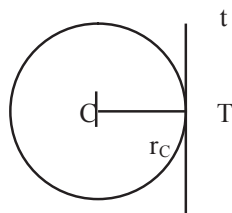
Obs.: Desenhe o elemento dado para depois empregá-lo na solução do problema;
Utilize o par de esquadros para o traçado de retas paralelas e perpendiculares.

- 6.1.10.a. Inscrever um **Quadrado** em uma circunferência cujo **raio** vale $1/5$ do segmento de reta **a=12,0cm**, dado.
- 6.1.10.b. Inscrever um **Eneágono Regular**, utilizando o **Processo Geral**, em uma circunferência cujo **raio** vale $1/3$ do segmento de reta **a=8,5cm**, dado.
- 6.1.10.c. Inscrever um **Dodecágono Regular** em uma circunferência cujo **raio** vale $1/3$ do segmento de reta **a=8,5cm**, dado.
- 6.1.10.d. Inscrever um **Pentágono**, um **Hexágono** e um **Decágono Regular** em circunferências distintas, cujos raios são proporcionais aos segmentos de reta **a=3,0cm**; **b=3,5cm** e **c=4,6cm**, respectivamente. Além de a soma de suas medidas(medidas dos raios) ser igual a **8,6cm**.
- 6.1.10.e. Retificar uma circunferência cujo raio é igual a $1/2$ do segmento de reta **a=4,2cm** dado, pelo **Processo de Arquimedes**.

6.2. Tangência

6.2.1. Conceito

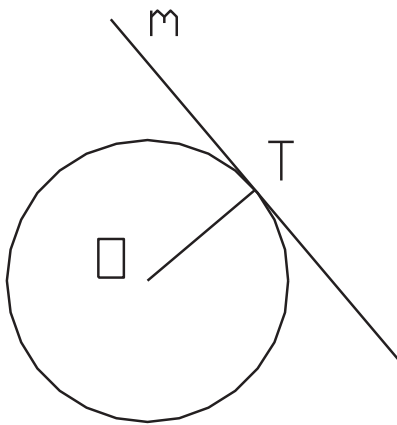
A geometria nos ensina que o menor segmento que se pode traçar de um ponto a uma reta está situado sobre a perpendicular do referido ponto à reta(distância). Este teorema tem aplicação no estudo das posições relativas entre uma reta e uma circunferência. Neste caso, uma reta tem um só ponto comum com a circunferência quando sua distância ao centro é igual ao raio. Então diz-se que a reta é tangente à circunferência; o ponto comum em que a tangente toca a curva chama-se ponto de contato ou ponto de tangência, o raio neste ponto chama-se normal à reta tangente.



6.2.2. Tipos de tangência

6.2.2.a Entre circunferência e reta

Sabemos que reta tangente é aquela que tem apenas um ponto em comum com a circunferência. Esse ponto é denominado ponto de tangência e toda reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Esse raio é denominado de normal da tangente.



O é centro da circunferência.

$\left\{ \begin{array}{l} OT \text{ é raio da circunferência.} \\ OT \text{ é normal.} \\ OT \perp m \end{array} \right.$

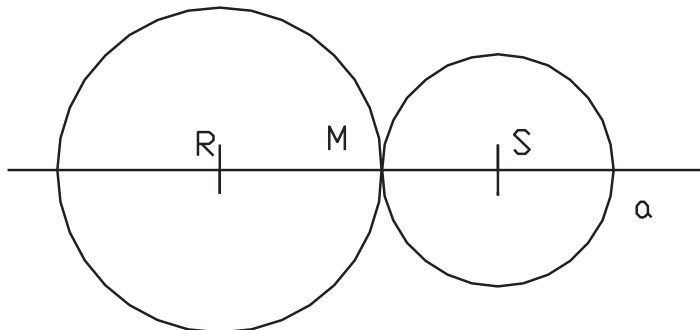
m é tangente a circunferência.

T é ponto de tangência.

6.2.2.b Entre duas circunferências.

- Sabemos ainda que duas circunferências são tangentes quando têm apenas um ponto comum, que também é denominado ponto de tangência.
- Nas circunferências tangentes os centros e o ponto de tangência são alinhados, ou seja, são colineares.
- As circunferências tangentes podem ser internas ou externas.
- Uma circunferência é interna quando seu centro está na região interna de outra circunferência.
- Uma circunferência é externa quando seu centro está na região externa de outra circunferência.

Tangentes externas



R é centro.

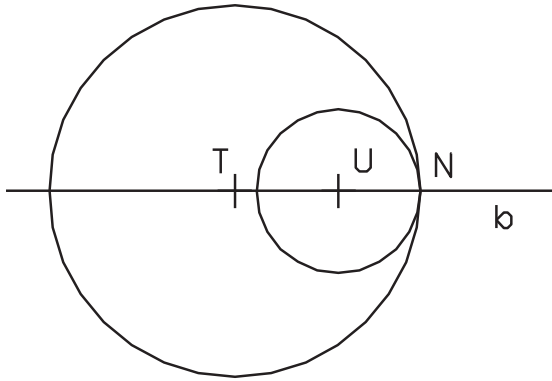
S é centro.

$R \in a; S \in a; M \in a$

M é ponto de tangência

A circunferência de centro S é tangente externa da circunferência de centro R.

Tangentes internas

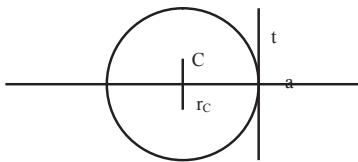


T é centro.
 U é centro.
 $T \in b$; $U \in b$; $N \in b$
 N é ponto de tangência.
 O centro U pertence à região interna da
 circunferência de centro T.

6.2.3. Regras de tangência

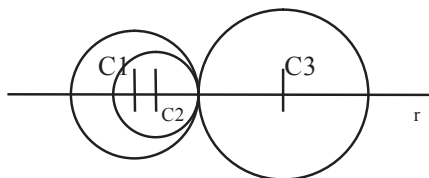
6.2.3.a Entre circunferência e reta:

- a. Centro da circunferência e o ponto de tangência estão em uma mesma reta suporte;
- b. A reta tangente e o raio formam 90° no ponto de tangência.



6.2.3.b Entre circunferências:

- a. Os centros das circunferências e o ponto de tangência estão em uma mesma reta suporte;
- b. As circunferências tangentes podem ser internas(C1 e C2) ou externas(C1 e C3 ou C2 e C3).

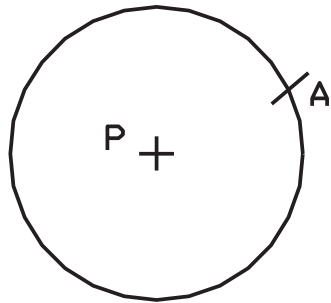


$$\begin{aligned} C1C2 &= R1 - R2 \\ C1C3 &= R1 + R3 \\ C2C3 &= R2 + R3 \end{aligned}$$

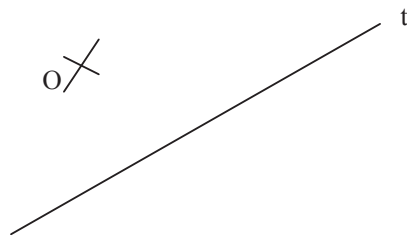
6.2.4. Construção

6.2.4.1 Traçado de retas tangentes

6.2.4.1.a Dada a circunferência de centro **P**, traçar a tangente **m** que passa pelo ponto **A**.

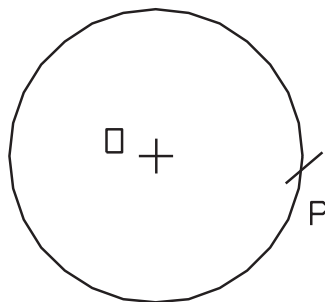


6.2.4.1.b Dada a reta **t** e o ponto **O** não-pertencente a **t**, construir a circunferência de centro **O** e tangente à reta **t**.

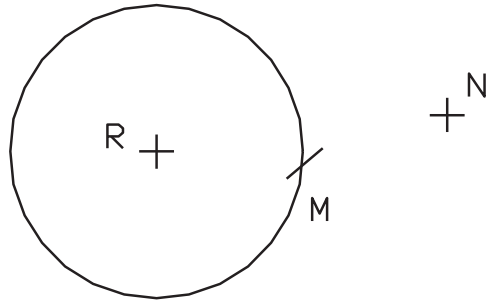


6.2.4.2 Traçado de circunferências tangentes

6.2.4.2.a Dada a circunferência de centro **O** e ponto **P** pertencente a ela, construir uma circunferência externa a essa circunferência, sabendo que o **raio** mede 1,5 cm e **P** é ponto de tangência das duas circunferências.



- 6.2.4.2.b Construir a circunferência tangente externa à circunferência de centro **R**, de modo que passe pelos pontos **M** e **N**, e que **M** seja ponto de tangência.



6.2.5. Exercícios

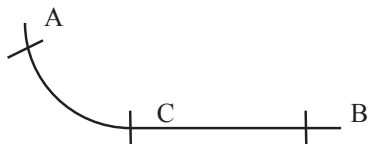
Obs.: Construa os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

- 6.2.5.1 Dados os pontos **M** e **P**, construa a circ(**M**; **MP**) e a reta tangente **r**, sabendo que **P** é o ponto de tangência.
- 6.2.5.2 Dada a reta **m** e o ponto **T**, construa a circunferência de centro **T** de modo que **m** seja tangente a essa circunferência.
- 6.2.5.3 Dada a reta **t**, construa o par de circunferências tangentes à reta **t**, sabendo que **M** é o ponto de tangência, o raio de uma delas é igual a 1,5cm e o da outra é igual a 2,5cm.
- 6.2.5.4 Trace a circ(**G**; **GH**) tangente externa à circ(**J**; **JI**), sabendo que os pontos **G** (2; 2), **H** (-2; 4) e **I** (-8; 3) são dados e que **H** é ponto de tangência.
- 6.2.5.5 Trace a circunferência (**M**; 3,5cm) e a circ(**N**; 2,5cm) tangente interna àquela circunferência.
- 6.2.5.6 Trace uma reta horizontal **a** e um ponto **M** de modo que **a** dist(**M**; **a**)=4,5cm. Construa a circ(**M**; 1,5cm) tg. interna à circ(**N**; 3,5cm), sabendo que esta também é tg. à reta **a**.

6.3. Concordância

6.3.1. Conceito

Concordar duas linhas de mesma ou de diferente espécie é reuni-las de modo tal que nos pontos de encontro não haja fratura. Ou seja, a passagem de uma linha para outra é feita harmoniosamente.

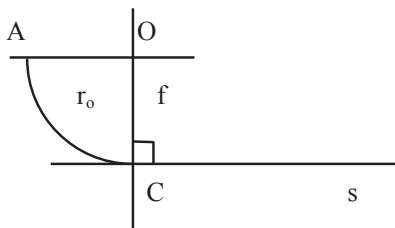


Obs.: As concordâncias nada mais são que aplicações dos casos de tangência, passando o ponto de tangência a se chamar **ponto de concordância**, e o centro de cada circunferência tangente às retas ou a outras circunferências a se chamar **centro de concordância**. Vamos observar.

6.3.2. Regras de concordância

6.3.2.1 Entre arco e reta

- A reta é tangente ao arco no ponto de concordância.
- centro do arco(O) e o ponto de concordância(C) estão em uma mesma reta suporte(f).
- A reta(s) e o raio do arco(r_o) formam 90° no ponto de concordância(C);

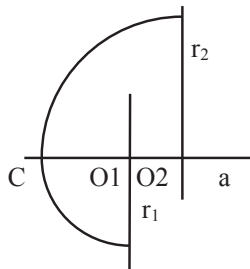


6.3.2.2 Entre arcos

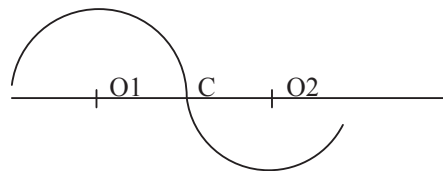
Os arcos admitem num ponto qualquer, uma tangente comum.

Os centros dos arcos(O_1 e O_2) e o ponto de concordância(C) estão em uma mesma reta suporte(a);

6.3.2.2.a. Mesmo sentido

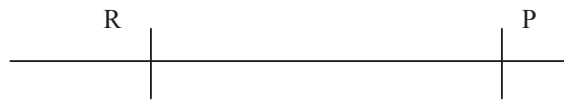


6.3.2.2.b. Sentidos opostos



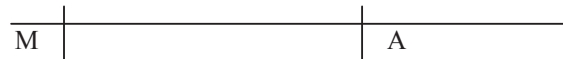
6.3.3. Construção

6.3.3.1 Concordar a semi-reta **PR** com o arco de circunferência de 2,5 cm de **raio**, sabendo que **P** é o ponto de concordância.



6.3.3.2 Concordar a semi-reta **MA** com um arco que passa pelo ponto **P**.

P X



6.3.3.3 Concordar o arco da circ (M;AM) com o arco da circunferência de 3,5 cm de raio, sabendo que **A** é o ponto de concordância.

- arcos concordantes de mesmo sentido;
- arcos concordantes de sentidos opostos.



6.3.4. Exercícios

Obs.: Construa os elementos dados para depois empregá-los na solução do problema.

6.3.4.1 Concorde o arco dado **arc (A; 3,0)** com outro de raio de medida igual a 2,0cm. Sabe-se que **N** é o ponto de concordância e que o arco concordante tem sentido oposto ao arco dado.

6.3.4.2 Concorde o arco de centro **F (-1; 2)** com um arco que passe pelo ponto **R (-1; -1)**. Sabe-se que **I (3; 1)** é o ponto de concordância e que o arco concordante tem o mesmo sentido do arco dado.

6.3.4.3 Trace uma semi-reta vertical **AM** e faça a concordância dessa semi-reta com um arco de circunferência com raio igual a 2,5cm.

6.3.4.4 Trace uma semi-reta horizontal **RE** e um ponto **P**, sabendo que a $\text{dist}(R; P)=3,0\text{cm}$ e a $\text{dist}(RE; P)=1,5\text{cm}$. Faça a concordância da semi-reta **RE** com o arco de circunferência que passe por **P**.

6.3.4.5 Trace o arco **MN** da circ(G; 3,0cm) e faça a concordância desse arco com uma semi-reta horizontal **MR**.

- 6.3.4.6 Trace o arco **PQ** da circ(A; 3,5cm) e faça a concordância com o arco que tem raio de 2,0cm. Sabe-se que **Q** é o ponto de concordância; o arco concordante tem o mesmo sentido do arco **PQ**; o segmento de reta **QA** é vertical.

BIBLIOGRAFIA

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**. São Paulo: ed. Scipione, vol. I e 2 , 1ª edição, 1989.

CARVALHO, Benjamin de A. **Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro: ed. Ao Livro Técnico, 3ª edição, 1993.

PINTO, Nilda Helena S. Corrêa. **Desenho Geométrico**. São Paulo: ed. Moderna, vol. 1, 2, 3 e 4, 1ª edição, 1991.