

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rafael Marques Gonçalves

**A Trigonometria e a História da Matemática em sala de aula: uma
experiência com a construção de instrumentos de navegação e do
relógio de sol.**

Porto Alegre
2018

RAFAEL MARQUES GONÇALVES

A Trigonometria e a História da Matemática em sala de aula: uma experiência com a construção de instrumentos de navegação e do relógio de sol.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Andréia Dancin.

Porto Alegre

2018

Instituto de Matemática e Estatística
Licenciatura em Matemática

**A Trigonometria e a História da Matemática em sala de aula: uma
experiência com a construção de instrumentos de navegação e do
relógio de sol.**

Rafael Marques Gonçalves

Banca Examinadora:

Prof.^a Dr.^a Andréia Dalcin
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof.^a Dr.^a Maria Cecília Bueno Fischer
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Pâmela, por me incentivar e sempre me apoiar para que eu continue seguindo em frente.

Aos meus pais, Cândida e Cosme, por me ensinar a ser um bom homem.

À Prof.^a Dr.^a Andréia Dalcin, por me orientar neste trabalho e em outras disciplinas durante minha jornada acadêmica.

Agradeço à professora Magda, do Ensino Fundamental, fazendo com que eu me apaixonasse pela Matemática.

Gostaria de agradecer também ao Leandro Blum, colega e amigo que conheci durante a graduação, por contribuir com a construção das figuras deste trabalho de conclusão.

Também gostaria de agradecer à Goreti e Dóris, Supervisora Pedagógica e Diretora da Escola onde leciono, por todo apoio e compreensão me liberando em algumas ocasiões da sala de aula para que eu pudesse me dedicar melhor a este trabalho de conclusão.

"O mundo não está ameaçado pelas pessoas más, e sim por aquelas que permitem a maldade".

(Albert Einstein)

RESUMO

Este estudo foi desenvolvido em uma escola da rede Estadual da cidade de Porto Alegre, com estudantes do 2º ano do Ensino Médio. O estudo investigou as potencialidades da História da Matemática em sala de aula, por meio de atividades que remetem ao período das navegações, explorando conceitos da trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência. Percebeu-se que, ao trazer a história da matemática inserida em atividades específicas de construção de instrumentos de medida de tempo, ângulos e distâncias, semelhantes aos utilizados em situações de navegação, as aulas se tornam mais dinâmicas e interessantes para o professor e para os estudantes, fazendo com que estes participassem mais ativamente dos processos de ensino e aprendizagem. Foram gerados questionamentos muito pertinentes a respeito da História da Matemática ao longo do desenvolvimento das atividades, fato que contribuiu para o aprendizado dos conteúdos envolvidos. Além disso, constatou-se que ao trazer a História da Matemática para a sala de aula abriu-se um leque de ideias, perguntas, respostas e construções que envolveram outros componentes além da matemática, especialmente conhecimentos do campo da geografia e história, o que enriqueceu a experiência vivida.

Palavras-chave: Quadrante; Relógio de Sol; Tábua de Ptolomeu; História da Matemática.

ABSTRACT

This research was developed at a school network's of Porto Alegre, with students from 2nd year of High School. The research investigated the history potential of Mathematics in the classroom, through activities that refer the navigation period, exploring concepts of trigonometry in the triangle rectangle and circumference. It was noticed that, by bringing the history of mathematics into specific activities of construction of instruments of time measurement, angles and distances, similar to those used in navigation situations, the classes become more dynamic and interesting for the teacher and for the students, they used to participate more actively in the teaching and learning processes. Very pertinent questions about the History of Mathematics were generated during the development of the activities, which contributed to the learning of the contents involved. In addition, it was found that in bringing the History of Mathematics into the classroom, a range of ideas, questions, answers and constructions were developed that involved other components besides mathematics, especially knowledge of the field of geography and history, which enriched the lived experience.

Keywords: Quadrant; Sun Watch; Ptolemy's Table; History of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. O SeqT Egípcio.....	16
Figura 2. Círculo de Ptolomeu.....	17
Figura 3. O Jiva Hindu	19
Figura 4. O quadrante Náutico	21
Figura 5. Astrolábio Náutico	22
Figura 6. Cálculo da medida angular entre dois astros utilizando a Balestilha.....	23
Figura 7. Sextante Náutico.....	23
Figura 8: Tabela para preenchimento.....	34
Figura 9. Quadrante da circunferência	35
Figura 10. Modelo do quadrante.....	36
Figura 11. Construindo o Relógio de Sol	37
Figura 12. Construindo o Relógio de Sol	37
Figura 13. Construção do Relógio de Sol	38
Figura 14. Construindo o Relógio de Sol	38
Figura 15. Construindo o Relógio de Sol	38
Figura 16. Construindo o Relógio de Sol	39
Figura 17. Construindo o Relógio de Sol	39
Figura 18. Construindo o Relógio de Sol	39
Figura 19. Construindo o Relógio de Sol	40
Figura 20. Construindo o Relógio de Sol	40
Figura 21. Construindo o Relógio de Sol	41
Figura 22. Construindo o Relógio de Sol	41
Figura 23. Construindo o Relógio de Sol	41
Figura 24. Construindo o Relógio de Sol	42
Figura 25. Modelo do Relógio de Sol.....	42
Figura 26. Construindo a borda da circunferência.....	44
Figura 27. Demarcando a circunferência	45
Figura 28. Graduando o eixo do cosseno	46
Figura 29. Graduando o eixo do seno	47
Figura 30. Demarcando os ângulos com o transferidor.....	48
Figura 31. Finalizando o ciclo trigonométrico.....	49
Figura 32. Construindo o quadrante	50
Figura 33. Esboço de um quadrante.....	50
Figura 34. Quadrantes prontos.....	51
Figura 35. Determinando os valores do seno, cosseno e tangente no 1° quadrante.....	53
Figura 36. Pensamento do estudante em relação aos valores do seno e do cosseno	54
Figura 37. Pensamento do estudante para os valores da tangente.....	54
Figura 38. Tabela completada por um dos estudantes.....	55
Figura 39. Retângulo inicial do Relógio de Sol.....	56
Figura 40. Mapa com as localizações de Porto Alegre e Brasília	57
Figura 41. Principais pontos do Relógio de Sol.....	58
Figura 42. Marcação das horas no Relógio de Sol.....	59
Figura 43. Relógios de Sol produzidos pelos estudantes.....	60
Figura 44. Relógios de Sol produzidos	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Distribuição das Atividades Executadas.....	44
---	----

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
2. A TRIGONOMETRIA NAS GRANDES NAVEGAÇÕES.....	15
3. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA.....	25
4. UMA EXPERIÊNCIA COM A CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS DE NAVEGAÇÃO E O RELÓGIO DE SOL.....	32
5. REFLEXÕES SOBRE A EXPERIÊNCIA VIVIDA.....	43
6.1 Encontro 1:	43
6.2 Encontro 2:	46
6.3 Encontro 3:	47
6.4 Encontro 4:	49
6.5 Encontro 5:	50
6.6 Encontro 6:	50
6.8 Encontro 8:	53
6.9 Encontro 9:	55
6.10 Encontro 10:	56
6.11 Encontro 11:	58
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	63
7. REFERÊNCIAS.....	65
APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO DA ATIVIDADE I.....	67
ANEXO 1 - TERMO DE CONCENTIMENTO INFORMADO (MENORES).....	68
ANEXO 2 - TERMO DE CONCENTIMENTO INFORMADO (MAIORES).....	69

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre as potencialidades da História da Matemática em sala de aula, trazendo atividades que remetem ao período das navegações explorando conceitos trigonométricos no triângulo retângulo e na circunferência. Acredito que a inclusão da História da Matemática nas aulas de Matemática proporciona aos estudantes uma visão bem mais ampla da disciplina, mas sei que dependerá de cada ambiente escolar e de experiências próprias para saber se funcionará ou não.

Quando se trabalha com História da Matemática não se tem um método único ou um modelo a ser seguido que garanta o sucesso das atividades desenvolvidas. Talvez seja este o principal motivo para eu querer trabalhá-la em sala de aula, pois no momento em que ampliamos os horizontes para novas possibilidades, a chance de nos surpreendemos com os resultados aumenta.

A motivação para a realização deste trabalho vem do fato de que nas experiências que tive em sala de aula, em estágios de docência e como professor contratado da rede estadual de ensino, a trigonometria é trabalhada de maneira rápida e sem conexões com os fatos históricos que favoreceram a construção dos conceitos envolvidos no estudo desta área da matemática. Tal rapidez e uma abordagem pautada na repetição e memorização das relações trigonométricas pode fazer com que os alunos não se interessem por este conteúdo, decorando fórmulas de maneira mecânica sem aplicabilidade no cotidiano.

Sempre tive um apreço enorme pela história das coisas, tanto que na minha formação básica adorava as aulas de História, pois eram momentos em que conhecíamos nossas origens, grandes guerras, tínhamos uma ideia das transformações do mundo ao longo dos séculos. Na graduação, tive oportunidade de aproveitar ao máximo as aulas de História da Matemática, conhecendo os grandes Matemáticos, bem como suas contribuições para a humanidade.

Tendo como preocupação a discussão sobre a presença da História da Matemática em sala de aula, a questão norteadora para a investigação foi: *"A construção de instrumentos que foram utilizados no passado pode contribuir para o aprendizado da trigonometria no ensino médio?"*

Diante disso, os objetivos específicos elencados foram: estudar a presença da trigonometria durante o período das grandes navegações; elaborar e aplicar uma

sequência de atividades que envolvam a construção de instrumentos que explorem conceitos trigonométricos a exemplo do quadrante, tábua de Ptolomeu e relógio de Sol e, por fim, refletir sobre as contribuições do trabalho com história da matemática em sala de aula.

Para o desenvolvimento do trabalho foram lidos e estudados principalmente os textos de MIGUEL (1997) "*As possibilidades pedagógicas da História da Matemática em questão: Argumentos reforçadores e questionadores*", MOTTA (2006) "*História da Matemática na Educação Matemática: Espelho ou Pintura?*" e MENDES (2009) "*História da Matemática em Atividades Didáticas*", dentre outros, tais como artigos e monografias.

A metodologia utilizada foi a pesquisa-ação de caráter qualitativo, considerando que atuo como professor contratado em turmas do ensino médio da rede estadual de ensino na cidade de Porto Alegre. Neste sentido, sou o professor da turma em que desenvolvi o estudo.

Segundo Tripp (2005, p.445) "A pesquisa-ação educacional é principalmente uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores de modo que eles possam utilizar suas pesquisas para aprimorar seu ensino e, em decorrência, o aprendizado de seus alunos". Além disso, é conhecida por alguns pesquisadores como sendo "uma família de atividades", exatamente a proposta que trabalhei com os estudantes, trazendo elementos da história da trigonometria para dentro da sala de aula.

Este estudo foi desenvolvido na Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia, participaram das atividades propostas 18 estudantes do 2º ano do Ensino Médio do turno da tarde. Foram realizados 11 encontros, nos quais os estudantes construíram instrumentos de medição, adaptações de instrumentos utilizados durante as navegações nos séculos XV e XVI, discutiram algumas relações trigonométricas, exercitaram medições e conversaram sobre a história da matemática. Enquanto professor e pesquisador participei da mediação das atividades e interagi com os alunos.

Este Trabalho de Conclusão está organizado em seis capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles.

No capítulo dois apresento alguns elementos da história da Trigonometria no mundo antigo, dando relevância aos principais povos e matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desse ramo da Matemática. Também me

deterei nas contribuições da Trigonometria para as Grandes Navegações, abordando alguns dos principais instrumentos utilizados pelos navegadores no passado.

No capítulo três saliento as potencialidades da História da Matemática no ensino da matemática em sala de aula. Para dar suporte, trago como referencial teórico Miguel (1997), Motta (2006), Miguel e Miorim (2008) e Mendes (2009).

No capítulo quatro apresento e descrevo uma proposta de atividade didática com as três atividades, que foram desenvolvidas para a pesquisa.

Já no capítulo cinco descrevo os encontros ocorridos em sala de aula, trago reflexões e comentários dos alunos durante as atividades e busco problematizar a experiência vivida

Por fim trago algumas considerações finais e possibilidades de continuidade de trabalhos futuros.

2. A TRIGONOMETRIA DA ANTIGUIDADE ÀS GRANDES NAVEGAÇÕES

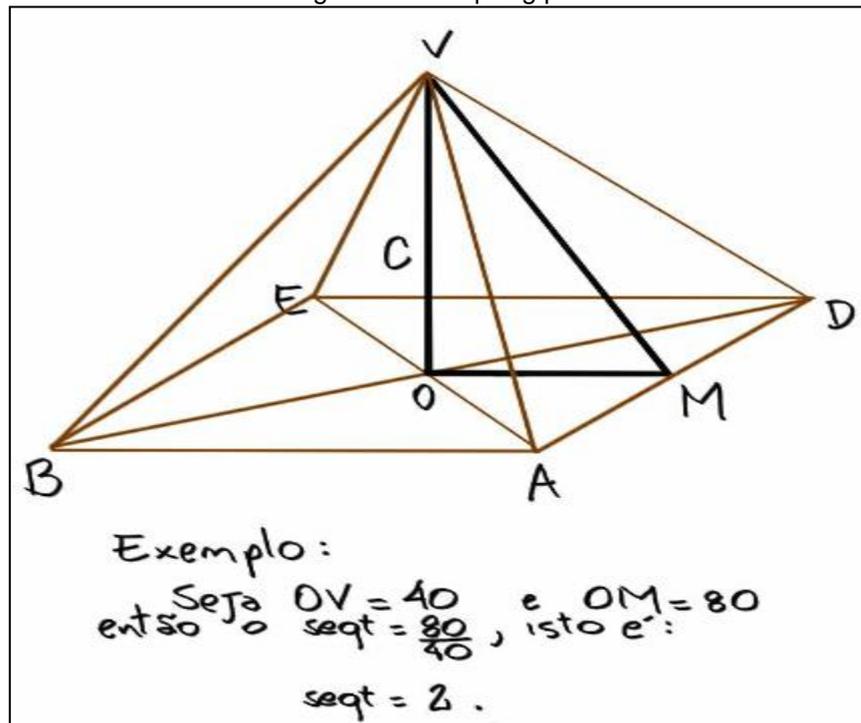
Neste capítulo abordarei a história da Trigonometria no mundo antigo, dando relevância aos principais povos e matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desse ramo da Matemática. Também me deterei nas contribuições da Trigonometria para as Grandes Navegações, abordando alguns dos principais instrumentos utilizados pelos navegadores no passado.

Para começar a tentar traçar uma história para a Trigonometria é preciso discutir quais os significados que se pode dar ao termo *Trigonometria*. Pois, segundo Costa (2003, p.1)

"Se o tomarmos como a ciência analítica estudada atualmente, teremos a origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, se o considerarmos para significar a geometria acoplada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C., embora existam traços anteriores de seu uso. Se o considerarmos, ainda, para significar literalmente medidas do triângulo, a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo".

A origem da trigonometria é incerta, provavelmente surgiu no Egito, a partir da necessidade de se medir alturas e distâncias inacessíveis vinculados a Astronomia, a Agrimensura e a Navegação. No Egito, os indícios podem ser observados no Papiro de Ahmes, conhecido como Papiro de Rhind, que é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias, possuindo 84 problemas matemáticos. Um desses problemas menciona a **seqt** (o que seria a nossa cotangente nos dias atuais) que nada mais é que razão entre o afastamento horizontal da base (segmento OM) e a elevação vertical de uma pirâmide (medida OV) (COSTA, 2003), conforme ilustrado na figura 1.

Figura 1. O SeqT Egípcio



Fonte: Leandro Blum

Na Babilônia, os conhecimentos matemáticos se destinavam à prática de quantidades e contagens envolvendo as operações básicas, ao passar do tempo a sociedade babilônica começou a se aprofundar em conhecimentos mais específicos em matemático, passando a incluí-los na resolução de problemas numéricos (ROQUE, 2012).

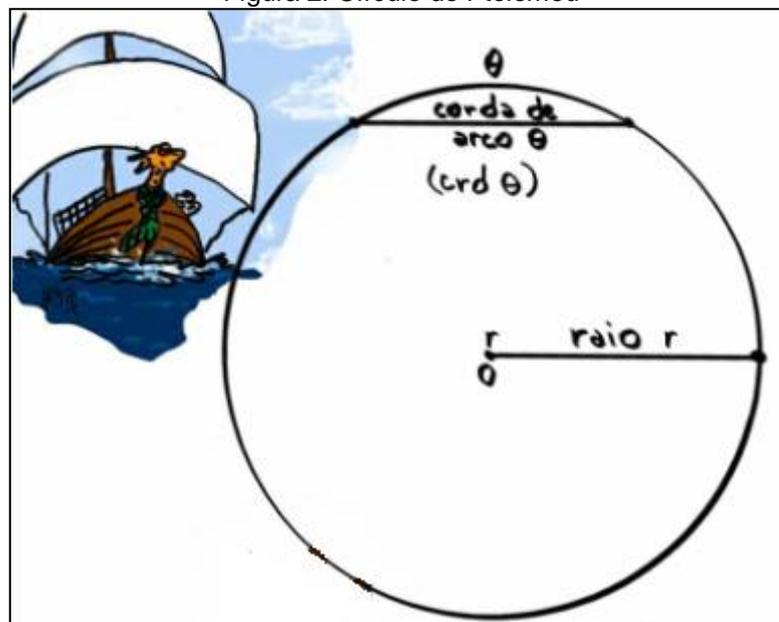
Sabe-se também, que os babilônicos tinham interesse especial pela Astronomia, por relações religiosas, calendário e também pelo plantio. Não sendo possível estudar as fases da lua, pontos cardeais e estações do ano sem que se faça a utilização de triângulos (COSTA, 2003). Há indícios de que os babilônicos utilizavam os relógios de sol, isto é, uma vareta espetada no chão formando com este um ângulo de 90° e sua sombra projetava a duração do dia, bem como os egípcios, cerca de 1500 a.C. O relógio de sol constitui-se em um importante instrumento de medida do tempo que continuará sendo utilizado nos séculos posteriores em diversos lugares do planeta.

A trigonometria se desenvolveu consideravelmente na Grécia, por estar ligada diretamente com a Geometria, surgiram alguns sábios que deram contribuições importantes, podendo destacar: Tales, Pitágoras, Hiparco, Arquimedes, Aristarco, Ptolomeu, dentre outros. Os estudos de Tales sobre semelhanças de triângulos

servem de base para a Trigonometria, bem como o Teorema de Pitágoras da onde deriva a relação fundamental da trigonometria, isto é, $\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$. Os estudos de Hiparco contribuíram consideravelmente para a trigonometria na circunferência, que serve de embasamento para os estudos de Ptolomeu em sua obra **Almagesto**, considerada a maior obra sobre Trigonometria da Antiguidade, se tornando indispensável para o bom entendimento astronômico da Grécia antiga (BOYER, 1974).

Hiparco de Nicéia, nascido no séc. II a.C, onde hoje é a Turquia, foi responsável pelas medições astronômicas mais precisas da Antiguidade, projetou e construiu diversos instrumentos astronômicos e é considerado o "pai da trigonometria". As contribuições de Hiparco para a Astronomia são inúmeras, construindo a primeira tabela trigonométrica na qual Ptolomeu adaptou, conforme ilustra a figura 2, com valores de cordas compreendidas de ângulos de 0° a 180° , que relacionava comprimentos de cordas aos arcos subtendidos a essas mesmas cordas, observando que em um círculo a razão do arco para cada corda diminuía conforme a medida do arco também diminuía (COSTA, 2003).

Figura 2. Círculo de Ptolomeu



Fonte: Leandro Blum

Sendo obcecado em obter uma descrição geométrica para o Universo, se especializou na construção de instrumentos astronômicos, dentre eles o astrolábio, com o objetivo de registrar a posição e movimentos dos astros. Com base em suas

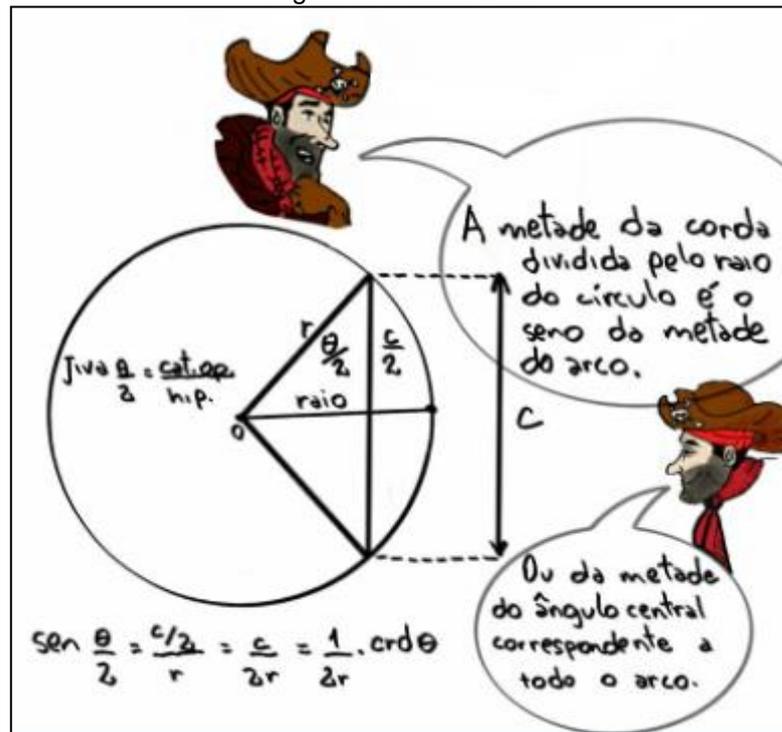
observações Hiparco preparou um grande catálogo astronômico, com a posição de quase mil estrelas, servindo de base para o **Almagesto** de Ptolomeu, séculos mais tarde.

Sobre Ptolomeu, pouco se sabe sobre ele, possivelmente viveu em Alexandria entre os séc. I e II da era cristã, considerado o maior astrônomo da antiguidade, contribuiu em outros campos além da Matemática e Astronomia, como Astrologia, Geografia, Cartografia, Óptica e Teoria Musical. Criou o **Almagesto** (como citado anteriormente é considerada a maior obra de Matemática e Astronomia da Antiguidade), que é dividida em treze livros contendo conteúdos sobre sistema solar, tábua de cordas, movimentos do Sol, da Lua, eclipses, estrelas fixas catalogadas por Hiparco, explicação detalhada da construção do Astrolábio, dentre outros (COSTA, 2008).

Por volta do século IV d.C. foi a vez dos hindus contribuírem com a Trigonometria, segundo Costa (2003), com a crise na Europa Ocidental devido as invasões dos bárbaros germânicos e a queda do Império Romano. O centro cultural começa a se deslocar para a Índia, revolucionando a trigonometria com a produção de vários textos relacionados a Astronomia. O que chegou até nosso conhecimento foi a obra **SuryaSiddhanta**, que significa Sistemas do Sol, os hindus intitulam como autor **Surya**, o deus do sol, o problema deste trabalho é que possui poucas explicações e nenhuma prova alegando que por ter sido escrita por um Deus não seria necessário provar nada. Mesmo assim, foi de grande importância devido ao fato de não seguir os mesmos passos de Ptolomeu, conseguindo mostrar com uma perspectiva diferente à trigonometria trazida por Ptolomeu, que tratava das cordas utilizando os arcos centrais de uma circunferência.

Com os hindus, a relação era mais simples, pois dividiam a corda ao meio dando o valor exato do **jiva** (que irá se tornar o valor do seno) não precisando dividir a corda, denominada de "c", como era feito anteriormente e ilustrada na figura 3.

Figura 3. O Jiva Hindu



Fonte: Leandro Blum

Ainda, segundo Costa (2003) os Árabes e Persas também deixaram seu legado para Trigonometria com a criação da Escola de Bagdad no século IX, traduzindo e conservando diversas obras importantes. A pessoa mais notável que contribuiu para os avanços trigonométricos foi o príncipe AL Battani conhecido como Ptolomeu de Bagdad. A base da trigonometria hindu foi adotada pelos árabes e, talvez a contribuição mais relevante que podemos citar foi a introdução do raio unitário ao círculo, o que facilitou nas compreensões e definições do **jiva**.

Outro aspecto importante neste período de domínio do Império Muçulmano, foi a separação entre Trigonometria e a Astronomia, transformando a Trigonometria como um ramo da Matemática no ano de 1250, retomado na Europa no século XV quando o matemático Regiomontanus escreveu um tratado, em cinco livros, onde elabora novas tábuas trigonométricas muito mais precisas e introduz a tangente na trigonometria europeia (COSTA, 2003).

Um aspecto importante para ser levado em consideração é que na Antiguidade, os gregos dominavam os saberes da Astronomia e Trigonometria. Já na Idade Média foram os árabes, mas a partir do século XV vários países contribuíram em paralelo para os avanços deste ramo da Matemática.

Um fato importante na História Geral e também na Matemática é o período das Grandes Navegações (séculos XV e XVI), foi onde os europeus, em especial portugueses e espanhóis se lançaram aos mares buscando novas rotas marítimas para as Índias, pois os impostos cobrados pelos italianos, controladores do Mar Mediterrâneo, eram muito altos. "Portugal foi um dos primeiros países a se lançar aos mares, devido ao fato de já terem experiência com a pesca e domínio da engenharia na construção de caravelas" Fernandes, et al (2011, p.63).

Segundo Fernandes, et al (2011), se tratando de contribuição na construção de instrumentos para facilitar os navegadores, a Universidade de Lisboa, a partir do século XIII, destacou-se na construção de três instrumentos náuticos importantíssimos, ajudando de forma considerável os homens ao mar, sendo eles: abalestilha, o quadrante e o astrolábio náutico. A seguir explicarei e detalharei cada um deles, além do sextante.

O quadrante Náutico

Segundo (JUNIOR; BEZERRA, 2014), nada mais é que um quarto de circunferência com graduação de 0° a 90° , contendo duas pínulas com orifícios por onde se fazia a pontaria ao astro, no centro havia um fio de prumo por onde se lia a graduação que indicava a altura do astro de acordo com a figura 4.

Figura 4. O quadrante Náutico¹



Fonte: Leandro Blum

Sua finalidade era determinar a distância entre o ponto de partida e o lugar onde a embarcação se encontrava através da altura da estrela polar, podendo verificar se a embarcação se encontrava mais a norte ou mais a sul com base no ângulo que a estrela polar fazia com o horizonte. Apesar de ter sido bastante utilizados pelos navegadores, apresentava dificuldades no manuseio devido as oscilações dos ventos e o mar agitado, não era possível obter com precisão o ângulo de inclinação da estrela polar, causando erros consideráveis nos cálculos das distâncias (JUNIOR; BEZERRA, 2014).

Astrolábio Náutico

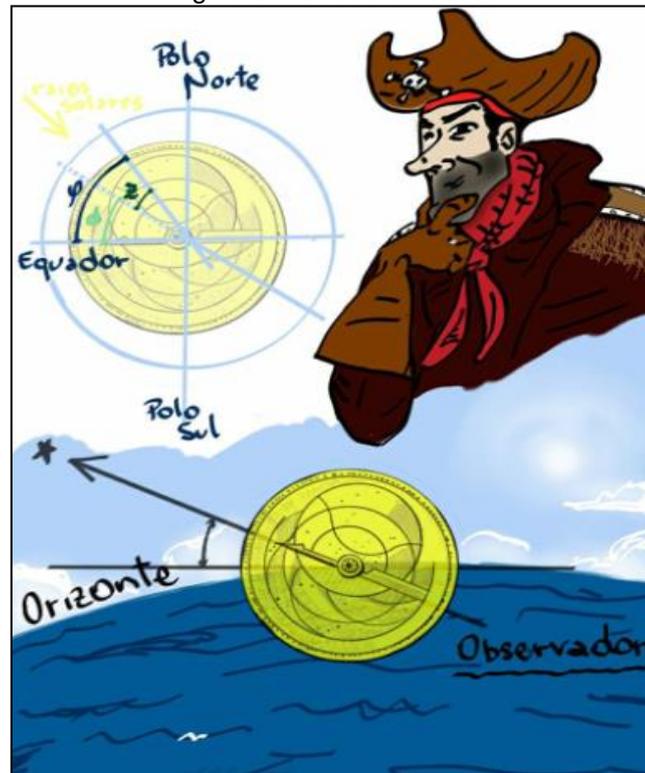
Usado para determinar a posição de astros no céu, possibilitando medir a altura dos astros para ajudar na localização em auto mar (VALENÇA, 2013).

Sucessor do quadrante, era uma derivação do astrolábio planisférico, desenvolvido por Hiparco. O objetivo era medir a altura do Sol ou de uma estrela acima do horizonte, possibilitando verificar a latitude da embarcação em relação ao

¹ Ilustração produzida pelo colega Leandro Blum que traz o quadrante náutico relacionando o marinheiro com o gaúcho, uma ilustração lúdica que pode ser explorada pois “brinca” com simbolismos do passado e do presente.

equador. Era mais vantajoso que o quadrante por ser mais fácil de se trabalhar durante o dia, mas também pelo fato de não ser possível visualizar a estrela polar no hemisfério sul, conforme figura 5.

Figura 5. Astrolábio Náutico

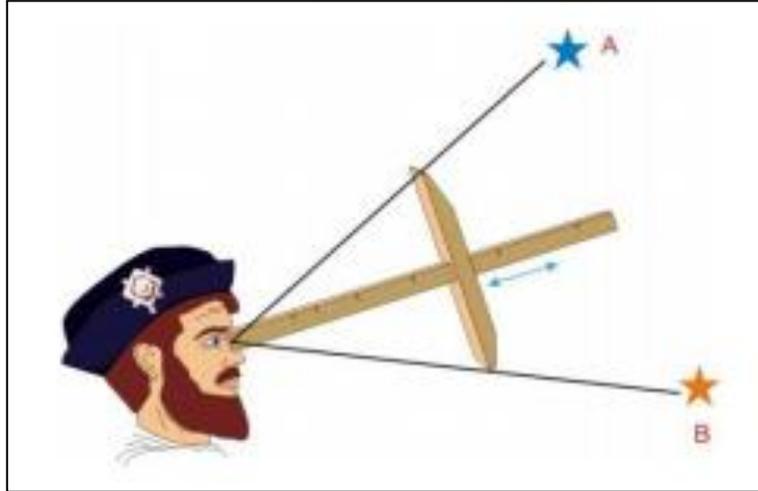


Fonte: Leandro Blum

Balestilha

Instrumento náutico em forma de "T" que servia para se orientar nos mares, possibilitando fazer a medição de dois astros além da altura que determinada estrela estava do horizonte, muito utilizado na época das Grandes Navegações, porém pouco mencionado pelos antigos textos portugueses. Era composta de uma vara rígida, chamada de **virote**, outra vara colocada a 90° do virote, chamada de **soalha**, desliza de modo que os astros estejam nas extremidades da soalha, fornecendo as medidas angulares entre eles, conforme é mostrado na figura 6, onde é possível calcular a medida angular entre os astros A e B, Fernandes, et al (2011).

Figura 6. Cálculo da medida angular entre dois astros utilizando a Balestilha

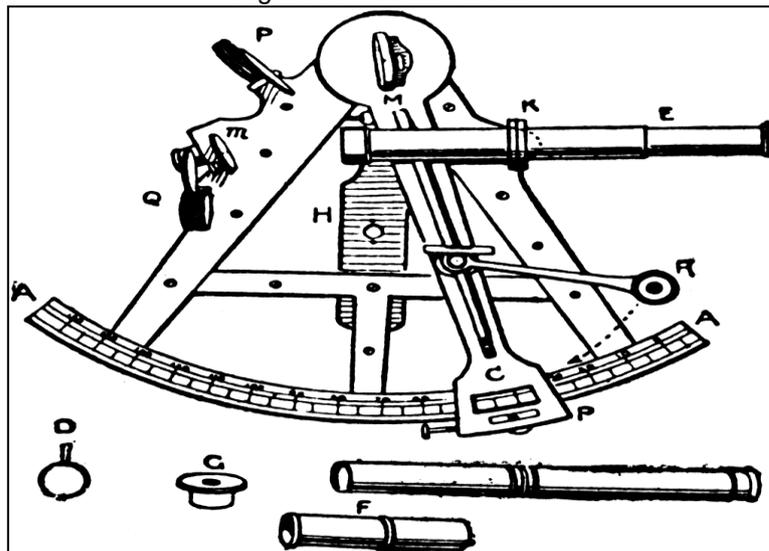


Fonte: FERNANDES et al (2011, p.68)

Sextante

Importante instrumento utilizado na navegação, foi criado no século XVIII para substituir o astrolábio, era utilizado para medir a abertura angular entre a vertical de um astro e o horizonte para fins de posicionamento da embarcação (VALENÇA, 2013). É formado por dois espelhos, um móvel e outro fixo, possibilitando coincidir as imagens entre o horizonte visual e o objeto observado podendo verificar a distância desejada, como mostra a figura 7.

Figura 7. Sextante Náutico



Fonte: http://etc.usf.edu/clipart/35100/35146/sextant_35146.htm

Todos os instrumentos citados neste capítulo contribuíram para as navegações, necessitando conhecimentos matemáticos tanto para a utilização como para a construção dos instrumentos. Pensando nisso, ao trazer para este trabalho uma sequência de atividades, que exploram a construção de um destes instrumentos (o quadrante), acredito estar proporcionando aos estudantes uma abordagem diferenciada da matemática em sala de aula que valorize elementos da história.

3. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA.

Neste capítulo, abordarei a importância da História da Matemática salientando sua potencialidade no ensino da matemática em sala de aula. Para dar suporte trago como referencial teórico Miguel (1997), Motta (2006), Miguel e Miorim (2008) e Mendes (2009).

Segundo Mendes (2009), um dos obstáculos para o sucesso dos processos de ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula é o desinteresse do aluno com relação ao modo que a matemática é apresentada, com aulas expositivas e até, por vezes, cansativas. Mendes (2009) defende que uma das melhores maneiras de se aprender matemática é através de um ensino mais prático e dinâmico por parte do professor e dos estudantes, experimentando e buscando novos caminhos que valorizem a experiência.

Pensando nesta mudança, a História da Matemática pode ser uma grande aliada para um ensino mais prático, pois se a trouxermos para dentro da sala de aula, os alunos podem construir pensamentos conjuntos de como os antigos matemáticos pensavam para resolver problemas do cotidiano e quais ferramentas matemáticas eram usadas.

Para que o ensino da Matemática alcance esses objetivos, proporcionando aos estudantes oportunidades de desenvolverem habilidades e conhecimentos úteis e que os preparem, como homens comuns, para ter uma compreensão relacional do conhecimento matemático ensinado na escola, é necessário a utilização de uma metodologia que valorize a ação docente do professor, através de um ensino partindo do concreto para o abstrato. (MENDES, 2009, p.109)

Desse modo, os estudantes constroem seu próprio conhecimento, pois deixam de ser expectadores nas aulas e passam a ser "criadores ativos" (MENDES, 2009, p.109), não no intuito de se tornarem especialistas em Matemática, mas sim participativos, enxergando-a com outros olhos na busca de uma compreensão mais eficaz em sala de aula.

Não se pode ser ingênuo em pensar que ao trazer a História da Matemática para dentro da sala de aula, esta solucionará todos os problemas, atribuindo o poder mágico de acabar com as dificuldades dos alunos nesta disciplina, pois seria ilusório pensar assim. Esta ingenuidade é marcante no início do século XX, segundo Miguel (2011)

Este ponto de vista ingênuo aparece principalmente em artigos publicados pela revista "*The Mathematics Teacher*" nas décadas 20 e 30 do nosso século. Nesses textos, o poder motivador da história é atestado e exaltado em função da adoção de uma concepção lúdica ou recreativa da mesma. É a história-anedotário vista como contraponto momentâneo necessário aos momentos formais de ensino, que exigiam grande dose de concentração e esforço por parte do aprendiz. Essa história-anedota de caráter estritamente factual, quando incorporada de forma episódica nas aulas de matemática, adquiria, segundo esses autores, uma função didática de "relax"- a recompensa repousaste merecida e necessária pelo esforço estafante requerido pela aprendizagem da matemática. (MIGUEL, 1997, p.75)

Acredito que ao trazer atividades que envolvam a História da Matemática para sala de aula, os alunos consigam participar das aulas de maneira mais ativa e aprender. Professor e estudantes iriam em busca de fatos históricos para relacioná-los com problemas atuais do cotidiano, obtendo uma espécie de ponte entre passado e presente.

É importante lembrar que os Parâmetros Curriculares Nacionais salientam a importância de se trabalhar a História da Matemática em sala de aula.

A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998, p.42)

Os planejamentos de ensino em formato linear e contínuo de conteúdos matemáticos, muitas vezes acabam deixando o professor de mãos atadas, no sentido de não se sentirem confortáveis em modificar a ordem dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula. Com o uso da História da Matemática, nada impede de transitar entre conteúdos já trabalhados, bem como inverter a ordem dos que irão ser abordados. Isso se deve ao fato de que os antigos matemáticos não tinham um padrão, ou uma linearidade de pensamentos, poderiam muito bem estar estudando geometria, por exemplo, e partir para conceitos da álgebra, dando suporte aos estudos geométricos. A necessidade, derivada das aplicações práticas ou dos problemas mais abstratos internos à matemática, era o que norteava a ordem com que os conteúdos eram estudados.

Infelizmente, nos dias de hoje, pelas experiências que tenho vivenciado, não é assim que acontece, pois geralmente não é trabalhado simultaneamente Álgebra e Geometria, tão pouco se norteia as aulas a partir de problemas ou perguntas que

favoreçam o pensamento matemático. Muitas vezes, não há uma ligação, ou diálogo, entre os ramos da Matemática. Na contramão desta realidade, a História da Matemática entraria como uma espécie de ponte fazendo ligações e criando conexões entre os campos da matemática. Desse modo, a História da Matemática nos ajuda em sala de aula através de discussões acerca dos objetivos e validades da Matemática na produção histórica cultural e social nos contextos sociais e conceituais ao longo do tempo (MOTTA, 2006).

Para Motta (2006), não se espera, com o uso da História da Matemática, que os estudantes tenham os mesmos pensamentos dos antigos matemáticos, mas sirva de ponto de partida para novos caminhos na construção de seus próprios conhecimentos, novas percepções de como podem aprender determinados conceitos matemáticos, trilhando outros caminhos, saindo do método tradicional de ensino. Segundo Motta (2006)

[...]nós dissemos que a história da matemática pode nos dar uma nova perspectiva para ensinar. É claro, nós não estamos dizendo que nossos estudantes devem seguir os mesmos caminhos que os dos matemáticos antigos. Indo além, esta é uma questão de melhor entender a natureza do conhecimento matemático e encontrar, em sua estrutura histórica, novas possibilidades de ensinar. Um dos pontos concernem ao currículo, que pode ser incrementado com ligações entre álgebra e números negativos. Em meu conhecimento, esses dois assuntos são usualmente ensinados de forma independente. A História pode sugerir algumas novas ligações (por exemplo, integrar o conceito de números negativos em umasequência de ensino algébrico). (MOTTA, 2006, p.55 apud Radford, 1995, p.35)

Nessa perspectiva, a História da Matemática serviria como pilar na formulação de atividades que favoreçam o protagonismo dos estudantes em sala de aula, no sentido de recriar argumentos e entendimentos dos conceitos trabalhados, adquirindo uma compreensão com significados e não a mecânica e sem sentido. Alguns estudantes trazem para sala de aula perguntas relacionadas ao uso na vida cotidiana dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula, logo essas indagações por parte dos alunos são um obstáculo a ser trabalhado, fazendo com que a história seja uma aliada para tentar responder a esses porquês (MENDES, 2009).

Um outro fator importante no uso da história da matemática em sala de aula é a desmistificação da Matemática, pois da forma que ela é abordada em muitas aulas expositivas, isto é, de forma lógica e linear, não remete à forma que foi historicamente produzida, causa a impressão de que os antigos matemáticos

passavam de teoremas para teoremas de forma simples e sem erros (MIGUEL; MIORIM, 2008).

Com o uso de atividades que envolvam elementos da História da Matemática, os alunos são provocados a criar hipóteses sobre os problemas. Cabendo ao professor não estar ali para resolver à sua maneira, mas sim como orientador e questionador dos caminhos que os alunos estão seguindo. Deste modo, considera-se que existem caminhos diferentes que levarão a soluções corretas.

É importante enfatizar que trabalhar história da matemática com os estudantes não é somente trazer fatos históricos isolados, nomes de matemáticos famosos ou fazer referência a datas. Mas sim, pensar em proporcionar aos alunos experiências onde eles se envolvam e consigam fazer relações com os fatos ocorridos no passado e, se possível, aplicá-los no presente. Por isso, as atividades elaboradas pelo professor devem ser pensadas e analisadas para que se consiga atingir os objetivos propostos, com o intuito de fazer com que os alunos percebam, por exemplo:

"(1) a Matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias Matemáticas; (4) as conexões existentes entre Matemática e filosofia, Matemática e religião, Matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos tem do próprio objeto da Matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

As relações entre o passado e o presente podem caminhar de mãos dadas durante uma aula de matemática, facilitando o processo de aprendizagem dos estudantes, proporcionando outro olhar e outras maneiras de se aprender. Segundo Alves e Lopes (2014), trabalhando a história da matemática, os alunos responderão a muitos porquês que existem nas escolas.

"No momento em que os alunos percebem o surgimento da Matemática a partir da busca por resolução de problemas cotidianos, conhecem também as preocupações de vários povos em diferentes momentos históricos. Isto proporcionará estabelecer comparações entre os processos matemáticos do passado e do presente, bem como compreender que os saberes ensinados na escola não se originaram sem um propósito, sem um porquê" (ALVES; LOPES, 2014, p. 323).

Infelizmente a utilização da história da matemática em sala de aula não é uma realidade comum no Brasil, um dos motivos é a falta de preparo por parte do professor em sair de sua zona de conforto, optando pelas aulas tradicionais, não

tendo interesse ou conhecimentos suficientes para criar situações didáticas que instiguem a curiosidade e a capacidade dos alunos. Santos (2013, p. 126) nos traz essa realidade "Aliar a História da Matemática ao conteúdo que deve ser aplicado em sala de aula ainda é uma prática distante das muitas aulas em escolas do país. A falta de preparo dos docentes para trabalhar com esse método é um dos fatores que impedem a sua aplicação em sala de aula".

Outra proposta interessante para introduzir História da Matemática nas aulas é o uso de problemas históricos, trabalhando com resolução de problemas de modo que o aluno tenha participação ativa e questionadora agindo como um elemento motivador para o ensino da Matemática. Segundo Miguel e Miorim (2013), os problemas históricos motivam porque: possibilitam o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos, constituem veículos de informação cultural e sociológica, permitem mostrar a existência de uma analogia entre conceitos matemáticos do passado e do presente, etc.

Além disso, a presença da História da Matemática fornece uma visão ampla para os estudantes, auxiliando na formação de um contexto, pois saber sobre as origens e a trajetória da ciência, pode facilitar o seu entendimento.

Vale ressaltar que não é unânime, entre os autores, o uso de história da matemática em sala de aula. Segundo Miguel e Miorim (2008) alguns autores não defendem nem incentivam a utilização da História da Matemática no processo de ensinar e aprender a Matemática. Alegando que há falta de literatura adequada anterior ao século XIX, sendo que, a literatura disponível, seria imprópria para sala de aula. Além disso, a própria história seria um fator complicador, pois dificultaria ao invés de facilitar o entendimento de determinados conceitos alegando que ao confrontar problemas originais os estudantes gastariam muito tempo para fazer relações com o passado.

Por outro lado, outros autores defendem que o uso da história dificulta, mas ao mesmo tempo dá sentido e esclarece, para eles a história da matemática deveria ser trabalhada melhor nas Universidades, de modo que os futuros professores saiam com uma bagagem melhor antes de ser trabalhada com seus estudantes em sala de aula.

Diante de argumentos a favor e contra o uso da História da Matemática em sala de aula, me propus a vivenciar uma experiência e problematizá-la a fim de buscar possíveis respostas para o problema da pesquisa.

Como mencionado anteriormente, o propósito do trabalho é apresentar um estudo sobre as potencialidades da história da matemática em sala de aula trazendo atividades que remetem ao período das navegações, explorando conceitos da trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência.

A importância da Trigonometria não se restringe somente na Matemática, mas sim, está presente em diversas áreas de conhecimento e profissões, pois sem os conhecimentos trigonométricos, seria impossível formar estes profissionais.

Como se sabe, o período das Grandes Navegações é um marco importante na história da humanidade, em que continentes e civilizações foram descobertos, comércios foram desenvolvidos, etc. Outro fator importante foi o surgimento de instrumentos de navegações, tais como a bússola, o quadrante, o astrolábio, os avanços na cartografia, dentre outros, ajudando nas orientações nos mares.

No que se refere a conhecimentos matemáticos e astronômicos, os portugueses tiveram influência dos árabes, aprendendo as técnicas de leitura das tabelas astronômicas se guiando pela estrela polar, onde a referência era dada por um instrumento bem rudimentar. No que diz respeito ao convívio com os árabes, Fernandes, et al (2011, p. 65 apud MOURÃO, 2000 p.53 e 54) afirmam que

A astronomia do Islã apresenta-se como um conjunto complexo, que se fez presente em regiões muito diversas, da Índia até a península ibérica, onde se desenvolveram, mais ou menos simultaneamente, várias escolas (isto é, linhas de pensamento transmitidas de geração em geração) que tiveram a capacidade de resistir às mudanças políticas. [...] Apesar dos últimos representantes da astronomia árabe terem desaparecido no século XV, seus conhecimentos, divulgados na península ibérica, foram a base de toda Astronomia com a qual os portugueses e espanhóis realizaram suas grandes viagens de Descobrimto.

Mas quais seriam os conhecimentos matemáticos existentes na época das Grandes Navegações? Segundo D'Ambrosio (2008), existiam cinco tipos distintos de Matemática, ou seja, matemática abstrata (com questões relacionadas à velocidade e movimentos de planetas), matemática mercantil (vinculada a área comercial), matemática de arquitetos e artistas, matemática das navegações (tratando de aspectos astronômicos e geográficos) e a matemática dos povos colonizados. Cada uma destas matemáticas tinha seu próprio estilo, contendo objetivos e métodos muito específicos.

A trigonometria utilizada nos instrumentos facilitou de forma significativas na orientação nos mares, pois os navegadores conseguiam saber o local onde se encontravam, através da distância entre o ponto de partida e o local da embarcação,

baseando-se na altura da estrela polar ou na inclinação do sol. Através do astrolábio e do quadrante sabemos a altura em que se encontra o astro e o ângulo por ele formado, conseguindo calcular, aplicando uma razão trigonométrica, a distância que a embarcação se encontra da costa.

Por fim, acredito que a inclusão da História da Matemática nas aulas de Matemática proporciona aos estudantes uma visão bem mais ampla da disciplina, mas sei que dependerá de cada ambiente escolar e de experiências próprias para saber se funcionará ou não. Quando se trabalha com História da Matemática não se tem um método único ou um modelo a ser seguido que garanta o sucesso das atividades desenvolvidas. Talvez seja este o principal motivo para eu querer trabalhá-la em sala de aula, pois no momento em que ampliamos os horizontes para novas possibilidades, a chance de nos surpreendemos com os resultados aumenta.

4. UMA EXPERIÊNCIA COM A CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS DE NAVEGAÇÃO E O RELÓGIO DE SOL.

Trago para este trabalho uma sequência de três atividades com o intuito de trabalhar um pouco da história da trigonometria na sala de aula e investigar a potencialidade da história da matemática nos processos de ensino e aprendizagem. As atividades são uma adaptação das atividades apresentadas por Mendes (2009) no livro *História da Matemática em Atividades Didática* e material disponibilizado e desenvolvido por estudantes da Unicamp.

A metodologia utilizada neste trabalho foi a pesquisa-ação de caráter qualitativo, considerando que atuo como professor contratado em turmas do ensino médio da rede estadual de ensino na cidade de Porto Alegre. Neste sentido, sou o professor da turma em que desenvolvi o estudo. Segundo Elliott (1990), a pesquisa-ação direciona-se em atuações históricas e situações sociais, a partir de problemáticas percebidas pelo professor indo em busca de possibilidades para mudanças e melhorias do ambiente escolar.

Segundo Tripp (2005, p.445) "A pesquisa-ação educacional é principalmente uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores de modo que eles possam utilizar suas pesquisas para aprimorar seu ensino e, em decorrência, o aprendizado de seus alunos". Além disso, é conhecida por alguns pesquisadores como sendo "uma família de atividades", exatamente a proposta que trabalhei com os estudantes, trazendo elementos da história da trigonometria para dentro da sala de aula.

Para este trabalho, as atividades foram aplicadas com 18 estudantes do segundo ano do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia da rede estadual de ensino do Rio Grande do Sul, na cidade de Porto Alegre, no período de 13/12/2017 à 16/12/2017.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

ATIVIDADE I - EXPLORANDO O CICLO TRIGONOMÉTRICO.

A divisão do ciclo trigonométrico em 360° se originou com os babilônicos, pois como a base de medida deles era 60 ficava fácil dividir o ciclo em seis partes iguais e,

posteriormente, subdividi-lo em 360 partes iguais, além do fato do ano ter 360 dias, segundo concepções babilônicas. A atividade que segue é uma adaptação para a sala de aula dos procedimentos adotados pelos babilônios.

Descrição Geral e Objetivos

Esta atividade pode ser executada em 3 aulas de 50 minutos cada e tem por objetivos obter os valores para o seno, cosseno e tangente dos principais ângulos a partir da exploração do ciclo trigonométrico, relacionar os valores encontrados no 1º quadrante com os demais quadrantes e interpretar os valores encontrados no ciclo trigonométrico estabelecendo os sinais das relações trigonométricas em cada quadrante.

Os materiais necessários para a atividade são: transferidor, barbante, tinta, pincel e fita métrica.

Construção Prática

- Construir uma circunferência de raio 2 metros no pátio da Escola dividindo em quatro partes iguais, denominando cada parte de quadrante e marcar os ângulos notáveis compreendidos entre 0° e 360° ;
- Problematizar com os estudantes as questões: O que significa o seno de 30° , o cosseno de 45° , a tangente de 45° , etc; Será que você pode determinar o seno de 0° e o Cosseno de 0° ? Como explicar o valor encontrado para essas relações?
- Determinar os valores de seno, cosseno, tangente e cotangente dos ângulos e anotar em uma tabela, conforme o modelo a seguir. Comparando os valores obtidos com os das tabelas contidas nos livros didáticos;

Figura 8: Tabela para preenchimento

Gra	0	30	45	60	90	12	13	15	18	21	22	24	27	30	31	33	36
us	o	o	o	o	o	0°	5°	0°	0°	0°	5°	0°	0°	0°	5°	0°	0°
Sen																	
Cos																	
Tg																	

Fonte: Acervo pessoal

- Algumas questões para serem discutidas com os estudantes:
 - Será que conseguimos apontar alguma relação entre os valores de seno, cosseno e tangente encontrados no 1º quadrante e os demais quadrantes? Quais?
 - Quais os arcos que apresentam os mesmos valores para seno, cosseno e tangente? Como explicar o fato?
 - O que ocorre com os valores encontrados para seno, cosseno e tangente no 1º quadrante, quando comparamos aos arcos correspondentes nos outros quadrantes?

ATIVIDADE II - O QUADRANTE

Descrição Geral e Objetivos

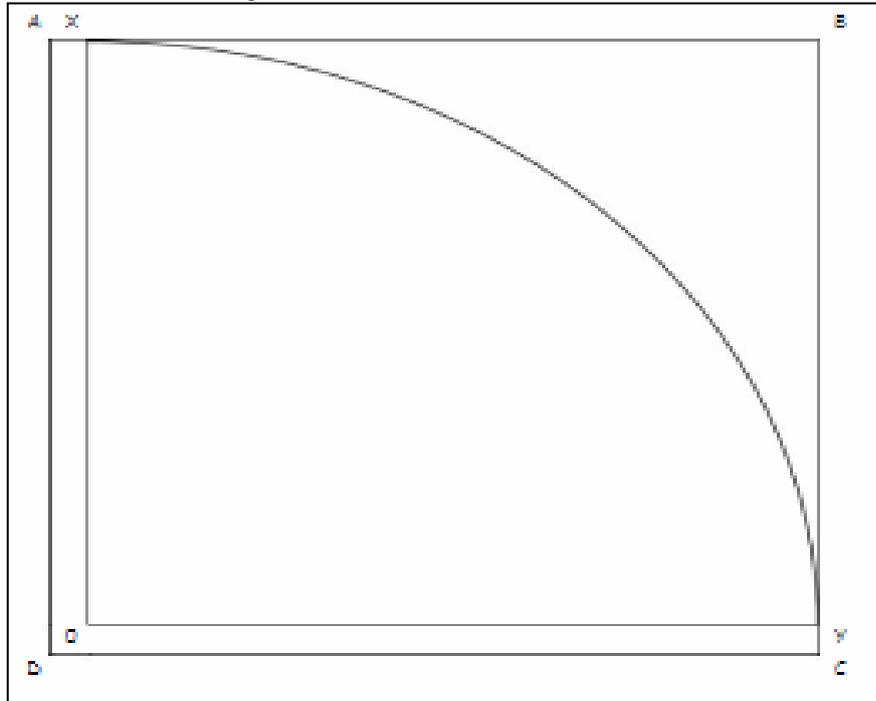
Esta atividade pode ser executada em 4 momentos de 50 minutos cada, sendo duas para a construção do instrumento e outras duas para prática, isto é, medir altura de objetos. Tem por objetivos construir e explorar as funcionalidades de um quadrante, desenvolver o raciocínio e o pensamento matemático, bem como a capacidade de usar a Matemática em um instrumento bastante utilizado nas Navegações.

Os materiais necessários para a construção do quadrante são: folha de cartolina, isopor ou caixa de papelão, fio de barbante, peso (para amarrar no fio de barbante), canudo, régua, compasso, transferidor, canetas coloridas e tesoura.

Construção Prática

- Na folha de cartolina construir um quadrado ABCD de lado 20 cm, neste mesmo quadrado desenhar as margens AD e CD. Depois traçar $\frac{1}{4}$ de circunferência com centro em O e raio 19 cm, como na figura 9;

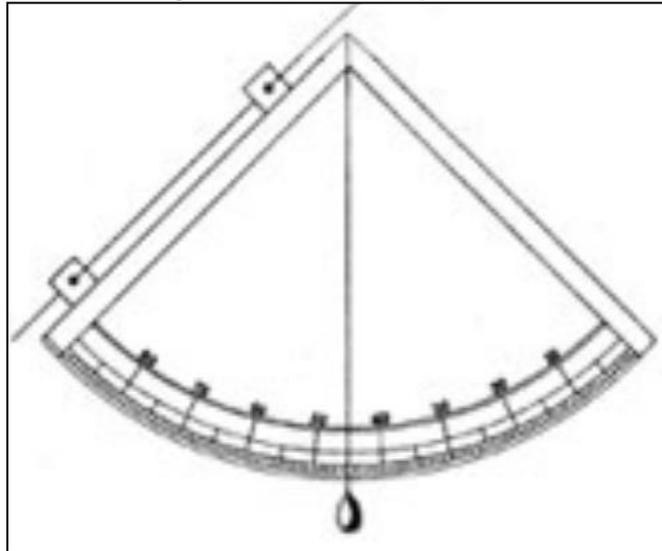
Figura 9. Quadrante da circunferência



Fonte: Acervo pessoal

- Recortar a parte circular e graduar o quadrante com uma amplitude de 5 em 5 graus;
- Perfurar o quadrante no ponto O e colocar o fio de barbante com o peso amarrado a ponta;
- Colar o canudo no lado OX.

Figura 10. Modelo do quadrante



Fonte: <http://cvc.instituto-camoes.pt/navegaort/a28.html>

ATIVIDADE III - CONSTRUINDO E OBSERVANDO UM RELÓGIO DE SOL.

Os relógios de sol mais antigos de que se tem notícia datam de aproximadamente 4000 anos, na Mesopotâmia e na Babilônia, posteriormente, por volta do sec. VII a.C, os egípcios utilizavam um *gnomon* vertical na construção dos relógios. É provável que os seres humanos utilizavam o comprimento das sombras para saberem a hora mesmo em tempos mais antigos, apesar dessa hipótese ser difícil de confirmar (MENDES, 2009).

Esta atividade foi desenvolvida a partir de uma adaptação do trabalho de alunos da Unicamp, podendo ser aplicada tanto com estudantes do Ensino Fundamental quando do Ensino Médio.

Descrição Geral e Objetivos

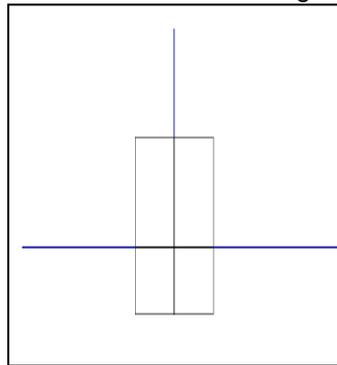
Esta atividade pode ser executada em 5 aulas de 50 minutos cada, tem por objetivos construir e explorar um Relógio de Sol, compreender noções de latitude e longitude, Norte real e Norte magnético (bússola), declinação magnética, bem como interpretar as noções de trigonometria envolvidas no estudo.

Os materiais necessários para esta atividade são: transferidor, compasso, régua e esquadro, isopor, caixa de papelão, canetas coloridas e lápis.

Construções Práticas:

- Verificar a Latitude (os Paralelos) e a Longitude (os Meridianos) do local onde será fabricado o relógio de sol, no nosso caso será a cidade de Porto Alegre;
- Desenhar na folha de papel um retângulo de dimensões 15cm x 20cm (será o mostrador do Relógio de Sol) e faça duas linhas (uma horizontal passando bem no centro do retângulo de modo que a estenda um pouco para cima e outra vertical passando um pouco abaixo do centro), conforme figura 11;

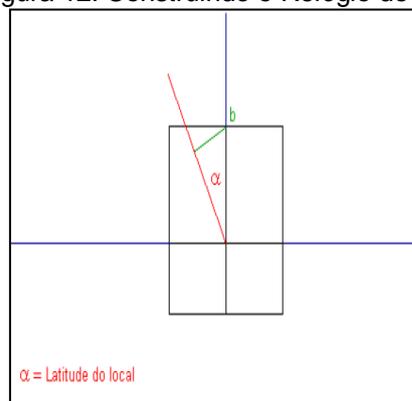
Figura 11. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

- Traçar, a partir do ponto de cruzamento das linhas, uma linha que forme um ângulo igual a latitude do local, como estamos em Porto Alegre o ângulo será de 30° , com a linha vertical;
- Traçar uma linha, que passe pelo ponto "b" atinja a linha vermelha com um ângulo de 90° ; segundo a figura 12;

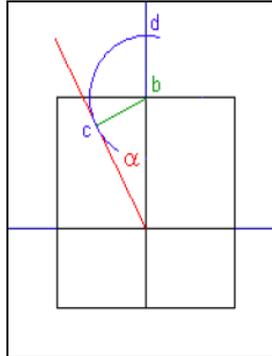
Figura 12. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

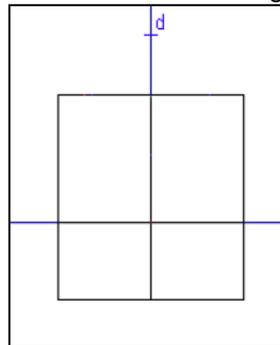
- Com um compasso no ponto "b", desenhar um arco de círculo até encontrar a linha vertical num ponto "d". Feito isso, apagamos tudo e ficamos somente com o ponto "d"; como ilustra as figuras 13 e 14;

Figura 13. Construindo o Relógio de Sol



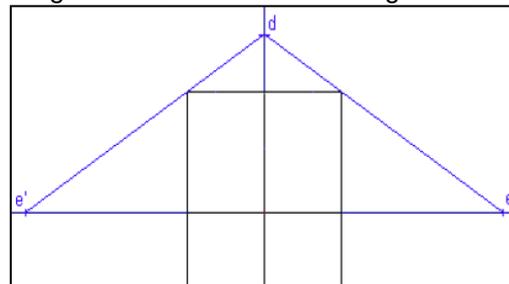
Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

Figura 14. Construindo o Relógio de Sol



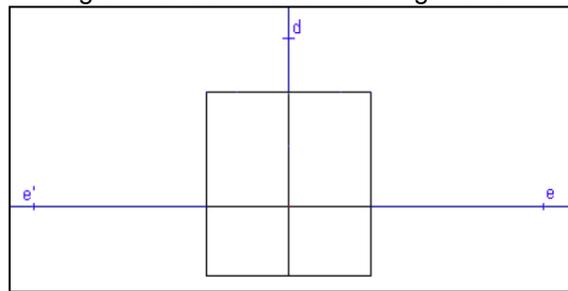
- Traçar duas linhas partindo de "d" e passando pelos vértices superiores do retângulo até encontrar as linhas horizontais gerando os pontos e e e';
- Temos assim os três pontos de partida para desenharmos o Relógio de Sol, conforme figuras 15 e 16;

Figura 15. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

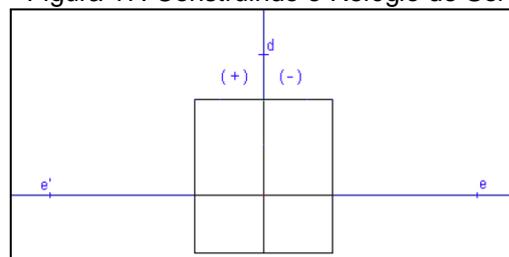
Figura 16. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

- Calcular a diferença entre a "longitude do fuso horário" e a "longitude do local" onde o relógio solar será instalado. Para saber a longitude do local deve-se recorrer a um mapa e ver o valor do meridiano local (linhas verticais do mapa). Por exemplo: em Porto Alegre a longitude é 51 graus e o fuso horário é o fuso de Brasília que é centrado na longitude 45 graus, então temos $(45-51) = -6$ graus. Na figura abaixo existem os sinais de positivo e de negativo, como o resultado da nossa conta deu -6° , utilizar o lado direito para o próximo passo, conforme figura 17;

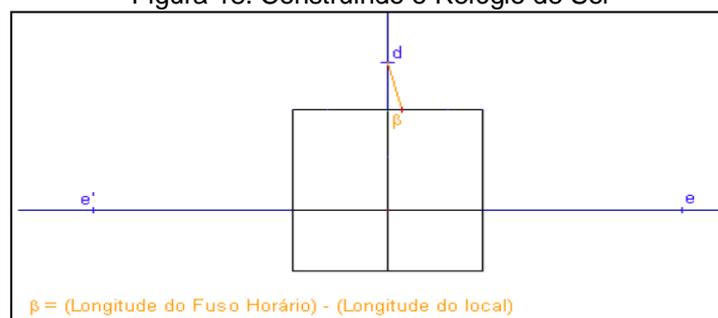
Figura 17. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

- Abrir um ângulo β , que no nosso caso terá 6° , ilustrado na figura 18;

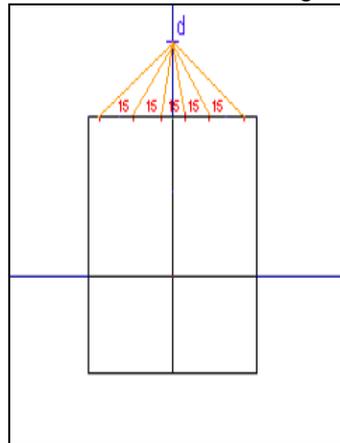
Figura 18. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

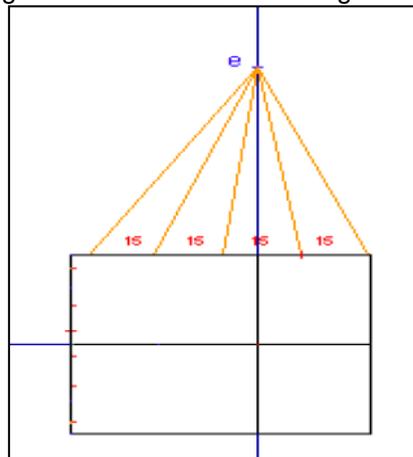
- A partir da linha traçada pelo ângulo β , traçar linhas espaçadas de 15 em 15 graus (devido ao fato de que a cada 15° de rotação da terra se passa uma hora) até que toda parte superior do retângulo seja preenchido e, repetir o mesmo processo com os pontos e e e' , conforme figuras 19, 20 e 21;

Figura 19. Construindo o Relógio de Sol



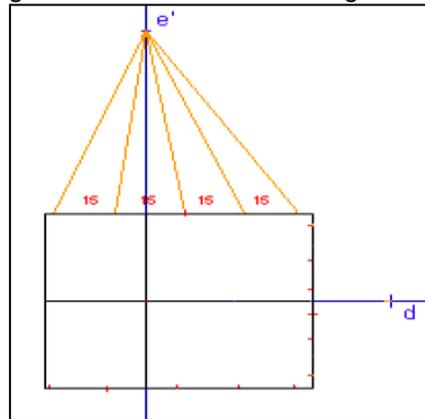
Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

Figura 20. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

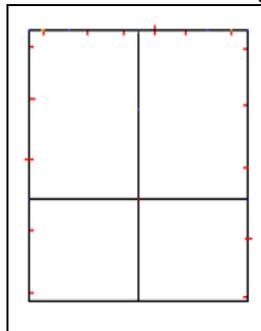
Figura 21. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

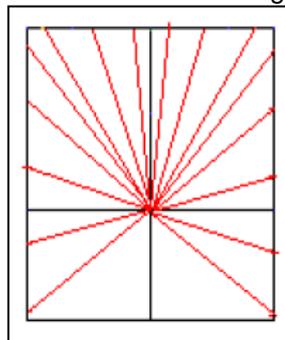
- Com estes procedimentos temos todas as marcas das horas cheias para desenhar o Relógio de Sol, daí basta traçar as linhas a partir das marcas até o centro. As linhas feitas a partir do ângulo β , definem as 6hs, 12hs e 18hs, como mostra as figuras 22, 23 e 24;

Figura 22. Construindo o Relógio de Sol



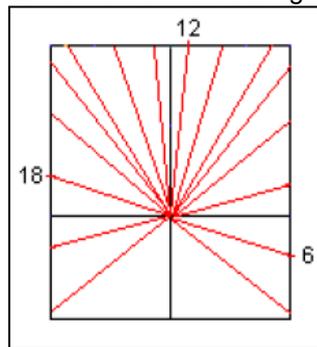
Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

Figura 23. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

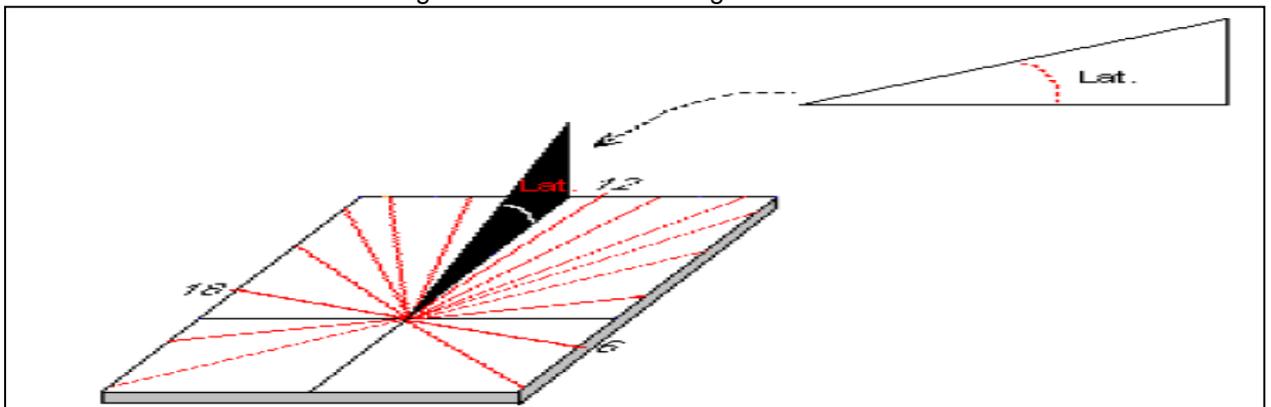
Figura 24. Construindo o Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

- Para construir o *gnomon*, é preciso uma chapa em forma de triângulo que fará a sombra no relógio com um ângulo horizontal igual a latitude do lugar (no nosso caso 30° , pois a latitude de Porto Alegre é 30°). Este triângulo será fixado com o vértice exatamente no centro do relógio (exatamente onde as linhas se cruzam) e sua base bem na linha onde está o ponto "d", segundo a figura 25;

Figura 25. Modelo do Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

- Instalação do Relógio de Sol:
 - 1º) Precisamos escolher um local onde receba sol em boa parte do dia;
 - 2º) Apontar a borda inclinada do *gnomon* para o pólo sul celeste, utilizando uma bússola e corrigir a declinação magnética (no caso de Porto Alegre é de aproximadamente 17°).
- Olhar a hora em nosso Relógio Solar.

5. REFLEXÕES SOBRE A EXPERIÊNCIA VIVIDA.

A sequência de atividades foi realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia, entre os dias 13/11/2017 e 16/12/2017, em uma turma do segundo ano do ensino médio, com 18 alunos. Ao total foram realizados 11 encontros, dispostos na tabela abaixo, sendo um de três períodos de 50 minutos cada, quatro de dois períodos de 50 minutos cada, e seis de um período de 50 minutos, conforme Tabela 1.

Tabela 1: Distribuição das Atividades Executadas.

ENCONTRO	DURAÇÃO	ATIVIDADES
Encontro 1: 13/11/2017	1h40min	Atividade I (Construção)
Encontro 2: 14/11/2017	50 minutos	Atividade I (Construção)
Encontro 3: 20/11/2017	1h40min	Atividade I (Construção)
Encontro 4: 24/11/2017	50 minutos	Atividade II (Construção)
Encontro 5: 28/11/2017	50 minutos	Atividade II (Construção)
Encontro 6: 01/12/2017	50 minutos	Atividade II (Construção)
Encontro 7: 08/12/2017	50 minutos	Atividade I (Prática)
Encontro 8: 11/12/2017	1h40min	Atividade I (Prática)
Encontro 9: 12/12/2017	50 minutos	Atividade I e Atividade II (Prática)
Encontro 10: 15/12/2017	1h40min	Atividade III (Construção)
Encontro 11: 16/12/2017	2h30min	Atividade III (Construção e Prática)

Fonte: Acervo do autor

6.1 Encontro 1:

No pátio da escola, existe uma plataforma circular, a ideia era construir uma circunferência "dentro" da plataforma para trabalhar as relações trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de maneira prática, relacionando com a tábua de Ptolomeu. Mendes (2009) defende que ao se trabalhar a matemática através de um ensino mais prático e dinâmico por parte do professor e dos estudantes, experimentando e buscando novos caminhos para superar os obstáculos, acrescentando que, com o uso da História da Matemática, é possível um resultado melhor nos processos de ensino e aprendizagem.

Comecei a aula convidando os alunos para o "redondo", o nome dado pelos alunos para a plataforma. Chegando lá, pedi para que eles me respondessem qual a figura geométrica da plataforma? Sem maiores problemas o aluno 1 respondeu: - *É uma circunferência*. Já o aluno 2 respondeu: - *É um círculo*. Então, comecei a aula explicando a diferença entre circunferência e círculo. Depois, pedi que eles medissem a distância do centro até a borda da plataforma (4 metros) com o auxílio de uma fita métrica e expliquei que esta medida encontrada é conhecida como raio da circunferência.

Em seguida, perguntei: - Se construirmos uma circunferência de raio medindo 3,5 metros, por onde deveríamos começar? De imediato um dos alunos respondeu: - *Pegamos uma corda de comprimento 3,5 metros colocamos uma ponta no centro e com a outra ponta damos uma volta completa, riscando o chão com caneta ou algo do tipo*. Então eu falei: - Ok, comecem a construir nossa circunferência.

Um aluno ficou no centro e outro, com o auxílio de uma fita métrica, mediu 3,5 metros e marcou um ponto de caneta vermelha no chão. Outro aluno pegou uma caneta preta e amarrou-a na outra ponta da corda e deu uma volta completa para demarcar a circunferência. Alguns alunos, usando um pincel e tinta branca, desenharam a borda da circunferência, conforme ilustrado na figura 26.

Figura 26. Construindo a borda da circunferência



Fonte: Acervo do autor

O próximo passo foi dividir a circunferência em quatro partes iguais (quadrantes), gerando dois eixos principais na circunferência (eixos do seno e do cosseno), em seguida demarcaram os principais ângulos (0° , 90° , 180° , 270° e 360°) e dividiram cada um dos dois eixos em vinte partes iguais a 35 centímetros

(correspondente à um décimo do raio da circunferência), sendo dez no sentido positivo e dez no sentido negativo em cada um dos dois eixos, a figura 27 detalha como foi feito este processo.

Figura 27. Demarcando a circunferência



Fonte: Acervo do autor

Defini com os alunos que o raio da circunferência não seria 3,5 metros, mas sim 1 unidade de comprimento. Detalhei para eles que não precisamos nos ater na unidade de medida em metros, podemos pensar que essa 1 unidade de comprimento seria uma espécie de medida genérica.

Comentei que poderíamos ter trabalhado este conteúdo em sala de aula sem problema algum, mas no momento em que trabalhamos de maneira prática, construindo nosso próprio ciclo trigonométrico, enxergamos a trigonometria com outros olhos e que os estava provocando a fazer essa experiência.

A ideia de experiência em matemática na sala de aula que estamos buscando aproxima-se da ideia de experiência proposta por Larrosa (2011).

Para Larrosa (2011), experiência é o que me transforma, "me toca", o que "me passa", no sentido de que ao realizar qualquer experiência, temos que estar abertos a novos conhecimentos e interpretações das práticas vivenciadas. No momento em que se vivencia novas experiências, neste caso na escola, os estudantes passam por momentos em que surgem dúvidas, receios e problemas que podem ser debatidos e refletidos, no sentido de transformar o indivíduo através da experiência.

A aula passou muito rápido, mesmo com o calor insuportável, os alunos se empenharam e fizeram a construção sem maiores problemas.

Pude perceber que, ao trazer os estudantes para fora da sala de aula, mostraram-se mais participativos e colaborativos.

6.2 Encontro 2:

Iniciou-se a aula e convidei os alunos para irmos direto ao pátio dar continuidade à atividade. Pedi que eles graduassem os eixos do seno e do cosseno, onde cada risco seria um décimo do raio, ilustrado nas figuras 28 e 29. Uma aluna perguntou: - *Professor, se formos para a direita colocamos o valor de 0,1, certo?* Respondi que sim, pois um décimo é o próprio 0,1. Aproveitando o questionamento dela, perguntei: - *E quando marcamos para o outro lado? Fica a mesma coisa?* Um dos alunos respondeu: - *Fica negativo né sor? Igual em funções do ano passado.* Concordei com ele e perguntei para a aluna que havia feito questionamento se ela entendeu o raciocínio. Respondeu que sim, logo continuamos a aula. Os alunos fizeram a conexão com a reta numérica dos números racionais e o plano cartesiano.

Figura 28. Graduando o eixo do cosseno



Fonte: Acervo do autor

Figura 29. Graduando o eixo do seno



Fonte: Acervo do autor

De modo geral, os alunos graduaram sem maiores dificuldades e conseguiram entender o porquê de a cada risco contamos 0,1; 0,2 e assim por diante até chegarmos a 1 e -1. Com isso a aula terminou e ficou acordado que no próximo encontro introduziríamos os ângulos notáveis da circunferência, ou seja, 30° , 45° , 60° e seus respectivos correspondentes nos demais quadrantes.

6.3 Encontro 3:

Comecei a aula mostrando para os alunos um transferidor de tamanho grande e feito de madeira. Eu os questionei com a seguinte pergunta: - *Como podemos colocar, da maneira mais precisa possível, os ângulos de 30° , 45° e 60° no 1º quadrante da circunferência?* Olharam para o transferidor e responderam que seria através dele que construiríamos os ângulos, mas não conseguiram explicar como. Então formulei outra pergunta: - *Colocando o transferidor na origem da nossa circunferência, marcando os ângulos no chão e com o auxílio de um barbante de 3,5 metros, passando pelo centro e pelos pontos correspondentes a cada ângulo, fazendo com que a extremidade tocasse na borda da circunferência, funcionaria?*

Responderam, meio desconfiados, que sim. Então, pedi que marcassem esses ângulos e seguissem o mesmo procedimento nos demais quadrantes. Realizaram o processo de maneira rápida, pois enquanto alguns marcavam, outros dois alunos pintavam os ângulos na cor branca. A figura 30 nos auxilia a entender melhor os passos do procedimento.

Figura 30. Demarcando os ângulos com o transferidor



Fonte: Acervo do autor

Enquanto alguns alunos graduavam os ângulos na borda da circunferência, pedi para que outros escrevessem em cada quadrante as letras U, S, T e C (nesta ordem), ou seja, 1° quadrante a letra U, 2° a letra S, 3° a letra T e 4° a letra C. Representando o sinal positivo das relações Seno, Cosseno e Tangente em cada um dos quadrantes da circunferência, de modo que conseguíssemos escrever a seguinte frase "*Unidos Somos Todos Campeões*". Onde U (1° Quadrante) significa que todas as relações são positivas, o S (2° Quadrante) somente o Seno é positivo, a letra T (3° Quadrante) a Tangente é positiva e, por fim, o C (4° Quadrante) somente o Cosseno é positivo.

Feito isto, o nosso ciclo trigonométrico estava pronto, conforme figura 31, ficando para próxima aula a parte prática da atividade I.

Figura 31. Finalizando o ciclo trigonométrico



Fonte: Acervo do autor

6.4 Encontro 4:

Neste encontro 4, tínhamos combinado que trabalharíamos no ciclo trigonométrico, mas como estava chovendo, não era viável irmos para o pátio. Os alunos começam a construção do quadrante (Atividade II de nossa sequência), instrumento de navegação explicado nos capítulos anteriores. A atividade teve início com a divisão de um pedaço de cartolina em quatro partes, de modo que cada estudante ficasse com uma parte. Pedi que desenhasssem um quadrado de lados medindo 10 centímetros e dentro do quadrado um quarto de circunferência, de raio medindo o comprimento do lado do quadrado, com o auxílio de um compasso. Em seguida, pedi para que eles graduassem o quarto de circunferência de 5 em 5 graus, usando um transferidor.

Os alunos conseguiram, em sua maioria, terminar esta parte da atividade conforme figura 32.

Figura 32. Construindo o quadrante

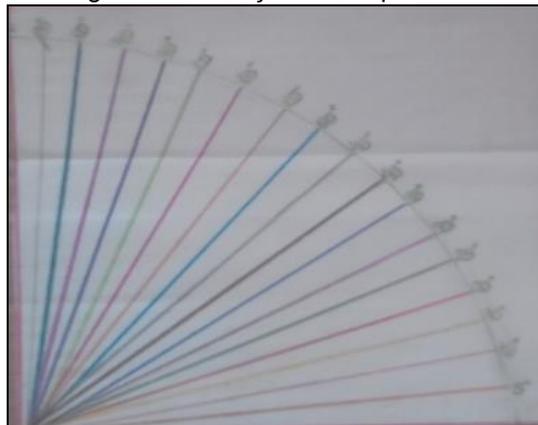


Fonte: Acervo do autor

6.5 Encontro 5:

Continuaram a construção do quadrante, depois de graduado pedi que contornassem, utilizando canetinhas de colorir ou lápis de cor, conforme figura 33. Dois alunos ficaram encarregados de pintar de azul algumas pedrinhas achadas no chão, pois serviriam de peso para amarrar o barbante. No encerramento da aula, pedi que para nosso próximo encontro seria necessário que trouxessem caixas de papelão, para colarem a cartolina nela.

Figura 33. Esboço de um quadrante



.Fonte: Acervo do autor

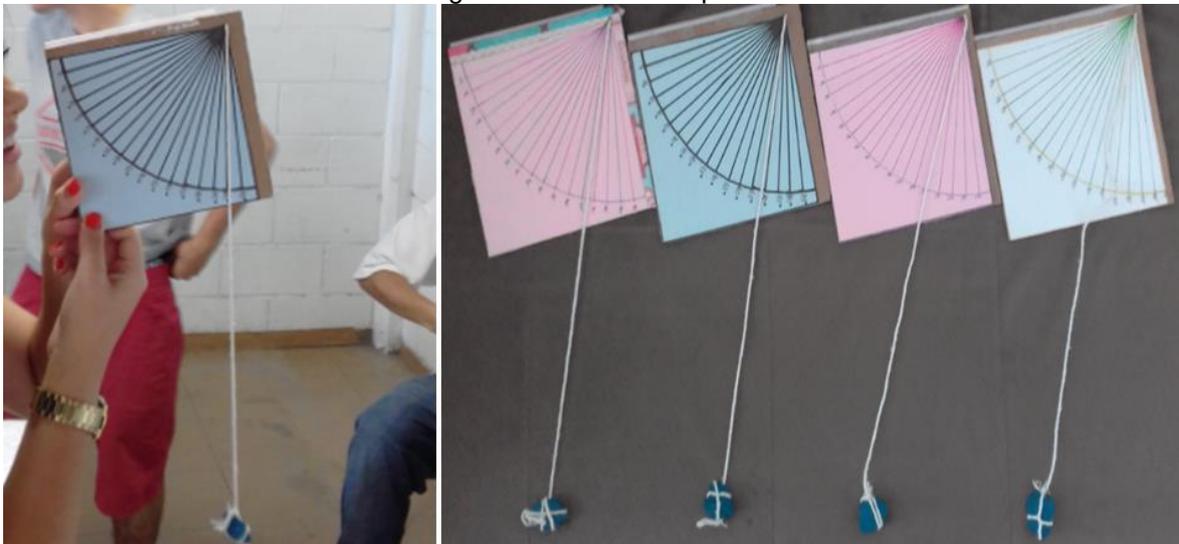
6.6 Encontro 6:

Neste encontro, os alunos concluíram o quadrante. Após a "arte" (descrevo arte no sentido de que cada estudante ficou livre para pintar da maneira que achasse melhor), colaram a cartolina no papelão e furaram na origem amarrando

nesta uma extremidade do barbante. Na outra extremidade do barbante, amarraram a pedra pintada de azul, servindo de peso. Com os quadrantes concluídos, na figura 34 mostro alguns deles, combinei com os alunos que no próximo encontro, colocaríamos em prática o ciclo trigonométrico (Atividade I) e o quadrante (Atividade II).

A aula foi bem produtiva, apesar de ter sido um período, pois a maioria dos estudantes conseguiu construir quadrantes muito bonitos. Acho interessante ressaltar que durante esta atividade, dois alunos se mostraram muito desmotivados e desinteressados com a atividade não conseguindo concluí-la.

Figura 34. Quadrantes prontos



Fonte: Acervo do autor

6.7 Encontro 7:

No início da aula, entreguei aos alunos uma folha de papel contendo uma tabela com os principais ângulos da circunferência e algumas questões a serem respondidas, para que preenchessem durante a prática. Iniciei a aula contando um pouco da história do ciclo trigonométrico, as contribuições de Hiparco, já mencionado neste trabalho, que é considerado o pai da trigonometria, conversamos, também, sobre quem foi Ptolomeu e suas contribuições para a Matemática, em especial na Trigonometria. Passei alguns minutos mostrando para os estudantes como era o processo de medir cordas em determinada abertura de um arco, utilizada por Ptolomeu em seu instrumento, conhecido como a Tábua de Ptolomeu.

Neste diálogo a História da Matemática foi trazida de forma mais expositiva. Na expectativa que consigam estabelecer conexões com problemas atuais. É lógico que não espero que os estudantes tenham os mesmos pensamentos dos antigos matemáticos, pois como Motta (2006) defende, espera-se que o uso da HM sirva como ponto de partida para novos caminhos na construção de seus próprios conhecimentos, novas percepções de como podem aprender determinados conceitos matemáticos, trilhando outros caminhos, saindo do método "tradicional" de ensino.

A aula não foi muito produtiva, pois devido ao calor intenso, os estudantes ficaram muito dispersos. Começaram completando os valores de seno e cosseno dos ângulos do primeiro quadrante, com o auxílio de um barbante. Procederam da seguinte maneira: um aluno ficou segurando a ponta do barbante no centro da circunferência, enquanto outro segurava no ângulo correspondente (30°), já o terceiro aluno levava o barbante até o eixo do seno (verificando o valor para os demais colegas anotarem em suas tabelas), logo após de verificarem o valor do seno, este terceiro aluno levava o barbante para o eixo do cosseno para os demais colegas anotarem o valor correspondente. Repetiram o processo para os ângulos de 45° e 60° .

Para calcular a tangente dos ângulos do primeiro quadrante, fizeram o mesmo processo utilizado para determinar os senos e os cossenos, mas ao invés de irem para os eixos destes, prolongaram até o eixo da tangente (um dos estudantes segurou um outro pedaço de barbante tangenciando a circunferência no 0° e paralelo ao eixo do seno). Quando o barbante que passava no respectivo ângulo tocava no eixo da tangente (outro barbante), pegavam este e o levavam para o eixo do seno para determinar o comprimento. A figura 35 ilustra como o processo foi realizado.

Figura 35. Determinando os valores do seno, cosseno e tangente no 1º quadrante



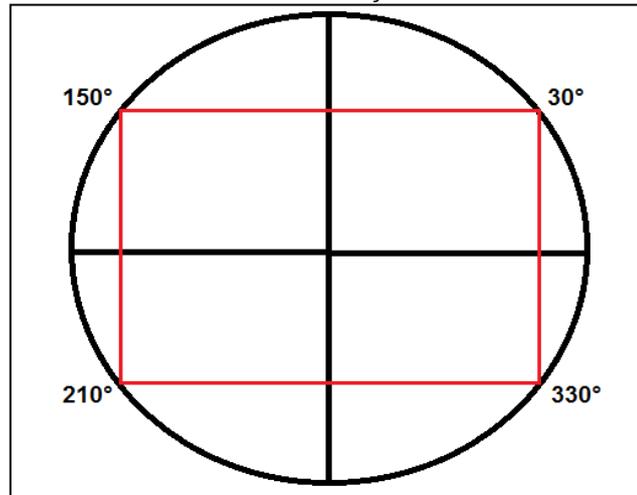
Fonte: Acervo do autor

6.8 Encontro 8:

Continuamos o processo de completar a tabela de ângulos. Abro espaço para colocar o diálogo que tive com um dos estudantes em relação aos valores das relações seno e cosseno para os demais quadrantes, pois segundo Mendes (2009), a História da Matemática pode servir como pilar na formulação de novas atividades em que os estudantes sejam protagonistas em sala de aula, no sentido de recriar argumentos e entendimentos dos conceitos trabalhados, adquirindo uma compreensão com significados e não mecânica e sem sentido.

O aluno pergunta: *-Sor, se colocar o barbante em cima dos ângulos dos quatro quadrantes formando um retângulo, não seria os mesmos valores mudando o sinal?* Confesso que fiquei surpreso com o comentário dele e respondi que o pensamento dele estava correto e completei que esta ideia se baseia no conceito de simetria. Ilustro este raciocínio na figura 36, onde os eixos vertical e horizontal são, respectivamente, do seno e do cosseno.

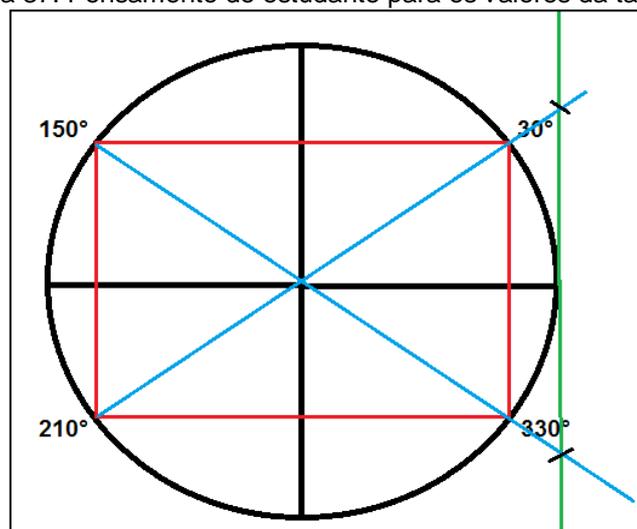
Figura 36. Pensamento do estudante em relação aos valores do seno e do cosseno



Fonte: Acervo do autor

Em seguida, pedi que terminassem de completar a tabela usando este raciocínio e perguntei: - *e com a tangente? como irão fazer?* Para minha surpresa, este mesmo aluno respondeu que seria o mesmo pensamento, sendo os valores das tangentes iguais ao prolongamento das diagonais destes retângulos, ilustrado na figura 37, onde a reta vertical na cor verde é o eixo da tangente e as linhas em azul são as diagonais do retângulo proposto pelo estudante. Concordei novamente, e deixei que terminassem o trabalho. A tabela com os valores das relações trigonométricas dos ângulos está ilustrada na figura 38.

Figura 37. Pensamento do estudante para os valores da tangente



Fonte: Acervo do autor

Figura 38. Tabela completada por um dos estudantes

1- Determinar os valores de seno, cosseno, tangente dos ângulos e anotar em sua tabela, descrita abaixo, bem como preencher a linha dos radianos. Comparando os valores obtidos com a do livro didático;

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Sen	0	0,5	0,69	0,88	1	0,85	0,68	0,5	0	-0,5	0,69	-0,87	-1	-0,87	-0,69	-0,30	0
Cos	1	0,85	0,72	0,48	0	-0,5	-0,85	-0,85	-1	0,85	-0,73	-0,5	0	0,5	0,72		1
Tg	0	0,65	1	1,8	∞	-1,8	-1	-0,65	0	0,65	1	1,8	∞	-1,8	-1	-0,65	0

Fonte: Acervo do autor

6.9 Encontro 9:

Levei os alunos ao pátio para colocarem em prática o quadrante, mas antes, fiz uma roda de conversa para eu lhes contar um pouco da história do quadrante e como ele era utilizado nas navegações. O objetivo da aula era calcular, de maneira aproximada, a altura do ginásio de esportes e da própria escola. Antes de iniciar a prática, ficou combinado que um passo seria aproximadamente um metro.

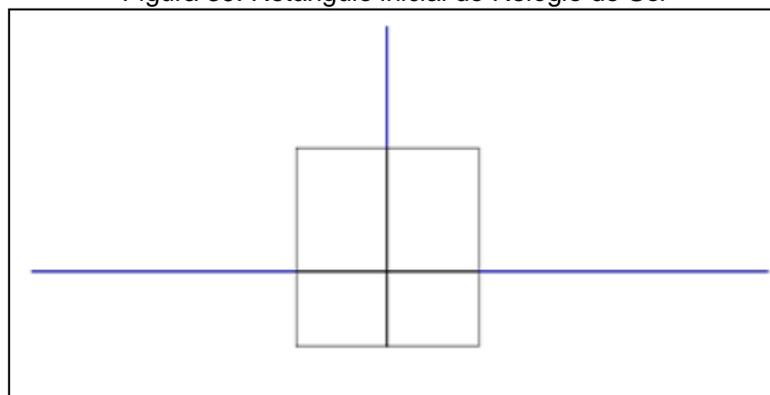
Perguntei: - *Alguns de vocês têm ideia de como calculamos a altura da escola?* Um dos estudantes respondeu: - *Podemos utilizar triângulos retângulos igual vimos na aula?* Respondi que sim, porque como já tínhamos trabalhado com as relações trigonométricas no triângulo retângulo, seria o mesmo procedimento, só que agora de uma maneira mais prática. Uma observação interessante de salientar, foi a pergunta em relação ao observador: - *Na hora de medir a altura, utilizamos a tangente? E consideramos a minha altura ou não?* Achei a pergunta muito oportuna, então chamei a turma e os questionei sobre a pergunta do colega. Disseram que teria que considerar a altura do observador, mas não conseguiram explicar o porquê.

Como deixei a critério deles escolher quais alturas calculariam, alguns optaram em medir a escola (acharam a altura aproximada de 16 metros), enquanto outros mediram o ginásio (onde a altura aproximada foi de 23 metros). Com isso, encerrou-se a atividade II. Ficando para o próximo encontro o início do relógio de sol.

6.10 Encontro 10:

Nesta aula, iniciou-se a construção do Relógio de Sol, ficou combinado que os estudantes se organizassem em duplas e entreguei meia folha de cartolina para cada dupla. Num primeiro momento, pedi que desenhassem um retângulo de base e altura medindo, respectivamente, 15 cm e 20 cm e, logo em seguida traçar duas linhas, uma vertical dividindo o retângulo ao meio e outra horizontal cinco centímetros abaixo do centro, de modo que estas linhas fossem prolongadas por toda a cartolina, conforme figura 39.

Figura 39. Retângulo inicial do Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

Quando os alunos terminaram, chamei a atenção de todos para que eu pudesse trabalhar latitude e longitude, necessário para a construção de nosso relógio de sol. Comecei explicando que a nossa posição na Terra é referenciada em relação a linha do equador e ao meridiano de Greenwich, sendo expressa em dois valores: a latitude e a longitude. Assim, para saber nossa posição sobre a Terra basta sabê-los. Em seguida, detalhei separadamente o que é latitude e longitude.

Latitude é a distância ao Equador medida ao longo do meridiano de Greenwich. Esta distância mede-se em graus podendo variar entre 0° e 90° para Norte (N) ou entre 0° e 90° para Sul (S). Já a longitude é a distância ao meridiano de Greenwich medida ao longo do Equador, medindo também em graus, podendo variar entre 0° e 180° para Leste (E) ou entre 0° e 180° para Oeste (W).

Após estas definições, perguntei se eles sabiam a latitude e a longitude de Porto Alegre? Para minha surpresa ninguém soube responder. Então, com o auxílio do mapa, expliquei que a latitude de Porto Alegre é 30° SUL (pois está abaixo da

linha do Equador) e a longitude é 51° OESTE (pelo fato de estar a esquerda do meridiano de Greenwich). A figura 40 ilustra o mapa que foi utilizado nas explicações.

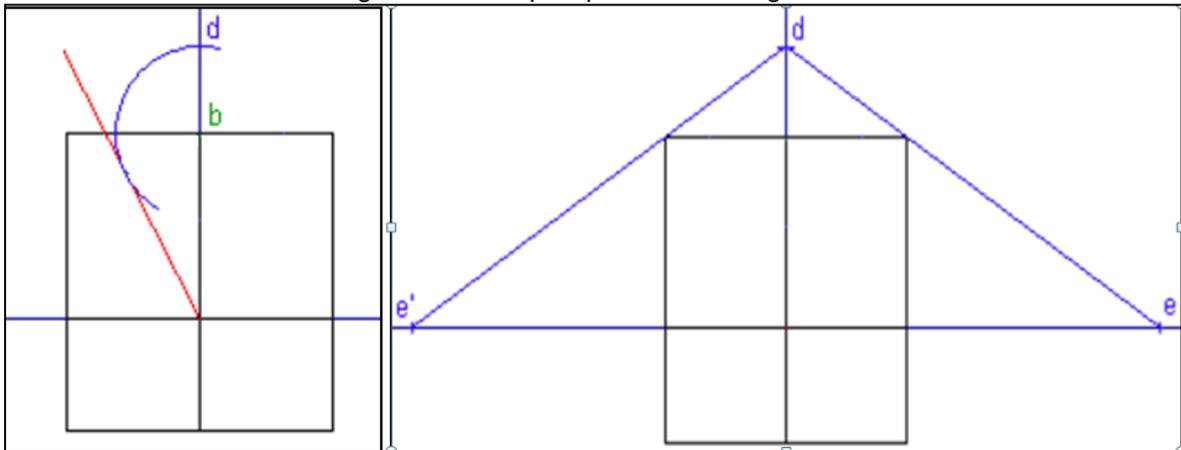
Figura 40. Mapa com as localizações de Porto Alegre e Brasília



Fonte: Acervo do autor

Em seguida, com o uso do transferidor, pedi que abrissem um ângulo de 30° (latitude de Porto Alegre) com origem na reta vertical e centrado no ponto de intersecção das retas, traçando uma reta passando pela origem e o ponto marcado, ou seja, 30° . Próximo passo foi construir, com o compasso, um arco de circunferência centrado no ponto "b" de modo que interseccionasse a reta vertical, gerando um ponto "d". Partindo do ponto "d", pedi que traçassem duas linhas passando pelos vértices superiores do retângulo até encontrar as linhas horizontais, gerando os pontos "e" e "e'", como ilustra a figura 41.

Figura 41. Principais pontos do Relógio de Sol



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/relogio>

Com isso, a aula chegou ao fim e pedi que para nosso próximo encontro eles trouxessem caixas de papelão. O encontro foi bem produtivo, pois apesar dos estudantes estarem cursando o segundo ano do ensino médio, não dominavam o uso do transferidor nem do compasso. Outro ponto produtivo da aula, foi que, no momento da explicação de latitude e longitude, utilizei um globo terrestre, o que facilitou o entendimento sobre o assunto.

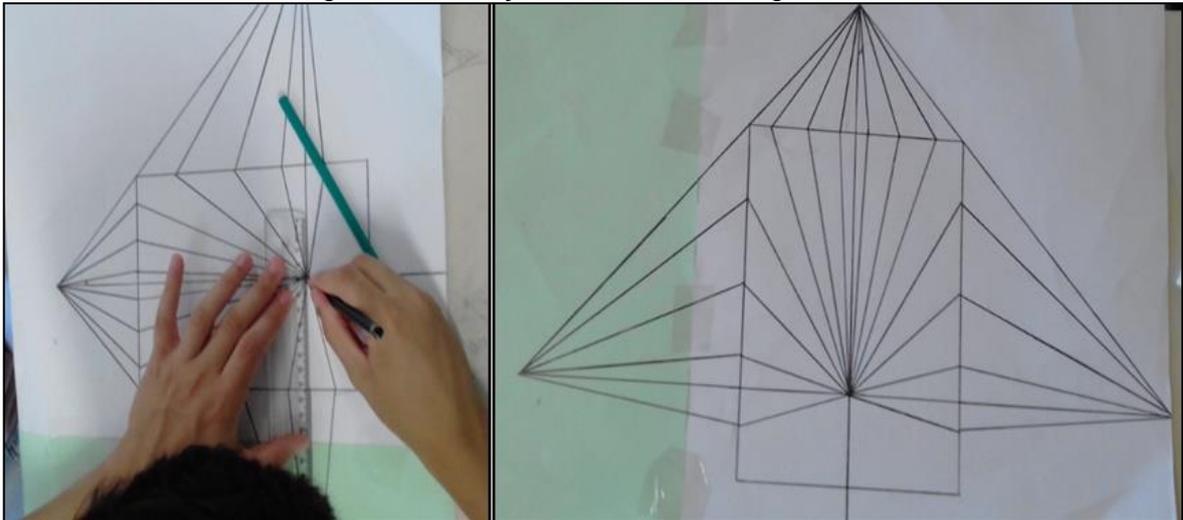
Um dos estudantes me questionou com a seguinte pergunta: - *Era assim que os antigos Egípcios verificavam o tempo?* Respondi que era basicamente assim, porém utilizavam somente uma vareta formando 90° com o solo, se baseando na sombra que a vareta fazia com o solo. Era uma maneira simples, mas que ajudava a saber duração dos dias.

6.11 Encontro 11:

Iniciei a aula, perguntando aos estudantes qual o horário oficial do Brasil? Responderam de imediato: - *É o horário de Brasília né sor!* Expliquei que, em Brasília, a longitude é 45° , mas se olharmos a longitude de Porto Alegre, encontramos 51° . Chamei a atenção, com o auxílio do globo terrestre, do movimento de rotação da terra, onde em 24 horas ela completa uma volta em seu próprio eixo, ou seja, 360° . Então perguntei: - *Se uma volta completa demora 24 horas, quanto a terra gira em uma hora?* Fizeram uma regra de três simples e chegaram a conclusão que a cada hora a terra gira 15° .

A partir destes esclarecimentos, pedi que os estudantes abrissem ângulos de 6° (diferença entre as longitudes de Brasília e Porto Alegre) centrados nos pontos " e " " e' " e " d " no sentido anti-horário e com base nestas retas, formar ângulos de 15° (uma hora) levando as linhas até o retângulo e deste até a origem das retas no interior do retângulo, onde será o marcador das horas do relógio de sol. Este processo está exemplificado na figura 42.

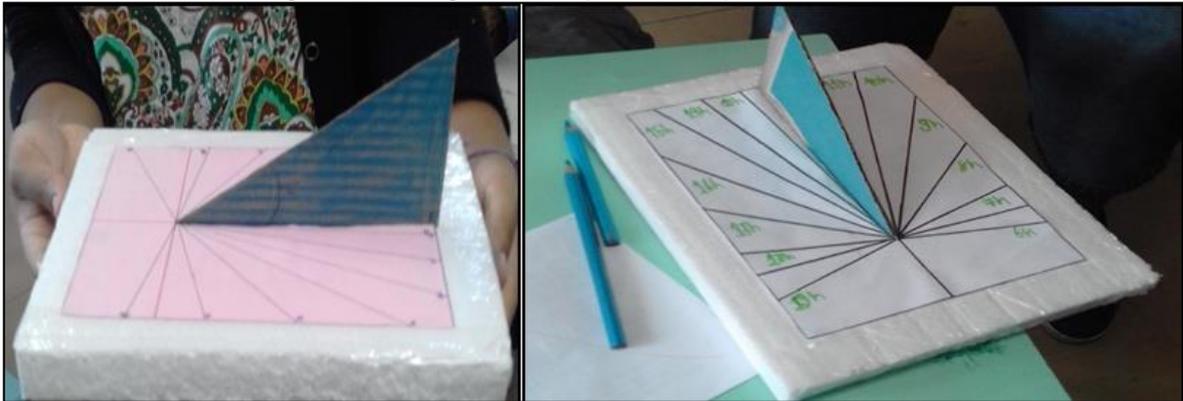
Figura 42. Marcação das horas no Relógio de Sol



Fonte: Acervo do autor

Feito isto, nos atemos à construção do Gnomon, chapa em forma de triângulo que fará a sombra no relógio com um ângulo horizontal igual a 30° (Latitude de Porto Alegre). Aqui, esclareci para os alunos que se estivéssemos construindo nosso relógio em outro lugar, teríamos que considerar a latitude deste novo local. Este triângulo foi fixado com o vértice exatamente no centro do relógio (exatamente onde as linhas se cruzam) e sua base bem na linha vertical. Com isto, estava pronto nosso relógio de sol. As produções ficaram bem interessantes, pois cada dupla de estudantes pintou à sua maneira, produzindo relógios muito bonitos, conforme figuras 43 e 44.

Figura 43. Relógios de Sol produzidos pelos estudantes



Fonte: Acervo do autor

Figura 44. Relógios de Sol produzidos



Fonte: Acervo do autor

Com o término da construção, fomos ao pátio da escola para colocarmos em prática e verificar se funcionava nosso relógio de sol. Posicionaram, com o auxílio de uma bússola, apontando a borda inclinada do gnomon para o pólo sul celeste, corrigindo a declinação magnética (17° em Porto Alegre como já mencionado anteriormente). Ao posicionarmos o relógio, os estudantes verificaram que a hora marcada no relógio construído não era a mesma que estava marcando em seus aparelhos celulares, então expliquei que tínhamos que desconsiderar a hora extra do horário de verão. Ficaram felizes e satisfeitos, pois foi algo que eles mesmos construíram.

Utilizei o tempo restante da aula para contar um pouco da história dos relógios de sol, como era feita a leitura da duração dos dias através da sombra projetada pelo gnomon. A direção da Escola também se impressionou com as construções dos alunos e pediu para que eu as colocasse para exposição na

entrada da Escola, para que os professores, pais e demais estudantes pudessem visualizá-las.

Vale ressaltar que a História da Matemática esteve presente em diversas oportunidades no decorrer das atividades, seja na experiência da construção dos instrumentos históricos com os estudantes, seja nas intervenções que fazia no decorrer dos encontros.

Outro aspecto importante de salientar foi o conhecimento que adquiri antes, durante e após os encontros. Antes, no sentido de ter que estudar sobre assuntos que não dominava, como por exemplo Geografia (buscando definições de latitude, longitude e o próprio uso do globo terrestre), a própria História (no sentido de buscar contribuições de Matemáticos, como eram utilizados antigamente os instrumentos produzidos pelos estudantes), dentre outros aprendizados. Durante, no sentido de estar sempre aprendendo junto com os alunos, por ser a primeira vez em que trabalhei desta maneira mais prática. Após, pois sempre é possível repensar em como as atividades se desenvolveram pensando em melhorias para as próximas.

Com este trabalho percebi que, ao trazer a história da matemática como uma experiência prática de construção de instrumentos, as aulas se tornam mais dinâmicas, interessantes e os estudantes participaram mais ativamente, interagindo, buscando soluções para os desafios apresentados. Ao final das atividades, através de uma roda de conversas, perguntei suas opiniões sobre as atividades vivenciadas durante nossos encontros.

Alguns estudantes mostraram-se satisfeitos com as atividades, refletindo sobre como antigamente se "media" o tempo, ou ainda, saber a localização da costa estando em alto-mar. Outro aspecto que vale ressaltar, é o comentário de um estudante transferido de outra escola pouco antes do início das atividades: *-Sor, vi trigonometria na circunferência na outra escola e confesso que trabalhando dessa maneira consegui entender seno, cosseno e tangente dos ângulos. Na outra escola a professora deu uma tabela com esses valores e era só procurar, achar o valor e colocar no exercício, construindo e sabendo o porquê dos valores consegui entender melhor.*

Confesso que fiquei feliz com o comentário deste aluno, pois o objetivo de se trabalhar a trigonometria de uma maneira prática é fazer com que os estudantes não se atentem somente a fórmulas.

Outro aspecto interessante de salientar foi o descaso e não comprometimento de alguns estudantes durante as atividades, pois ao iniciá-las conversei com a turma e esclareci que durante as construções não seria atribuído notas ou conceitos pela não participação nas atividades propostas. Infelizmente, alguns alunos aproveitaram a situação de não estarem sendo avaliados em termos de notas e faltaram a muitos de nossos encontros, ou ainda, quando estavam presentes não se dedicavam, mas felizmente foram somente três alunos que tiveram esse comportamento.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

A preocupação inicial deste trabalho foi a discussão sobre a presença da História da Matemática em sala de aula, tendo como problemática a questão: "*A construção de instrumentos que foram utilizados no passado pode contribuir para o aprendizado da trigonometria no ensino médio?*"

A partir de estudos referentes à utilização da História da Matemática em sala de aula, verifiquei a importância de se trabalhar a trigonometria através de elementos da História da Matemática. Dessa forma, propus uma sequência com três atividades, com a intenção de trabalhar um pouco da história da trigonometria para dentro da sala de aula, pois segundo Mendes (2009, p.110) "O professor deve propor situações que conduzam os alunos a (re)descoberta do conhecimento através do levantamento e testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas investigados".

A realização das atividades propostas foi feita com uma turma do 2º ano do Ensino Médio da Escola Baltazar de Oliveira Garcia situada em Porto Alegre, onde pude observar, acompanhar e auxiliar na construção do quadrante, relógio de sol e ciclo trigonométrico, instrumentos importantíssimos para o desenvolvimento da humanidade.

Ao longo dos encontros, percebi o comprometimento e empenho da maioria dos estudantes em fazer as atividades, produzindo quadrantes e relógios de sol, bem como um ciclo trigonométrico com rigor e capricho. Também pude presenciar questionamentos ao longo dos encontros, sendo alguns referentes a raciocínios muito pertinentes, por parte de alguns estudantes, envolvendo as relações trigonométricas no ciclo, outros sobre fatos históricos que problematizaram a utilização do quadrante nas navegações e, ainda, como os relógios de sol eram construídos e como eram feitas as leituras do tempo.

Outro ponto interessante de salientar sobre a prática, é que, por não exigir nenhum tipo de ferramenta tecnológica digital, pode ser realizada em qualquer escola, utilizando materiais de baixo custo econômico.

Para mim, como professor, foi uma experiência muito agradável e, ao mesmo tempo, desafiadora, agradável no sentido de que nossos encontros foram muito produtivos, objetivos e repletos de aprendizagens, desafiador, pelo fato de

constantemente em busca informações, conceitos e definições tanto na minha área de atuação (Matemática), quanto em outras áreas como Geografia e História.

Pretendo continuar os estudos nesta linha de pesquisa voltada para a História da Matemática, em especial para a História do Ensino da trigonometria no Brasil ao longo do século XX através da análise de livros didáticos e outros tipos de materiais com o intuito de verificar se houve mudanças significativas em seu ensino no decorrer dos anos.

O trabalho apresentado pode contribuir para pesquisas futuras, pois, como pude concluir ao trazer a História da Matemática à sala de aula, abre-se um leque de ideias, opções e construções que se pode trabalhar com os estudantes. Além do mais, pretendo colocar em meus planos de aula anuais a construção destas atividades tanto para minhas turmas do Ensino Médio quanto do Ensino Fundamental.

7. REFERÊNCIAS

ALVES, A. M. M.; LOPES, L. S. **A história da matemática em sala de aula: propostas de atividades para a educação básica.** In: XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de matemática da Região Sul, 2014, Bagé-RS. Anais do Encontro Regional de Estudantes de matemática da Região Sul. Pelotas RS: Universidade Federal de Pelotas, 2014.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais. ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

BOYER, Carl B. **História da Matemática** / Carl B. Boyer; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard BlucherLtda, 1974.

COSTA, Nielce M. Lobo. **A história da trigonometria.** Artigo–Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Disponível em <<http://www.paulofreire.org/Biblioteca/histtrigon.pdf>>. Acesso em: 30 jun. 2017, v. 25, 2003.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil.** Petrópolis: Vozes, 2008.

COSTA, Daniel dos Santos. **Astronomia e Trigonometria: As cordas de Ptolomeu,** 2008. Disponível em: <<https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/DanieldosSantosCosta.pdf>>. Acesso em 12 ago. 2017.

ELLIOTT, john. **La investigación-acción en educación.** Madri. Ediciones Morata S.A. 1990.

FERNANDES, Telma Cristina Dias; LONGHINI, Marcos Daniel; MARQUES, Deividi Márcio. **A construção de um antigo instrumento para navegação marítima e seu emprego em aulas de Astronomia e Matemática.** História da Ciência e Ensino: construindo interfaces. ISSN 2178-2911, v. 4, p. 62-79, 2011.

GOMES, Severino Carlos. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino da trigonometria numa abordagem histórica.** 2011. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

JUNIOR, Francisco. BEZERRA, Hanna. **Estudando conceitos matemáticos através da construção e do uso do quadrante e das tábuas da Índia.** Disponível em: <http://www.sbhmat.org/wa_files/P14.pdf>. Acesso em 20 dez. 2017.

LARROSA, Jorge. **Experiência e alteridade em educação. Reflexão e Ação,** v. 19, n. 2, p. 04-27, 2011.

MENDES, Iran Abreu. (2009). Atividades históricas para o ensino da Trigonometria. In: MIGUEL, et al. **História da Matemática em Atividades Didáticas.** São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 105-178.

MIGUEL, Antonio. **As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores**. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646849>>Zetetiké, Campinas, v. 5, n. 8, p. 90-105, 1997.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Autêntica, 2008.

MOTTA, Cristina Dalva Van Berghem. **História da matemática na educação matemática: espelho ou pintura?**. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Relato_de_Experiencia/Resumos/RE03198655846R.doc>Comunicar, 2006.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Zahar, 2012.

SANTOS, Anderson Oramísio. **História da matemática como metodologia alternativa para o desenvolvimento da prática pedagógica nos primeiros anos do ensino fundamental**. 2013. 170 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013.

TRIPP, David. **Pesquisa-ação: uma introdução metodológica**. Educação e pesquisa, v. 31, n. 3, 2005.

VALENÇA, Cecília Nogueira. **Análise dos marcos teóricos e estruturais do currículo de graduação em enfermagem no Rio Grande do Norte**. Lemes que direcionam a navegação. Curso de Doutorado em Enfermagem, p. 87, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/14760/1/CeciliaNV_TESE.pdf#page=88>. Acesso em 25 dez. 2017.

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO DA ATIVIDADE I.

QUESTIONÁRIO

1) EXPLORANDO O CICLO TRIGONOMÉTRICO DE UMA MANEIRA PRÁTICA.

1- Determinar os valores de seno, cosseno, tangente dos ângulos e anotar em sua tabela, descrita abaixo, bem como preencher a linha dos radianos. Comparando os valores obtidos com a do livro didático;

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Sen																	
Cos																	
Tg																	

2- O que significa o seno de 30°, o cosseno de 45°, a tangente de 45°, etc;

3- Será que você pode determinar o seno de 0° e o Cosseno de 0°? Como explicar o valor encontrado para essas relações?

4- Será que conseguimos apontar alguma relação entre os valores de seno, cosseno e tangente encontrados no 1º quadrante e os demais quadrantes? Quais?

5- Quais os arcos que apresentam os mesmos valores para seno, cosseno e tangente? Como explica o fato?

6- O que ocorre com os valores encontrados para seno, cosseno e tangente no 1º quadrante, quando comparamos aos arcos correspondentes nos outros quadrantes? Explique.

ANEXO 1 - TERMO DE CONCENTIMENTO INFORMADO (MENORES)

Eu, _____, R.G. _____, responsável pelo(a) aluno(a) _____, da turma _____, da Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **A TRIGONOMETRIA DAS GRANDES NAVEGAÇÕES NA SALA DE AULA**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Rafael Marques Gonçalves no atual semestre, 2017/2. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Professora Dra. Andréia Dalcin, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail andreia.dalcin@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e vídeos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação do(a) aluno(a).

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável através do e-mail rafael.marques.mar@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

ANEXO 2 - TERMO DE CONCENTIMENTO INFORMADO (MAIORES)

Eu, _____, R.G. _____, aluno(a) da turma _____, da Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada **A TRIGONOMETRIA DAS GRANDES NAVEGAÇÕES NA SALA DE AULA**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Rafael Marques Gonçalves no atual semestre, 2017/2. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Professora Dra. Andréia Dalcin, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail andreia.dalcin@ufrgs.br.

Tenho ciência de que minha participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial do meu nome e pela idade.

A colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e vídeos, obtidas durante a participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação do(a) aluno(a).

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável através do e-mail rafael.marques.mar@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que poderei me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Assinatura do Aluno(a):

Assinatura do(a) pesquisador(a):

ANEXO 3 - TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO (ESCOLA)**TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO**

A Escola Estadual de Ensino Médio Baltazar de Oliveira Garcia, neste ano, representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Rafael Marques Gonçalves, estudante do curso de Licenciatura em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a aplicar as atividades práticas de sua pesquisa no atual semestre , 2017/02, que serão analisadas em seu Trabalho de Conclusão de Curso, que é uma exigência parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O trabalho será orientado pela Professora Dra. Andréia Dalcin, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que poderá ser contatada, se necessário, através do e-mail andrea.dalcin@ufrgs.br.

O autorizado se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participarem das atividades que farão parte desta pesquisa.

Nora Elena Mendes dos Santos
ID_1869665701
Vice Diretora
E.E.E.M. Baltazar de Oliveira Garcia

Escola

Rafael Marques Gonçalves
rafael.marques.mat@gmail.com