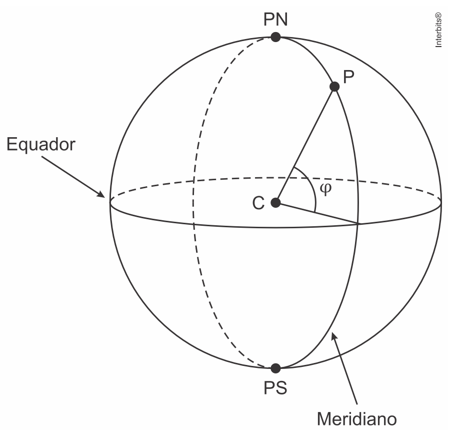
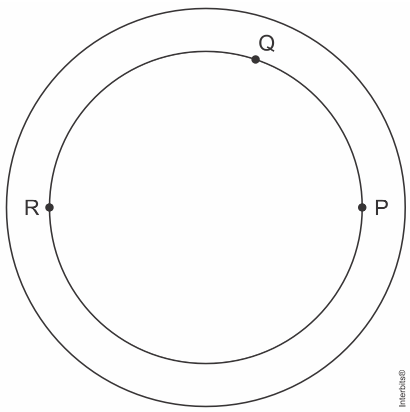
1. (ENEM) As coordenadas usualmente utilizadas na localização de um ponto sobre a superfície terrestre são a latitude e a longitude. Para tal, considera-se que a Terra tem a forma de uma esfera. Um meridiano é uma circunferência sobre a superfície da Terra que passa pelos polos Norte e Sul, representados na figura por PN e PS. O comprimento da semicircunferência que une os pontos PN e PS tem comprimento igual a 20.016 km. A linha do Equador também é uma circunferência sobre a superfície da Terra, com raio igual ao da Terra, sendo que o plano que a contém é perpendicular ao que contém qualquer meridiano. Seja P um ponto na superfície da Terra, C o centro da Terra e o segmento $\overline{PC}$ um raio, conforme mostra a figura. Seja φ o ângulo que o segmento $\overline{PC}$ faz com o plano que contém a linha do Equador. A medida em graus de φ é a medida da latitude de P. Suponha que a partir da linha do Equador um navio viaja subindo em direção ao Polo Norte, percorrendo um meridiano, até um ponto P com 30 graus de latitude. Quantos quilômetros são percorridos pelo navio?



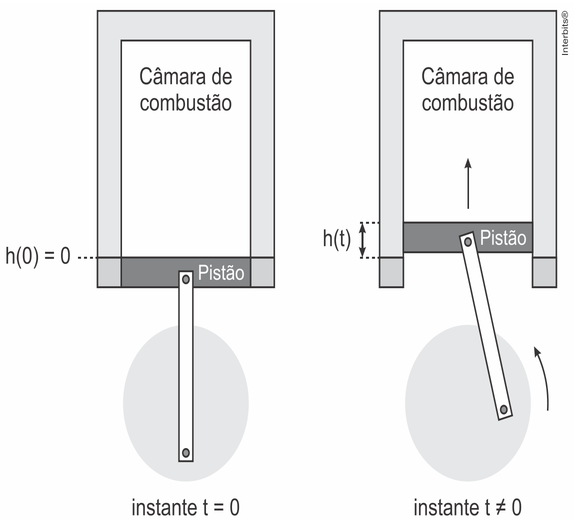
a) 1.668 b) 3.336 c) 5.004 d) 6.672 e) 10.008

2. (ENEM) Uma pista circular delimitada por duas circunferências concêntricas foi construída. Na circunferência interna dessa pista, de raio $0,3\text{ km}$, serão colocados aparelhos de ginástica localizados nos pontos P, Q e R, conforme a figura. O segmento RP é um diâmetro dessa circunferência interna, e o ângulo $P\hat{R}Q$ tem medida igual a $\frac{\pi}{5}$ radianos. Para uma pessoa ir do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna no sentido anti-horário, ela percorrerá uma distância, em quilômetro, igual a



a) $0,009\pi$ b) $0,03\pi$ c) $0,06\pi$ d) $0,12\pi$ e) $0,18\pi$

3. (ENEM) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura. A função $h(t) = 4 + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

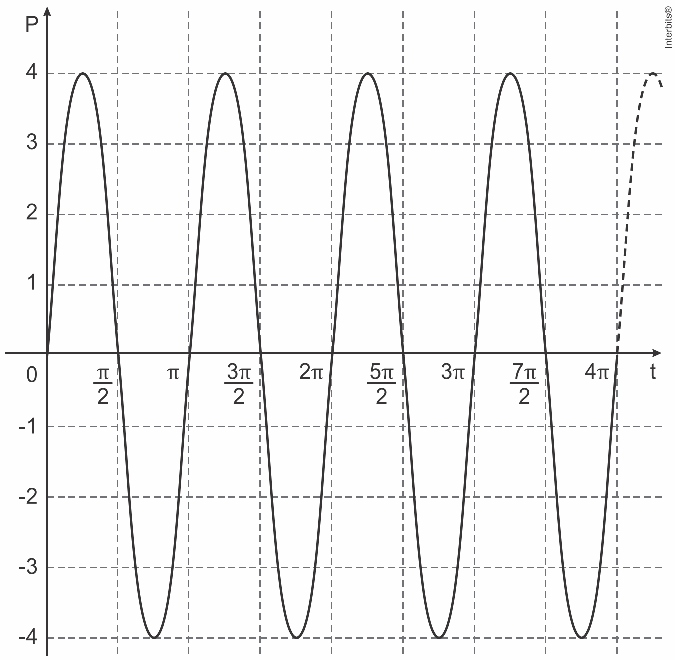


O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

a) 1. b) 2. c) 4. d) 5. e) 8.

4. (ENEM) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A\text{sen}(wt + \theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{w}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.



O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.

A expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t é

a) $P(t) = 4\text{sen}(2t)$

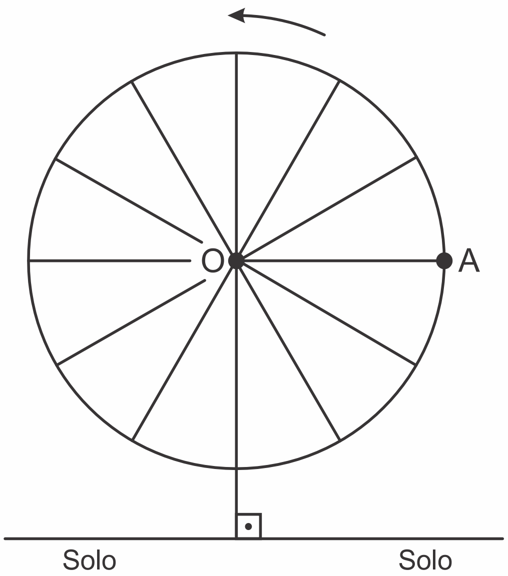
b) $P(t) = -4\text{sen}(2t)$

c) $P(t) = -4\text{sen}(4t)$

d) $P(t) = 4\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

e) $P(t) = 4\text{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$

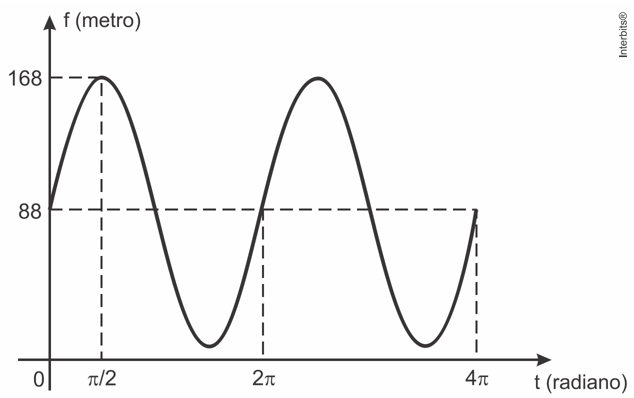
5. (ENEM) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014. (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

a) $f(t) = 80\ \text{sen}(t) + 88$

b) $f(t) = 80\ \cos(t) + 88$

c) $f(t) = 88\ \cos(t) + 168$

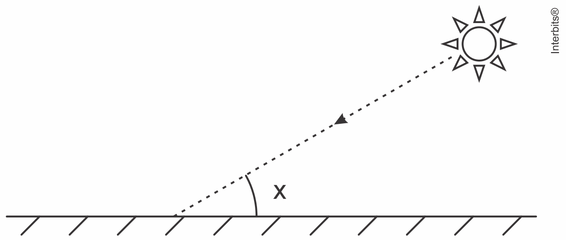
d) $f(t) = 168\ \text{sen}(t) + 88\ \cos(t)$

e) $f(t) = 88\ \text{sen}(t) + 168\ \cos(t)$

6. (ENEM) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.
Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados: Pressão mínima 78, pressão máxima 120, número de batimentos cardíacos por minuto 90.
A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

7. (ENEM) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.
Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre $0°$ e $90°$.

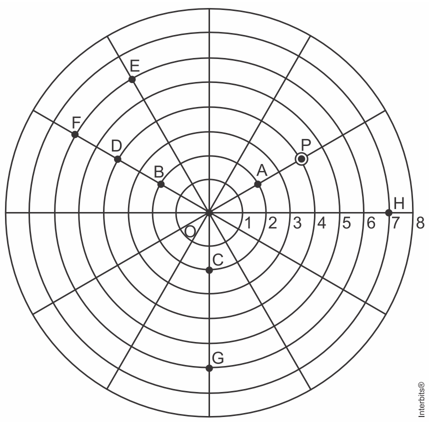


Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?
a) 33%
b) 50%
c) 57%
d) 70%
e) 86%

8. (ENEM) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite $(0 \le h \le 24)$ e *A* e *B* os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse $26\ °C$, a mínima $18\ °C$, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.
Quais devem ser os valores de *A* e de *B* para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) $A = 18$ e $B = 8$
b) $A = 22$ e $B = -4$
c) $A = 22$ e $B = 4$
d) $A = 26$ e $B = -8$
e) $A = 26$ e $B = 8$

9. (ENEM) No jogo mostrado na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é $120°$.
Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto



a) B.
b) D.
c) E.
d) F.
e) G.

10. (ENEM) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.
A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode

ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro. b) abril. c) junho. d) julho. e) outubro.

11. (ENEM) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \text{sen}[b(x + c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.
O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)

a) a. b) b. c) c. d) a e b. e) b e c.

12. (ITA) Num triângulo ABC o lado $\overline{AB}$ mede 2 cm, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1 cm, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 135° e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $B\hat{A}C + B\hat{M}C$, em radianos, é igual a

a) $\frac{1}{5}\pi$. b) $\frac{1}{4}\pi$. c) $\frac{1}{3}\pi$. d) $\frac{3}{8}\pi$. e) $\frac{2}{5}\pi$.

13. (ENEM) Um satélite de telecomunicações, *t* minutos após ter atingido sua órbita, está a *r* quilômetros de distância do centro da Terra. Quando *r* assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de *r* em função de *t* seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15.\cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de *r*, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

a) 12 765 km. b) 12 000 km. c) 11 730 km. d) 10 965 km. e) 5 865 km.

14.(UFRS) Os ponteiros de um relógio marcam duas horas e vinte minutos. O menor ângulo entre os ponteiros é

a) 45° b) 50° c) 55° d) 60° e) 65°

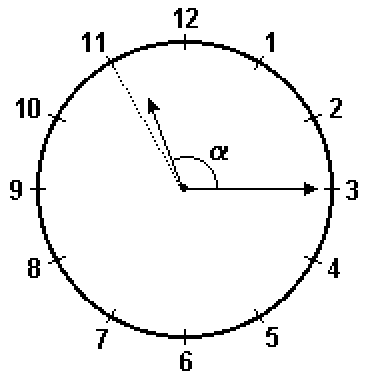
15. (UFSCAR) Se o ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 centímetros, o número que melhor aproxima a distância em centímetros percorrida por sua extremidade em 20 minutos é: (considere π = 3,14)

a) 37,7 cm. b) 25,1 cm. c) 20 cm. d) 12 cm. e) 3,14 cm.

16. (UFRS) Se o ponteiro menor de um relógio percorre um arco de π /12 rad, o ponteiro maior percorre um arco de:

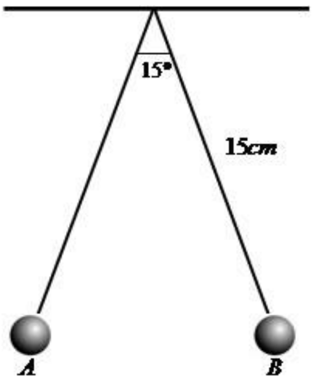
a) π /6 rad. b) π /4 rad. c) π /3 rad. d) π /2 rad. e) π rad.

17. (UFLAVRAS) Às 11 horas e 15 minutos, o ângulo α (figura abaixo) formado pelos ponteiros de um relógio mede:



a) 90°
b) 112° 30'
c) 82° 30'
d) 120°
e) 127° 30'

18. Um pêndulo de 15 cm de comprimento oscila entre A e B descrevendo um ângulo de 15º. Qual é o comprimento da trajetória descrita pela sua extremidade entre A e B?



19. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de um certo indivíduo, em função do tempo t (em s), é uma função cíclica, dada pela lei $P(t) = 100 - 20\cos(8\pi/3 \cdot t)$ sendo que a cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.

A. Qual o intervalo de tempo de um batimento cardíaco desse indivíduo?

B. Quantos batimentos cardíacos esse indivíduo tem por minuto?

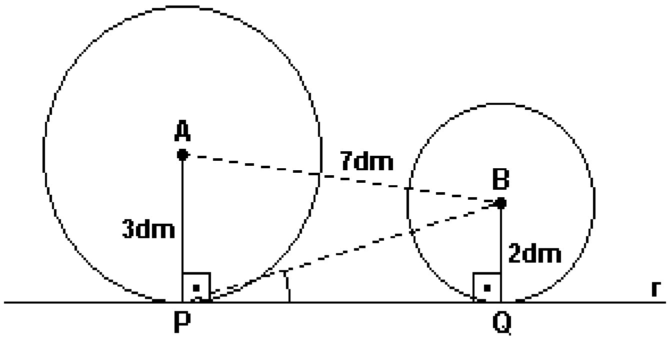
20. (UEL-PR) Uma bomba-d’água aspira e expira água a cada 3 segundos. O volume de água da bomba varia entre um mínimo de 2 litros e um máximo de 4 litros. Dentre as alternativas a seguir, assinale a expressão algébrica para o volume y de água na bomba, em função do tempo t.

a) $y = 2 + 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$ b) $y = 2 + 2\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$ c) $y = 3 + \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

d) $y = 3 + \text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$ e) $y = -3 + 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

21. (UNIRIO) Consideremos um ponto de luz no chão a 12m de um edifício. Numa posição entre a luz e o edifício, encontra-se um homem de 2*m* de altura, cuja sombra projetada no edifício, pela mesma luz, mede 8m. Diante do exposto, calcule a distância entre o homem e o edifício.

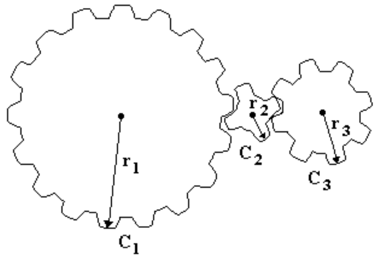
22. (UNESP) Paulo fabricou uma bicicleta, tendo rodas de tamanhos distintos, com o raio da roda maior (dianteira) medindo 3 dm, o raio da roda menor medindo 2 dm e a distância entre os centros A e B das rodas sendo 7 dm. As rodas da bicicleta, ao serem apoiadas no solo horizontal, podem ser representadas no plano (desprezando-se os pneus) como duas circunferências, de centros A e B, que tangenciam a reta r nos pontos P e Q, como indicado na figura.



a. Determine a distância entre os pontos de tangência P e Q e o valor do seno do ângulo BPQ.

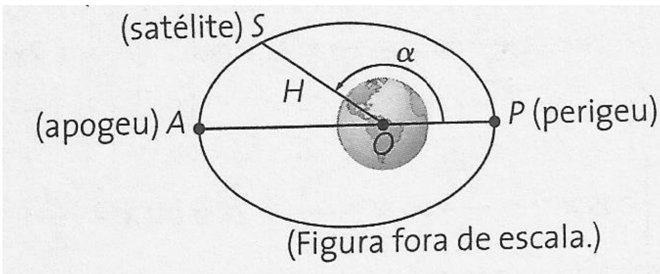
b. Quando a bicicleta avança, supondo que não haja deslizamento, se os raios da roda maior descrevem um ângulo de 60°, determine a medida, em graus, do ângulo descrito pelos raios da roda menor. Calcule, também, quantas voltas terá dado a roda menor quando a maior tiver rodado 80 voltas.

23. (UFPE) Três coroas circulares dentadas C_1, C_2, e C_3 de raios r_1 = 10cm, r_2 = 2cm e r_3 = 5cm respectivamente estão perfeitamente acopladas como na figura a seguir. Girando-se a coroa C_1 de um ângulo de 41° no sentido horário, quantos graus girará a coroa C_3?



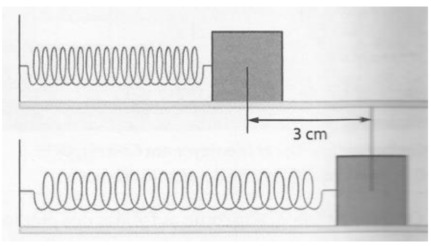
24. (Vunesp) A figura abaixo mostra a órbita de um satélite S em torno do planeta Terra. Na elipse estão assinalados dois pontos: o ponto A (apogeu), que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra, e o ponto P (perigeu), que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra. O ponto O indica o centro da Terra e o ângulo PÔS tem medida α, com 0° ≤ α ≤ 360°. A altura H, em km, do satélite à superfície da Terra, dependendo do ângulo α, é dada aproximadamente pela função:

$$H = \left(-64 + \frac{7980}{100 + 5\cos\alpha}\right) \cdot 10^2$$



Determine os valores de α quando a altura H do satélite é de 1580 km.

25. Um dos principais movimentos periódicos oscilatórios é o movimento harmônico simples (MHS). Um objeto se move sobre uma reta de modo que a intensidade da força exercida sobre ele aumenta e diminui de forma periódica. Esse tipo de movimento está presente em diversas ocasiões na natureza.



O objeto acima se desloca de tal modo que sua posição x (em centímetros) em função do tempo t (em segundos), com t ≤ π é dada pela função $x(t) = 4 + 3cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$.

A soma dos valores de t quando x(t) = 1cm e x(t) = 7cm é numericamente igual a:

a) π/2 b) π c) 3π/2 d) 2π e) 5π/2

26. A distância horizontal percorrida por uma bola de futebol depende, entre outros fatores, da velocidade inicial do ângulo formado pela trajetória da bola com a horizontal. Representando a velocidade inicial por v e o ângulo por α, podemos determinar essa distância d pela equação:

$$d = \frac{v^2}{10}.sen2\alpha$$

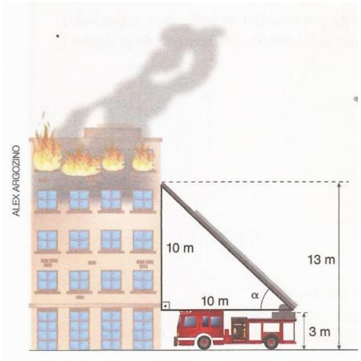
Sabendo que em certo chute a bola percorreu 16,2m com velocidade de 18m/s, qual é a medida do ângulo α?

27. A equação $h(t) = 3\,sen\left(\frac{5\pi}{31}\,t\right)$ permite calcular uma aproximação da altura h (em metros) da maré de determinada laguna (lagoa de água salgada ligada ao mar por um canal) em função do tempo t, e horas.

a) Qual é a altura da maré às 2h? E às 16h?

b) Qual é o menos valor de t, em horas e minutos, em que a maré está com 1,5m de altura?

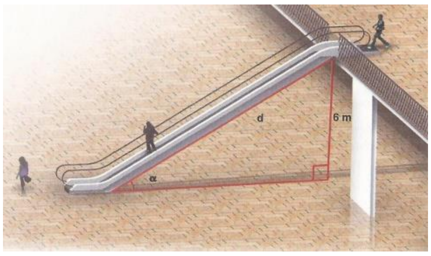
28. A escada magirus de um caminhão de bombeiros atinge um ponto de um edifício a 13m de altura em relação ao solo plano e horizontal. Sabe-se que a base dessa escada está a 3m de altura em relação ao solo e a 10m de distância do edifício, conforme mostra a figura.



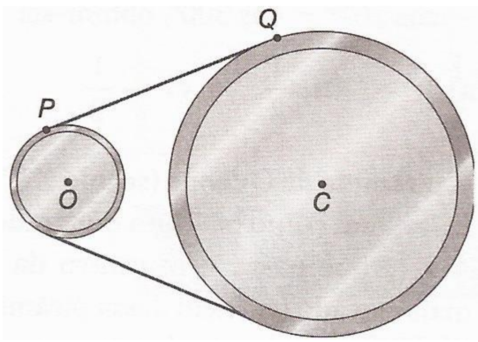
a) Qual a medida do cateto vertical do triangulo destacado?

b) Qual a medida α do ângulo agudo que a escada forma com a horizontal?

29. Um projeto prevê uma esteira rolante unindo dois pisos horizontais entre os quais há um desnível vertical de 6m. Se o comprimento d da esteira deve ser maior que 12m, quais são as possíveis medidas de α do ângulo agudo que a esteira formará com o piso inferior?



30. Uma correia liga duas polias, de 5cm e 15 cm de raio e centros O e C, respectivamente, sendo P e Q pontos de tangência da parte reta da correia com as polias, conforme mostra a figura. Se a distância PQ deve ser maior que 10√3 cm, quais são as possíveis medidas de um ângulo agudo formado pelas retas PQ e OC?



GABARITO

Q1. B Q2. D Q3. D Q4. A Q5. A Q6. A Q7. B Q8. B Q9. D Q10. D Q11. B Q12. B Q13. B Q14. B Q15. B Q16. E Q17. B Q18. 3,9 Q19. A) 0,75 B) 110 Q20. D Q21. 9 Q22. A) $4\sqrt{3}\ e\ \frac{2\sqrt{13}}{13}$ B) 90º e 120 voltas Q23. 82° Q24. 90° ou 270°. Q25. B Q26. 15° Q27. A) 2,55m e 2,90m B) 1h2min Q28. A) 10m B) 45° Q29. 0° < α < 30° Q30. 0° < α < 30°