



**UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
COLEGIADO DE MATEMÁTICA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

Aplicações do Teodolito Caseiro e Virtual no Ensino da Trigonometria

*Antônio Rodrigues do Nascimento Filho
Roberto Evangelista dos Santos
Terezinha de Jesús E. dos Santos Silva*

**UNIFAP
Vitória do Jari - 2015**

**Antônio Rodrigues do Nascimento Filho
Roberto Evangelista dos Santos
Terezinha de Jesús E. dos Santos Silva**

Aplicações do Teodolito Caseiro e Virtual no Ensino da Trigonometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática de Educação à Distância como requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob a orientação do Professor Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

**UNIFAP
VITÓRIA DO JARI - 2015**

**Antônio Rodrigues do Nascimento Filho
Roberto Evangelista dos Santos
Terezinha de Jesús E. dos Santos Silva**

Aplicações do Teodolito Caseiro e Virtual no Ensino da Trigonometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil (Orientador)
Colegiado de Ciência da Computação, UNIFAP

Prof. Esp. Steve Wanderson Calheiros Araújo
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Msc. Sergio Barbosa de Miranda.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

**UNIFAP
VITÓRIA DO JARI - 2015**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado força, saúde e permitiu que tudo isso acontecesse, não somente nestes anos como universitário, mas em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode ter. Ao corpo docente da Unifap e equipe administrativa, que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior. A minha família, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. Ao nosso orientador Professor Dr. José Walter Cárdenas Sotil. Ao agrimensor senhor Cidenei Vieira Carneiro, pelo imenso apoio para a realização deste trabalho. A todos que direto ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Antônio Rodrigues do Nascimento Filho.

Agradeço primeiramente a Deus, por ter nos proporcionar saúde e sabedoria para vencer as adversidades encontradas no caminho. Ao meu esposo Silvanildo, meus filhos Izabela e Guilherme, meu pai Darci e em especial a minha mãe Leodete (em memória), obrigada pelo carinho, paciência, pelas palavras de incentivo que sempre vieram quando pensei em desistir. Aos professores Reginaldo Júnior, Prof. Esp. Steve Wanderson, ao amigo Sidney, estas pessoas colaboraram imensamente para que pudéssemos chegar até aqui, bem como nosso Orientador Prof. Dr. Walter Cárdenas que acreditou em nossa capacidade e colaborou imensamente para efetiva elaboração deste trabalho.

Terezinha de Jesus Evangelista dos S. Silva

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta Caminhada. Agradeço também a minha esposa, Maria Raimunda Evangelista da Siva, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades, quero agradecer também os meus filhos, João Roberto Pereira dos Santos, Bárbara Roberta da Silva dos Santos e Lucas Roberto da Silva dos Santos que embora não tivessem conhecimento disto, mas iluminaram de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos. E não deixando de agradecer de forma muito especial e grandiosa meus pais, Darcy Nascimento dos Santos e Leodete Evangelista dos Santos In memoriam, a quem eu rogo todas as noites a minha existência, pelo apoio e por tudo que sempre fizeram por mim, pela simplicidade, exemplo, amizade, e carinho, fundamentais na construção do meu caráter. Além da ajuda incansável e incondicional da minha mãe.

Roberto Evangelista.

Lista de Figuras

1.1	Imagem GPS da castanheira à esquerda e a torre de alta tensão à direita	3
1.2	Imagem GPS da castanheira, torre de alta tensão e dois pontos de medida do rio Jari	4
1.3	Imagem GPS da castanheira no ramal Jauary	4
1.4	Imagem GPS da torre de alta tensão	5
1.5	Imagem GPS no porto das catrais no rio Jari	5
1.6	Trabalho de campo	6
2.1	Elementos no triângulo retângulo	7
2.2	Área do triângulo retângulo	10
2.3	Área do triângulo retângulo em função do seno do ângulo	11
2.4	Círculo trigonométrico	12
3.1	Teodolito Mecânico	14
3.2	Gronama	15
3.3	Dioptra	16
3.4	Teodolito com quatro parafusos niveladores	16
3.5	Estação Total	17
3.6	GPS	18
3.7	Teodolito de papel e copo	19
3.8	Teodolito com a regua e raio da antena fixada com solda;	21
3.9	Versão final do Teodolito Caseiro construído pelos autores.	21
4.1	Ângulos horizontal e vertical	23
4.2	Local adequado próximo à castanheira	24
4.3	Castanheira e elementos básicos para a medição com o teodolito	25
4.4	Diagrama com os valores calculados	26

4.5	Equipe em trabalho de campo na medição da altura da castanheira	27
4.6	Equipe em trabalho de campo na medição da altura da castanheira	28
4.7	Diagrama com os valores calculados	29
4.8	Elementos básicos para a medição da largura do rio com o teodolito	30
4.9	Diagrama com os valores calculados	32
4.10	Equipe em trabalho de campo na medição da largura do Rio Jari	33
4.11	Ícone do aplicativo Theodolite Droid	35
4.12	Medição da Torre usando o aplicativo Theodolite Droid	36
4.13	Altura da torre calculada com os teodolitos caseiro e profissional	36

Sumário

Lista de Figuras	v
Sumário	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1.1 Contexto Histórico da Trigonometria	2
1.2 Laranjal do Jarí e seu contexto histórico	2
2 Fundamentos Teóricos	7
2.1 Relações métricas no triângulo retângulo	7
2.2 Funções trigonométricas no triângulo retângulo	9
2.3 Área de um triângulo	10
2.4 Lei dos senos	11
2.5 Funções trigonométricas no círculo unitário	12
3 Teodolito	14
3.1 Descrição	14
3.2 A Evolução do Teodolito	15
3.2.1 Gronama	15
3.2.2 Dioptra	16
3.2.3 Teodolito	16
3.2.4 Teodolito Eletrônico	17
3.2.5 Estação Total	17
3.2.6 GPS - Sistema de Posicionamento Global	17
3.3 Construção do Teodolito Caseiro	18
3.3.1 Primeiro Experimento	18

3.3.2	Segundo Experimento	19
3.3.3	Terceiro Experimento	20
4	Aplicações com o Teodolito	22
4.1	Passos para realizar cálculos com o Teodolito	23
4.2	Cálculo da altura da Castanheira	24
4.3	Cálculo da Torre de Alta Tensão	28
4.4	Cálculo da largura do Rio Jari	30
4.5	Cálculo da Torre da Igreja Santo Antônio do Jari	34
	Considerações Finais	38

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso foram realizadas medições com um teodolito caseiro e um teodolito virtual da altura de uma torre de alta tensão, a altura de uma árvore de castanheira, a largura de um rio e a altura da torre da Igreja de Santo Antônio no Município de Laranjal do Jari. Os erros relativos quando comparados com as medidas de um teodolito profissional foram pequenos. Temos mostrado neste trabalho que o uso de material didático, como o teodolito caseiro e o uso de aplicativos virtuais, permitem aliar a teoria com aplicações práticas, contribuindo assim ao ensino da matemática.

Palavras-chave: Funções trigonométricas; Teodolito; Aplicativos Virtuais; Laranjal do Jari.

Abstract

In this Monograph we measure the height of a high-voltage tower, the height of a chestnut tree, the width of a river and the tower of the Church of St. Anthony with a homemade theodolite and a virtual theodolite. The relative errors compared to the measurements of a professional theodolite were small. Fieldwork was conducted in the city of Laranjal do Jari. We have shown in this paper that the use of courseware, such as homemade theodolite and the use of virtual applications, allow combine theory with practical applications, thus contributing to the teaching of mathematics.

Palavras-chave: Trigonometric Functions; Theodolite; Virtual Applications; Laranjal do Jari.

Introdução

Este trabalho apresenta uma proposta no ensino-aprendizagem de razões trigonométricas no triângulo retângulo, com o auxílio de materiais concretos: o "Teodolito Caseiro" e também o "Theodolite Droid" aplicativo de celular. Com estes materiais usados didaticamente e com conhecimentos básicos de trigonometria é possível calcular distâncias e alturas de objetos.

Esta abordagem busca aproveitar a experiência histórica da geometria nas atividades de topografia e motivar o estudo da trigonometria, através de problemas reais extraídos do cotidiano.

O objetivo é proporcionar um processo de aprendizagem contextualizado, que desperte interesse e promova uma postura ativa do estudante.

Esta atividade foi desenvolvida como trabalho de conclusão do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Aberta do Brasil executado pela Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, e tem o intuito de oferecer ao professor de matemática mais uma possibilidade para despertar a atenção dos estudantes dentro do tema relações trigonométricas, promovendo a estes uma aprendizagem significativa.

O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos (TURRIONI, PEREZ, 2006, p.60).

A utilização do material concreto mencionado, foi utilizado em medições dentro do município de Laranjal do Jari localizado ao sul do Amapá, município rico em diversidades naturais. Nos experimentos foi calculado:

1. a altura de uma castanheira "Bertholletia Excelsa", árvore típica presente na região,
2. a altura de uma torre de alta tensão,
3. largura de um ponto do rio Jari, este divide os estados Amapá e Pará e

- através do celular com o aplicativo Theodolite Droid calculou-se a altura da torre da Igreja Santo Antônio, padroeiro do município.

Com isso buscamos estreitar ao máximo possível o abstrato da matemática e sua aplicação com elementos reais da natureza característica da região do Laranjal do Jari.

1.1 Contexto Histórico da Trigonometria

A trigonometria é um ramo da matemática que estuda a resolução dos triângulos. Para melhor esclarecer, podemos voltar à raiz da palavra trigonometria de origem grego TRI: três, GONO: ângulo e METRIEN: medida, significa desta forma a medida de triângulos.

A trigonometria surgiu por volta do século IV ou V a.C., com os babilônios, egípcios e os gregos. Sua origem é incerta, porém, sabe-se que nasceu para oferecer respostas às questões geradas pela Astronomia, Agrimensura e Navegações.

O objetivo principal da trigonometria é o estudo das relações entre os lados e ângulos de um triângulo e constitui-se um instrumento indispensável às respostas da astronomia, navegação, cartografia, topografia e agrimensura.

É importante ressaltar que a origem da trigonometria esta intimamente ligada à medições de terrenos ou medição de medidas da superfície terrestre. O seu reconhecimento como ciência exata veio a exigir medições e cálculos de grande precisão.

Hiparco de Nicéia ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria", pois na segunda metade do século II a.C., fez um tratado de doze livros que se ocupa da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, uma tábua de cordas, Ptolomeu também construiu uma tabela de cordas que fornece o seno dos ângulos de 0 a 90 com incrementos de 15°. Evidentemente Hiparco fez estes cálculos para usa-los em sua astronomia. Introduziu na Grécia a divisão da circunferência em 360°, estudou também as funções trigonométricas, dividindo o diâmetro em 120 partes determinou por cálculos e não somente por aproximações, o valor das cordas com relação a diversas partes do diâmetro. Utilizou a trigonometria para fazer medições e prever eclipses, além de fazer calendários e na navegação.

1.2 Laranjal do Jari e seu contexto histórico

O Município de Laranjal do Jari foi criado em de 17 de dezembro de 1987. Localiza-se na região sul do estado do Amapá, à margem esquerda do rio Jari, que separa o Estado do Amapá

do Estado do Pará. Distante da capital do Estado, 265 quilômetros, pela BR-156.

Laranjal do Jari faz fronteira com: Mazagão, Pedra Branca do Amapari e Oiapoque; com o estado do Pará e ainda com os países Suriname e Guiana Francesa, desmembrado do município de Mazagão é hoje o maior de todos os municípios do Estado do Amapá em extensão territorial.

Originou-se do "Beiradão", propriamente por causa do Projeto Jari, empreendido pela Companhia Jari Florestal e Agropecuária Ltda, do milionário norte-americano Daniel Ludwig, que sonhou construir um império auto-sustentável na região equatorial com atividades voltadas à exploração de celulose, pecuária e agricultura de arroz de várzea, além do reflorestamento da área.

Apesar dos investimentos o município ainda enfrenta problemas graves pela falta de saneamento básico (doenças); incêndios provocados por instalações elétricas precárias, principalmente devido ao aglomerado de palafitas em uma grande parte de sua zona urbana, além das enchentes, que periodicamente deixam a cidade em situação calamitosa.

Atualmente há uma grande expectativas de avanços, por conta da construção da Hidrelétrica de Santo Antônio e a chegada do Linhão de Tucuruí, ambos proporcionando energia de qualidade na região.

As atividades de campo foram realizadas no município de Laranjal do Jari, com medições de objetos característicos da região.

Na Figura 1.1 observa-se, na cor amarela, as posições da castanheira (à esquerda) e da torre de alta tensão (a direita), situados em extremos opostos da cidade.

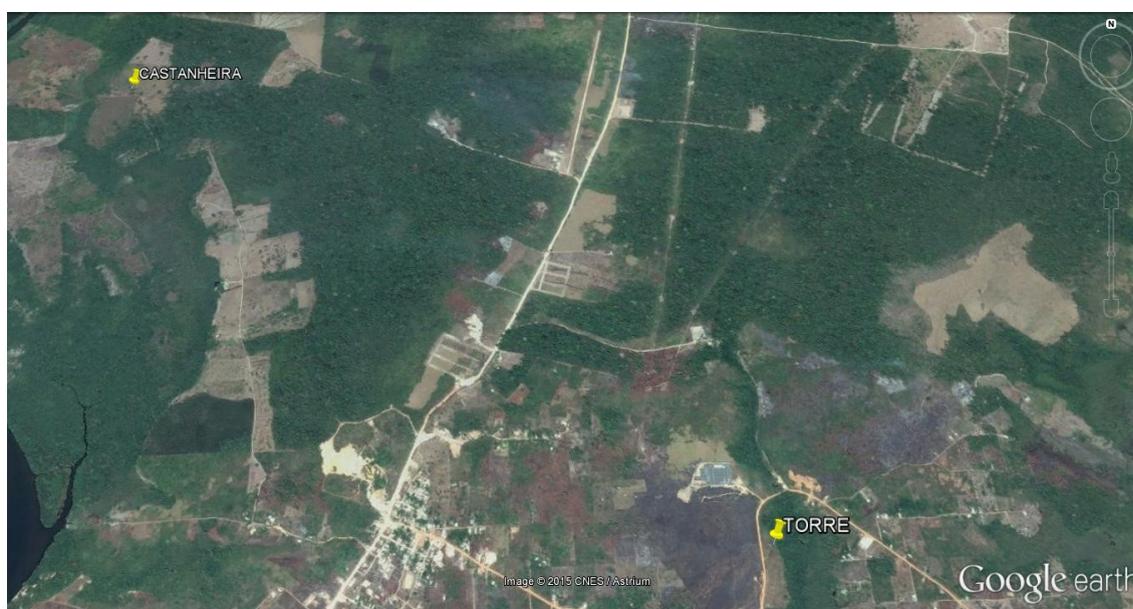


Figura 1.1: Imagem GPS da castanheira à esquerda e a torre de alta tensão à direita

Na Figura 1.2 observa-se, na cor amarela, as posições da castanheira, da torre de alta tensão e dois pontos do rio Jari. A imagem GPS mostra que o trabalho de campo foi realizado sobre uma área muito grande do município de Laranjal do Jari.



Figura 1.2: Imagem GPS da castanheira, torre de alta tensão e dois pontos de medida do rio Jari

Na Figura 1.3 uma imagem detalhada em GPS da posição da castanheira medida em um ramal chamado Jauary em Laranjal do Jari. Observa-se o ramal Jauary dentro da mata fechada que permitiu o deslocamento dos integrantes do grupo ate o local da castanheira.

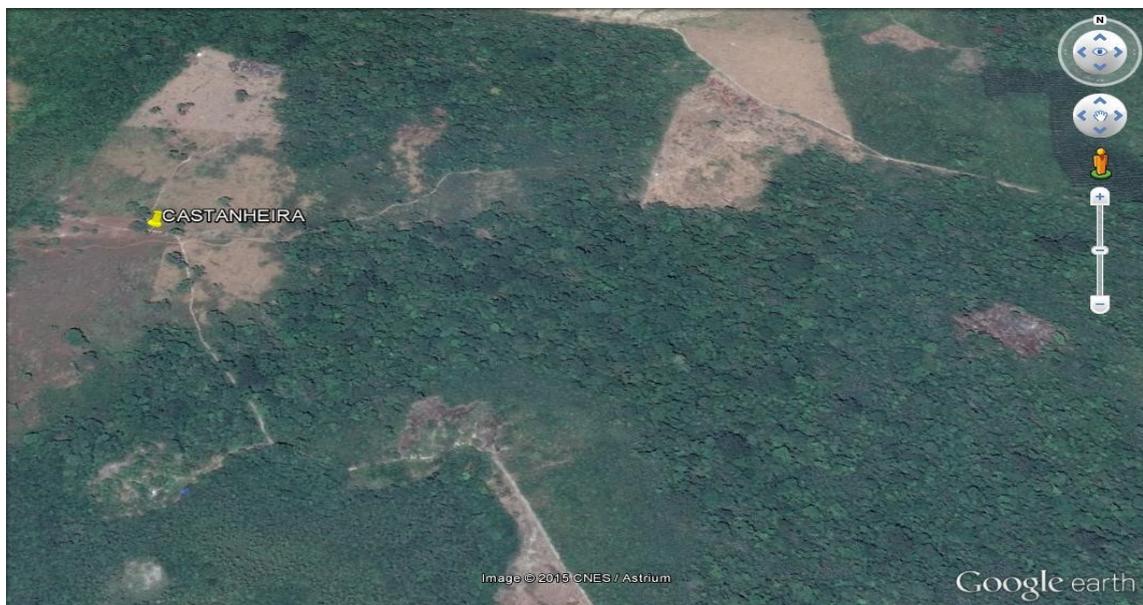


Figura 1.3: Imagem GPS da castanheira no ramal Jauary

Na Figura 1.4 uma imagem detalhada em GPS da posição da torre de alta tensão situado na estrada que liga Laranjal do Jari a Vitória de Jari.



Figura 1.4: Imagem GPS da torre de alta tensão

Na Figura 1.5 uma imagem detalhada em GPS das posições no rio Jari no porto das catraias para deslocamento fluvial entre Laranjal do Jari e Monte Dourado no Pará.



Figura 1.5: Imagem GPS no porto das catraias no rio Jari

Na Figura 1.6 observa-se algumas imagens do trabalho de campo pelos integrantes do TCC. Na figura do canto superior esquerdo a pessoa de chapéu é o Agrimensor Cidenei Vieira Car-



Figura 1.6: Trabalho de campo

neiro quem contribui com sua experiência e com o fornecimento do teodolito profissional. A participação do Sr. Cidenei foi de vital importância para a realização deste TCC, pois a eficiência das medidas puderam ser obtidas com os dados do teodolito profissional. A equipe agradece ao Sr, Cidenei pela contribuição profissional e companherismo nesta jornada.

No capítulo 2 se apresentam os fundamentos teóricos necessários para as atividades práticas deste trabalho. No capítulo 3 se apresenta a definição e história do teodolito. No capítulo 4 se desenvolvem as aplicações com o teodolito caseiro e o teodolito virtual e finalmente apresentamos as Considerações Finais.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Um triângulo retângulo é qualquer triângulo que tem um ângulo de 90° , denominado ângulo reto. No triângulo retângulo ABC reto em A , da Figura 2.1 temos os seguintes elementos:

- a : hipotenusa
- b e c : catetos
- h : altura relativa à hipotenusa
- m e n : projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa

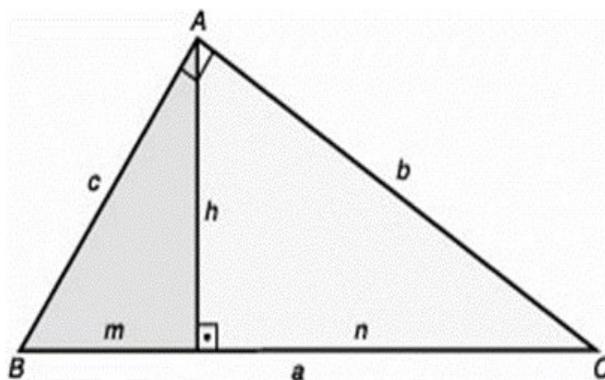


Figura 2.1: Elementos no triângulo retângulo

2.1 Relações métricas no triângulo retângulo

Para um triângulo retângulo ABC (ver Figura 2.1), verificam-se as seguintes relações métricas entre as medidas de seus elementos:

1. O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa:

$$b^2 = a \cdot n, \quad c^2 = a \cdot m.$$

2. O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa á hipotenusa:

$$b \cdot c = a \cdot h.$$

3. O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n$$

4. O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

relação conhecida pelo nome de Teorema de Pitágoras.

Exemplo. No triângulo retângulo ABC da Figura 2.1, se $b = 8$ e $c = 6$ vamos calcular a hipotenusa a , a altura h , e as projeções dos catetos m e n sobre a hipotenusa:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ \Rightarrow a^2 &= 6^2 + 8^2 = 100 \\ \Rightarrow a &= 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a \cdot m \\ \Rightarrow 6^2 &= 10 \cdot m \\ \Rightarrow m &= \frac{36}{10} = 3,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot n \\ \Rightarrow 8^2 &= 10 \cdot n \\ \Rightarrow n &= \frac{64}{10} = 6,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \cdot c &= a \cdot h \\ \Rightarrow 8 \cdot 6 &= 10 \cdot h \\ \Rightarrow h &= \frac{48}{10} = 4,8. \end{aligned}$$

2.2 Funções trigonométricas no triângulo retângulo

As funções trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo são razões entre o comprimento de dois lados quaisquer do triângulo. Como temos três lados em um triângulo, então temos $3 \times 2 = 6$ funções trigonométricas.

Denotamos como o lado adjacente do ângulo agudo, ao cateto que forma este ângulo e denotamos de lado oposto ao ângulo agudo ao cateto que não forma este ângulo. Com esta notação, as funções trigonométricas do ângulo agudo α de um triângulo retângulo são definidas como:

a) O seno do ângulo α é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

b) O cosseno do ângulo α é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa:

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

c) A tangente α é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente:

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

d) A cossecante do ângulo α é a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto:

$$\text{cossec}(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$$

e) secante do ângulo α é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente:

$$\text{sec}(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

f) A cotangente α é a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto:

$$\text{cotan}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

As funções trigonométricas de um triângulo retângulo dependem somente da medida do ângulo, pois dois triângulos retângulos com os mesmos ângulos agudos são semelhantes e portanto a razão entre dois lados é constante.

2.3 Área de um triângulo

Sejam

- ABC um triângulo qualquer.
- L_1 reta paralela ao lado AB no vértice C .
- L_2 reta paralela ao lado AC no vértice B .
- D o ponto de interseção das retas L_1 e L_2 .
- $ABCD$ o paralelogramo formado por dois triângulos congruentes ABC e BCD .

Como o paralelogramo $ABCD$ tem área:

$$(ABCD) = \text{base} \times \text{altura}$$

e a área dos triângulos são iguais, temos que cada um deles tem área igual a metade do paralelogramo. Assim a área de um triângulo é a metade do produto de sua base pela altura:

$$(ABC) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}.$$

Em particular, a área de um triângulo retângulo ABC reto em A é a metade do produto dos catetos b e c :

$$(ABC) = \frac{b \times c}{2}.$$

Por exemplo, na triângulo retângulo da Figura 2.2 a base tem comprimento 5 cm e altura 2 cm, logo a área do triângulo é:

$$\text{área} = \frac{5 \times 2}{2} = 5\text{cm}^2.$$

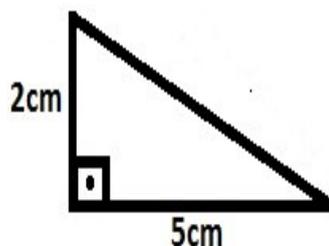


Figura 2.2: Área do triângulo retângulo

No triângulo ABC da Figura 2.3 temos:

$$\text{sen}(A) = \frac{h}{c},$$

onde h é a altura do triângulo, logo

$$h = c \cdot \text{sen}(A).$$

Portanto, a área do triângulo ABC é:

$$(ABC) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}(A)}{2}.$$

Isto é, a área de um triângulo é a metade do produto de dois lados pelo seno do ângulo entre estes lados.

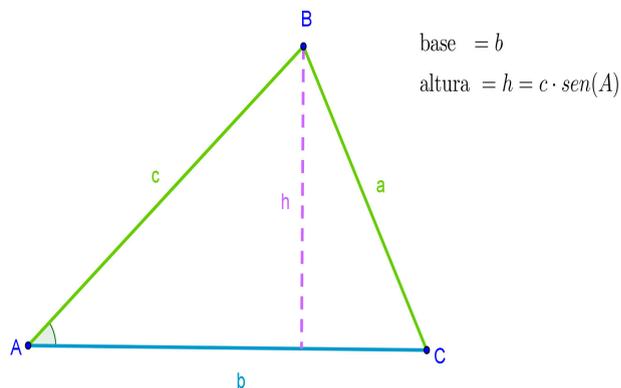


Figura 2.3: Área do triângulo retângulo em função do seno do ângulo

2.4 Lei dos senos

No triângulo ABC da Figura 2.3 podemos calcular a área mudando o ângulo:

$$(ABC) = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}(A)}{2}$$

$$(ABC) = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}(B)}{2}$$

$$(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(C)}{2}.$$

Igualando estas quantidades, resulta

$$\frac{b \cdot c \cdot \text{sen}(A)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}(B)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(C)}{2},$$

multiplicando por 2 e dividindo por abc resulta:

$$\frac{\text{sen}(A)}{a} = \frac{\text{sen}(B)}{b} = \frac{\text{sen}(C)}{c}$$

conhecida como a Lei dos Senos: "num triângulo retângulo a razão entre o seno de um ângulo e seu lado oposto é constante".

O comprimento de um rio a ser calculado no Capítulo 3 é determinado usando a lei dos senos por triangulação.

2.5 Funções trigonométricas no círculo unitário

Consideremos o círculo unitário (círculo de raio 1) com centro na origem sobre um plano cartesiano como na Figur 2.4.

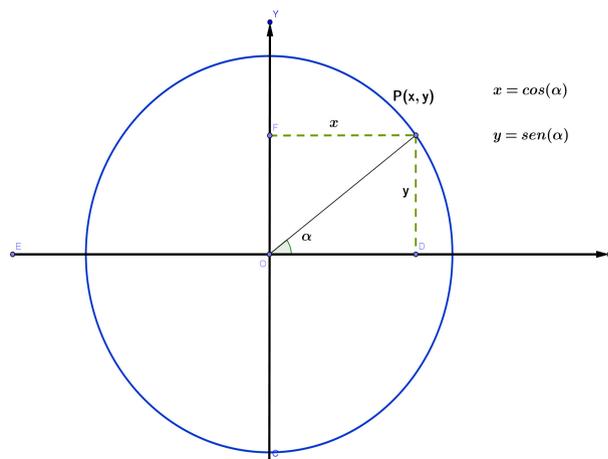


Figura 2.4: Círculo trigonométrico

Na Figura 2.4 temos

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y, \\ \text{cateto}(\alpha) &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x. \end{aligned}$$

Logo, o ponto $P(x, y)$ sobre o círculo unitário tem abscissa $x = \text{sen}(\alpha)$ e ordenada $y = \text{sen}(\alpha)$. Isto nos permite estender as funções trigonométricas para qualquer ângulo e não somente para ângulos agudos como na seção 2.2.

Os ângulos no círculo unitario são medidos a partir do eixo positivo das abscissas (raio inicial), sendo positivos no sentido anti-horário e negativos no sentido horário. A interseção do

raio final do ângulo com o círculo unitário determina um ponto cuja abscissa é o cosseno do ângulo e cuja ordenada é o seno do ângulo.

Assim, se:

- $\alpha = 0^\circ$, temos $P = (1, 0)$ e portanto:

$$\text{sen}(0^\circ) = 0$$

$$\text{cos}(0^\circ) = 1$$

- $\alpha = 90^\circ$, temos $P = (0, 1)$ e portanto:

$$\text{sen}(90^\circ) = 1$$

$$\text{cos}(90^\circ) = 0$$

- $\alpha = 180^\circ$, temos $P = (-1, 0)$ e portanto:

$$\text{sen}(180^\circ) = 0$$

$$\text{cos}(180^\circ) = -1$$

- $\alpha = 270^\circ$, temos $P = (0, -1)$ e portanto:

$$\text{sen}(270^\circ) = -1$$

$$\text{cos}(270^\circ) = 0$$

- $\alpha = 360^\circ$, temos $P = (1, 0)$ e portanto:

$$\text{sen}(360^\circ) = 0$$

$$\text{cos}(360^\circ) = 1$$

Em particular se o ângulo α tem coordenadas $P(x, y)$, o ângulo $-\alpha$ terá coordenadas $Q(x, -y)$, e portanto:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$$

$$\text{cos}(-\alpha) = \text{cos}(\alpha).$$

Capítulo 3

Teodolito

3.1 Descrição

O Teodolito é um instrumento óptico de medição de posições relativas. É utilizado em topografia, navegação, meteorologia e na agrimensura para medir ângulos horizontais e verticais; em medições de grandes obras como, barragens, hidrelétricas, pontes, medição industrial, exploração de minérios, além de ser aplicado em levantamentos topográficos e geodésicos.

Um teodolito mede distâncias manualmente através de correntes de comprimentos padronizados ou fitas métricas de metal ao longo do comprimento do ângulo desejado. Funciona como uma óptica (por vezes duas), montada num tripé, com indicadores de nível, permitindo uma total liberdade de rotação horizontal ou vertical; mede distâncias relativas entre pontos determinados, em escala métrica decimal (múltiplos e submúltiplos).

Apesar de existirem teodolitos eletrônicos satisfatórios, um bom teodolito ótico-mecânico, como o mostrado na Figura 3.1, é suficiente em aplicações onde não sejam necessárias medições com alta precisão.



Figura 3.1: Teodolito Mecânico

3.2 A Evolução do Teodolito

A agrimensura também conhecida como ciência ou técnica matemática, surgiu no antigo Egito, onde as famosas enchentes do Rio Nilo, que fertilizavam as margens, também desmarcavam as linhas divisórias das propriedades, havendo, pois, a necessidade de nova demarcação quando as águas voltavam ao seu nível normal. Não é difícil imaginar que naquela época o instrumento utilizado era bem rudimentar, tendo os aparelhos apenas movimentos mecânicos, com quase nenhuma composição óptica.

O tempo nos reverte ao período onde os Ângulos eram medidos usando métodos primitivos, porém à medida que foi requerido uma maior precisão foram desenvolvidos novos conhecimentos e tecnologias que levaram a instrumentos com uma medição mais apurada. Mencionamos a seguir em ordem cronológica alguns desses instrumentos.

3.2.1 Gronama

O primeiro instrumento conhecido para medir ângulos foi possivelmente o Gronama instrumento egípcio utilizado na construção de pirâmides. O gronama, ver Figura 3.2 consistiu de quatro pedras que penduradas através de uma corda fixa em uma vara com ângulos retos; as medidas eram tomadas pelo alinhamento visual de duas cordas suspensas e o ponto visual externo a ser medido. Bastante limitado devido ao fato que pôde só ser usado em terreno bastante plano e sua precisão é limitada pela distância.

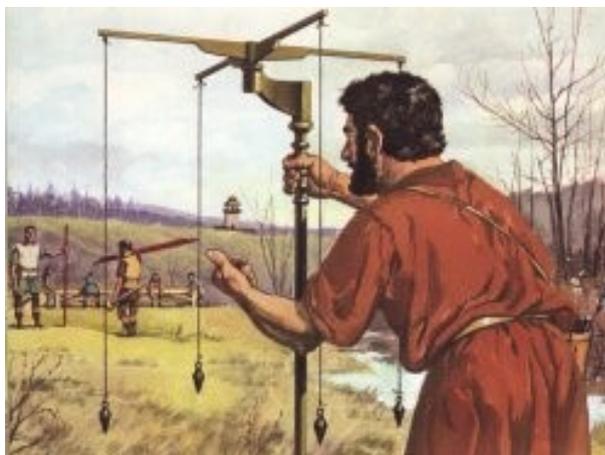


Figura 3.2: Gronama

3.2.2 Dioptra

O precursor do teodolito era o modelo que os gregos chamavam de Dioptra. Era um instrumento que consiste de um prato de metal circular que pode ser girado horizontalmente por 360 graus através de uma engrenagem dentada de outro prato que poderia ser inclinado no plano vertical, ver Figura 3.3. Estes pratos poderiam ser presos a um dispositivo que consiste de dois tubos interconectados que contém água, a linha na parte superior dos tubos é a linha de nivelamento.

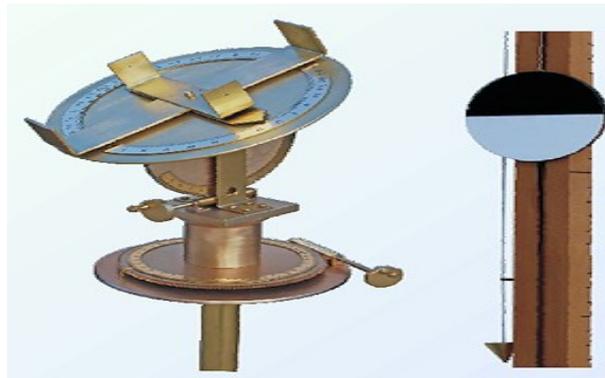


Figura 3.3: Dioptra

3.2.3 Teodolito

Em 1720, Jonatha Sisson construiu o primeiro teodolito contendo quatro parafusos niveladores, ver Figura 3.4. Ignácio Porro, inventor de instrumentos óticos, contribuiu acoplado o telescópio, aprimorando assim o teodolito, que ao longo dos anos foi sendo aperfeiçoando agregando sistemas de mecanismos que o tornaram mais preciso em suas medições.



Figura 3.4: Teodolito com quatro parafusos niveladores

3.2.4 Teodolito Eletrônico

Na década de 70 surgiram os teodolitos eletrônicos. A diferença básica, em relação aos teodolitos clássicos óticos-mecânicos, consistiu na substituição do leitor ótico de um círculo graduado por um sistema de captadores eletrônicos.

O teodolito eletrônico é mais leve e fácil para transportar do que os teodolitos antigos, além de ser capaz de realizar medições com maior precisão e possuir um dispositivo com ótica de alto rendimento e facilidade de utilização.

Da captação eletrônica de ângulos, tanto em sua versão incremental como absoluta, passou-se, quase imperceptivelmente para a concepção da atual das Estações Totais Eletrônicas, que vieram para revolucionar a Topografia e simplificar os trabalhos de campo e escritório.

3.2.5 Estação Total

Uma Estação Total combina todas as vantagens de um teodolito eletrônico e de um medidor eletrônico de distância (MED), anteriormente apenas acoplados, com a vantagem atual da facilidade de um controle central único, ver Figura 3.5.

Em decorrência do acentuado avanço tecnológico do instrumental, as equipes de campo sofreram redução no número de auxiliares, tornando os trabalhos topográficos menos onerosos, rápidos, mais confiáveis e precisos.



Figura 3.5: Estação Total

3.2.6 GPS - Sistema de Posicionamento Global

O GPS foi criado pelos EUA para fins militares. Desde 1960, a Força Aérea e a Marinha americana têm trabalhado no desenvolvimento de um sofisticado sistema de navegação por satélite, ver Figura 3.6.

A triangulação usada no teodolito inspirou o GPS, que a aplica através de diferentes princípios. O teodolito utiliza a geometria e a trigonometria plana, e o GPS a física, pelo processo da emissão de ondas eletromagnéticas.



Figura 3.6: GPS

3.3 Construção do Teodolito Caseiro

Na construção do nosso teodolito caseiro realizamos várias pesquisas em torno de como iríamos construí-lo para o trabalho de campo.

3.3.1 Primeiro Experimento

Em nossa primeira experiência construímos um teodolito de papel seguindo os seguintes procedimentos:

1. pegamos um círculo trigonométrico da internet e imprimimos em uma folha A4,
2. depois colamos em um pedaço de papelão mais duro,
3. em seguida pegamos um copo de requeijão e em sua tampa fizemos dois furos na mesma direção, ultrapassamos sobre estes furos um arame bem fininho e colamos a tampa ao centro do círculo trigonométrico,
4. no fundo do copo pregamos com fita um canudo de calibre um pouco mais grosso que o arame, de forma que desce para olhar por dentro do orifício do canudo o que queríamos medir e quando girássemos o copo na direção do que queremos medir conseguíssemos deixar na mesma posição o arame e o canudo, desta forma teriam um pouco mais de

precisão na hora de mensurar os graus para fazer as primeiras medidas. Na Figura 3.7 pode-se apreciar o teodolito de papel e copo construído pelos autores.



Figura 3.7: Teodolito de papel e copo

Para testar a precisão de nosso teodolito foram seguidos os seguintes procedimentos:

1. escolhemos uma parede cuja altura foi determinada usando uma fita métrica,
2. medimos a distância entre a parede e o teodolito,
3. medimos a altura do teodolito em relação ao chão,
4. com o teodolito medimos o ângulo entre a horizontal e o topo da parede,
5. usando a tangente do ângulo determinamos a altura da parede em relação ao nível horizontal do topo do teodolito.

Os resultados indicaram que não tínhamos muita precisão ao aferir o ângulo, pois a distância do canudo para o círculo trigonométrico era um pouco considerável e o arame que ficou na base não nos ajudou, uma vez que a tampa ficou presa ao centro do círculo e não tinha como ela girar ao mesmo tempo em que o copo. Era necessário aperfeiçoar nosso teodolito.

3.3.2 Segundo Experimento

Nesta segunda experiência seguimos os procedimentos:

1. conseguimos um exemplar de madeira do círculo trigonométrico de 180° ,

2. mandamos confeccionar um pé com uma altura de um metro e cinco centímetros onde pudéssemos encaixar a base do teodolito,
3. usamos agora uma latinha de plástico de 200g, usados em supermercados para venda de manteiga,
4. na borda da lata furamos dois furos na mesma direção de forma que ultrapassássemos um raio de bicicleta bem fino, e a tampa desta vez não ficou presa ao círculo e sim prendemos com uma taxinha deixando-a livre para girar,
5. no fundo da latinha pregamos com uma fita um pedaço de antena de televisão, onde poderíamos olhar dentro do orifício o que queríamos medir.

No teste da parede os resultados foram satisfatórios. Para testar em alturas maiores fizemos desta vez a medida de uma torre de caixa d'água. Os resultados não foram satisfatórios, em algumas medidas o resultado era muito próximo da altura real da torre porém com erro de poucos centímetros, entretanto em outras medidas o erro era muito grande.

Ficamos pensando o que poderia estar dando errado? Onde poderíamos melhorar nosso teodolito para ter maior precisão?

3.3.3 Terceiro Experimento

Concluimos que a latinha era instável pois não podíamos controlar sua movimentação, pelo qual fizemos as seguintes adaptações:

1. resolvemos descartar a latinha de manteiga,
2. fizemos uma adaptação com um parafuso para que pudesse girar normalmente,
3. mandamos soldar o raio ao meio da antena, e ficou como a Figura 3.8,
4. conseguimos olhar por dentro do pedaço de antena o orifício mais grosso e ao mesmo tempo olhar a ponta do raio e ter como mira, o que nos deu uma precisão maior na hora da medida do ângulo, ver Figura 3.9.



Figura 3.8: Teodolito com a regua e raio da antena fixada com solda;



Figura 3.9: Versão final do Teodolito Caseiro construído pelos autores.

Os testes com a parede e a torre da caixa da água foram ambos satisfatórios com erro de poucos centímetros. Finalmente a construção de nosso teodolito caseiro estava finalizada. No próximo capítulo apresentamos medições mais complexas e seus resultados comparados com os de um teodolito profissional.

Capítulo 4

Aplicações com o Teodolito

O desenvolvimento da matemática ganha cada vez mais destaque na literatura educacional, quando independente do ambiente busca-se investigações matemáticas e destes investimos reflexões. Para tanto, torna-se necessário a busca por metodologias diversificadas e dinâmicas como forma de colaboração nesse processo.

Este capítulo relata os experimentos realizados com o teodolito caseiro e profissional. Os cálculos a que se refere o capítulo, foram realizados em diversos pontos do município de Laranjal do Jari. Aplicando conceitos trigonométricos através do Teodolito, obteve-se:

1. altura de uma árvore Castanheira, típica da região, denominada "Bertholletia Excelsa",
2. altura da Torre de Alta tensão e altura da torre da Igreja Santo Antônio do Jari,
3. a medida da largura do Rio Jari em um ponto.

Na definição de Teodolito no Capítulo 3, vimos que ele mede ângulos horizontais e verticais com suas duas escalas circulares graduadas em graus:

1. No caso do ângulo horizontal, trabalhamos sobre um plano horizontal, ver Figura 4.1 a). Se o teodolito T e os objetos 1 e 2 estão em um mesmo plano horizontal, podemos medir o ângulo $\angle 1T2$.
2. No caso do ângulo vertical trabalhamos sobre um plano vertical, ver Figura 4.1 b). Se o teodolito T e os objetos 1 e 2 estão em um mesmo plano horizontal, podemos medir o ângulo $\angle 1T2$.

Com esses dois usos do teodolito, que nos permite calcular ângulos horizontais e verticais, poderemos agora utilizar:

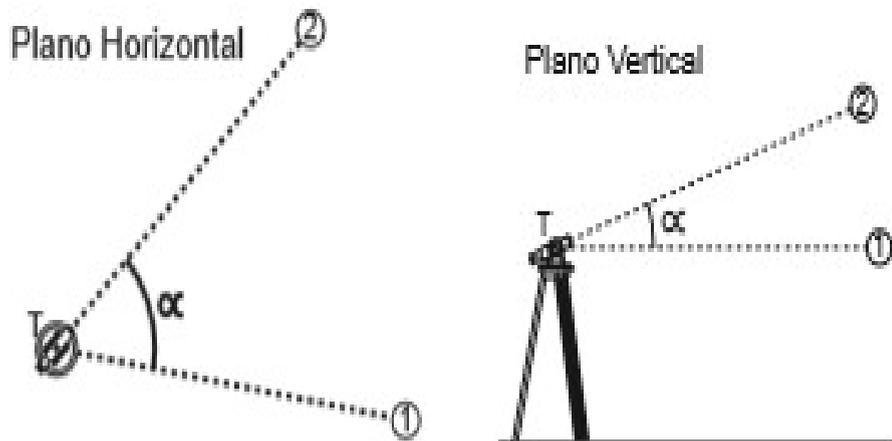


Figura 4.1: Ângulos horizontal e vertical

1. Lei dos senos no triângulo ABC:

$$\frac{\text{sen}(A)}{a} = \frac{\text{sen}(B)}{b} = \frac{\text{sen}(C)}{c}$$

2. Lei dos cossenos no triângulo ABC:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

3. Relações trigonométricas no triângulo retângulo, em particular:

$$\tan(A) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

4. Tabela trigonométrica ou calculadora científica para calcular a função trigonométrica do ângulo medido com o teodolito.

4.1 Passos para realizar cálculos com o Teodolito

Para entender melhor os métodos que utilizaremos nos experimentos, é conveniente que retorne ao Capítulo 2: Fundamentos Teóricos, o qual discorre sobre as relações entre as funções trigonométricas. Segue-se o seguinte procedimento:

1. O primeiro passo consiste em mirar o canudo na posição horizontal correspondente à base do que se deseja medir, uma árvore, um poste, uma casa, etc., a partir da base fixada do teodolito.

2. O segundo passo consiste em deslocar o canudo focando o ponto extremo do que está sendo medido.
3. O terceiro passo consiste em verificar e anotar com atenção o ângulo indicado no transferidor, esse deve ser analisado com cuidado devido à espessura do canudo usado como mira.
4. O quarto passo consiste em medir com uma trena a distância do teodolito ao objeto a ser medido.
5. Quinto passo, conhecendo o valor do ângulo e a distância do ponto de medição até o objeto medido, basta utilizar a relação trigonométrica adequada para determinar a altura. Vale ressaltar que a altura entre o teodolito e o chão deve ser acrescentada ao resultado da medição.

4.2 Cálculo da altura da Castanheira

Para determinar a altura de uma castanheira, árvore típica presente no sul do Amapá, colocou-se o teodolito em um local adequado próximo a árvore, como mostra a Figura 4.2.



Figura 4.2: Local adequado próximo à castanheira

Na Figura 4.3 se observa a imagem de uma castanheira junto com os elementos básicos para os cálculos com o Teodolito.

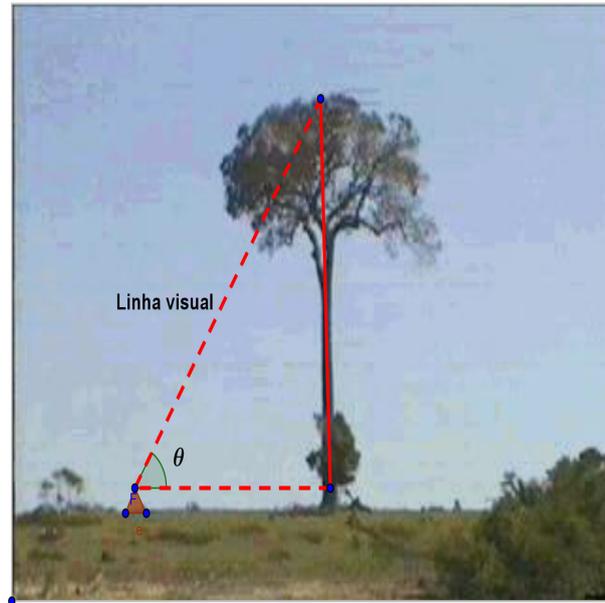


Figura 4.3: Castanheira e elementos básicos para a medição com o teodolito

A seguir descrevemos o procedimento e os resultados no uso do teodolito para medir a altura da castanheira:

1. O teodolito caseiro tem uma altura h_1 :

$$h_1 = 1,05 \text{ m.}$$

2. Com uma trena, mediu-se a distância d do teodolito a árvore. A medida foi:

$$d = 70,8 \text{ m.}$$

3. Mirando o alto da castanheira através do canudo do teodolito, verificou-se, na escala do transferidor, que o ângulo θ formado por essa linha visual com a horizontal foi de:

$$\theta = 34^{\circ}30'.$$

4. Da tabela trigonométrica obtemos que a tangente de $34^{\circ}30'$ é aproximadamente:

$$\tan(34^{\circ}30') \approx 0,6872.$$

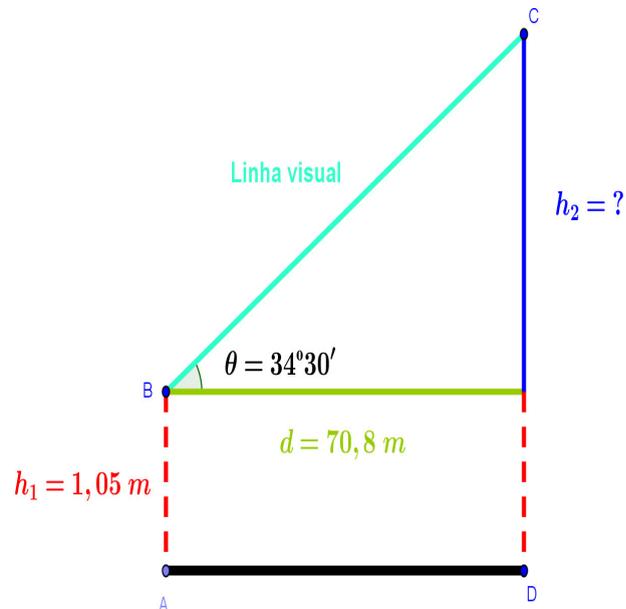


Figura 4.4: Diagrama com os valores calculados

5. Na Figura 4.4 temos um diagrama dos valores calculados nos itens anteriores.

6. Sendo h_2 a altura do topo do teodolito ao topo da castanheira, temos que

$$\tan(\theta) = \frac{h_2}{d}$$

logo,

$$\begin{aligned} h_2 &= \tan(\theta) \cdot d \\ &= 0,6872 \cdot 70,8 \\ &= 48,65. \end{aligned}$$

7. A altura da castanheira H_{tc} medida com o teodolito caseiro é dada pela soma das alturas h_1 e h_2 , assim

$$\begin{aligned} H_{tc} &= h_1 + h_2 \\ &= 1,05 + 48,65 \\ &= 49,7 \text{ m}. \end{aligned}$$

A altura da castanheira H_{tp} foi medida com um teodolito profissional, obtendo-se uma altura de

$$H_{tp} = 47,57 \text{ m}.$$

O erro absoluto E_A da medição da castanheira com o teodolito caseiro em relação ao teodolito profissional é dado por:

$$\begin{aligned} E_A &= |H_{tc} - H_{tp}| \\ &= |49,7 - 47,57| \\ &= 2,13 \text{ m.} \end{aligned}$$

Enquanto, o erro relativo E_R entre estas duas medições é:

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{|H_{tc} - H_{tp}|}{H_{tp}} \\ &= \frac{|49,7 - 47,57|}{47,57} \\ &= \frac{2,13}{47,57} \\ &= 0,0447. \end{aligned}$$

Em termos percentuais temos um erro relativo de 4,47% da medição da altura da castanheira do teodolito caseiro em relação ao teodolito profissional. Um erro percentual pequeno, se consideramos a diferença abismal entre estas duas tecnologias.

Na Figura 4.5 apresenta-se fotos das atividades realizadas na medição da altura da castanheira com os teodolitos caseiro e profissional.

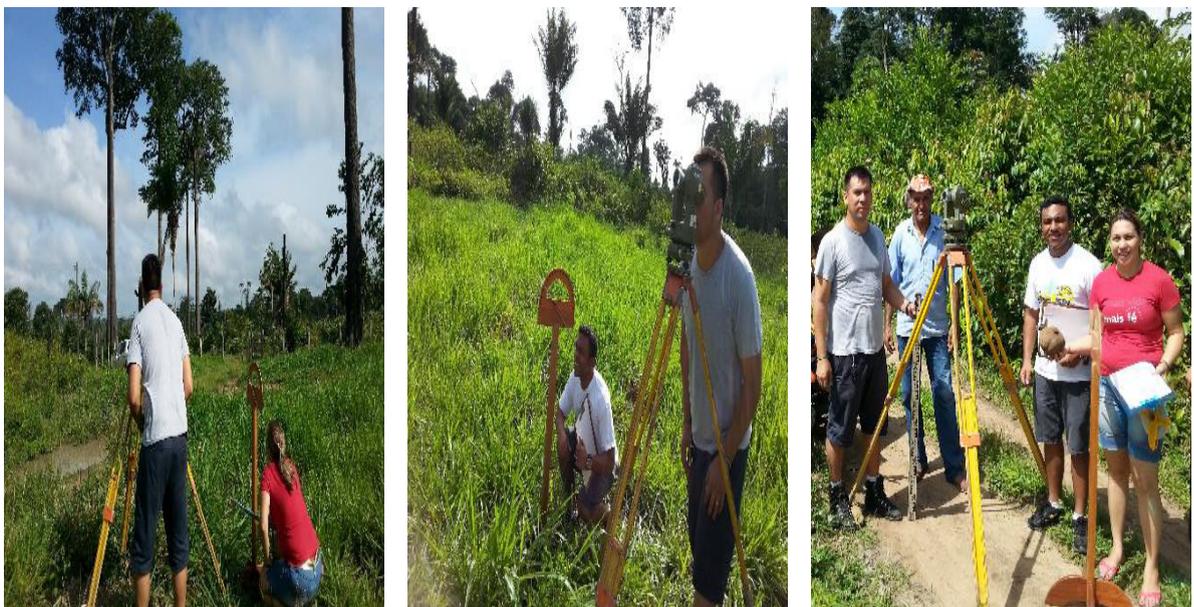


Figura 4.5: Equipe em trabalho de campo na medição da altura da castanheira

4.3 Cálculo da Torre de Alta Tensão

Para determinar a altura de uma torre de alta tensão. Estas torres foram postas no município de Laranjal do Jari por conta da presença do linhaô de Tucuruí. Na Figura 4.6 observa-se uma torre de alta tensão junto com a equipe no trabalho de campo.



Figura 4.6: Equipe em trabalho de campo na medição da altura da castanheira

A seguir descrevemos o procedimento e os resultados no uso do teodolito para medir a altura da torre de alta tensão:

1. O teodolito caseiro tem uma altura h_1 :

$$h_1 = 1,05 \text{ m.}$$

2. Com uma trena, mediu-se a distância d do teodolito a torre de alta tensão. A medida foi:

$$d = 65,5 \text{ m.}$$

3. Mirando o alto da torre de tensão através do canudo do teodolito, verificou-se, na escala do transferidor, que o ângulo θ formado por essa linha visual com a horizontal foi de:

$$\theta = 37^\circ.$$

4. Da tabela trigonométrica obtemos que a tangente de 37° é aproximadamente:

$$\tan(37^\circ) \approx 0,7535.$$

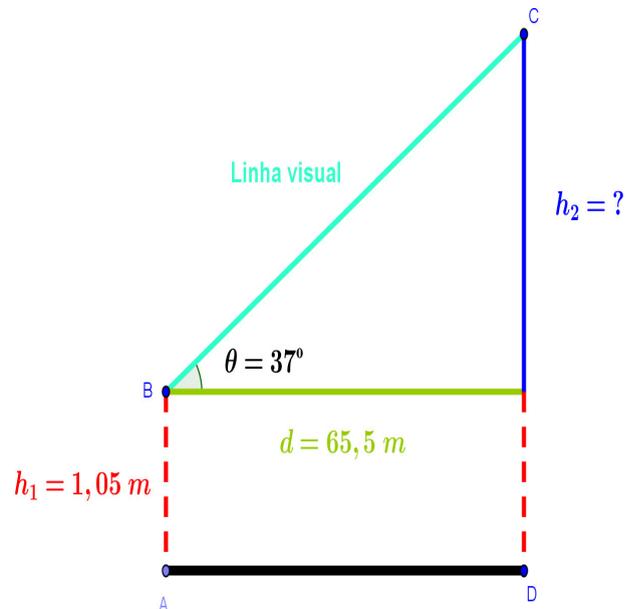


Figura 4.7: Diagrama com os valores calculados

5. Na Figura 4.7 temos um diagrama dos valores calculados nos itens anteriores.
6. Sendo h_2 a altura do topo do teodolito ao topo da torre de alta tensão, temos que

$$\tan(\theta) = \frac{h_2}{d}$$

logo,

$$\begin{aligned} h_2 &= \tan(\theta) \cdot d \\ &= 0,7535 \cdot 65,5 \\ &= 49,35 \text{ m.} \end{aligned}$$

7. A altura da torre de alta tensão H_{tc} medida com o teodolito caseiro é dada pela soma das alturas h_1 e h_2 , assim

$$\begin{aligned} H_{tc} &= h_1 + h_2 \\ &= 1,05 + 49,35 \\ &= 50,4 \text{ m.} \end{aligned}$$

A altura da torre de alta tensão H_{tp} foi medida com um teodolito profissional, obtendo-se uma altura de:

$$H_{tp} = 50,19 \text{ m.}$$

O erro absoluto E_A da medição da torre de alta tensão com o teodolito caseiro em relação ao teodolito profissional é dado por:

$$\begin{aligned} E_A &= |H_{tc} - H_{tp}| \\ &= |50,4 - 50,19| \\ &= 0,81 \text{ m.} \end{aligned}$$

Enquanto, o erro relativo E_R entre estas duas medições é:

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{|H_{tc} - H_{tp}|}{H_{tp}} \\ &= \frac{|50,4 - 50,19|}{50,19} \\ &= \frac{0,81}{50,19} \\ &= 0,0161. \end{aligned}$$

Em termos percentuais temos um erro relativo de 1,61% na medição da altura da torre de alta tensão do teodolito caseiro em relação ao teodolito profissional. Um erro percentual ainda menor que no caso da medição na altura da castanheira.

4.4 Cálculo da largura do Rio Jari

Neste experimento foram realizados cálculos para determinar a distância do Rio Jari, em um ponto específico. O Rio Jari separa o estado do Amapá com o estado do Pará.

Na Figura 4.8 temos os elementos básicos para determinar a largura do rio com o Teodolito.

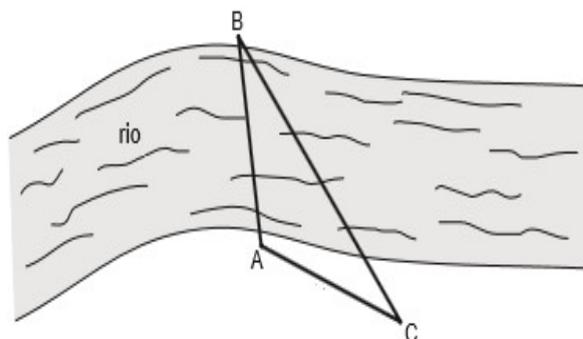


Figura 4.8: Elementos básicos para a medição da largura do rio com o teodolito

O cálculo da largura do rio é diferente ao cálculo da altura da castanheira ou da torre de alta tensão. No caso do cálculo das alturas trabalhamos num plano vertical, enquanto no caso da largura do rio trabalhamos num plano horizontal.

Consideramos que estamos na orla do rio que contém o lado do triângulo AC e que não podemos atravessar o rio para fazer uma medida direta da largura. Para medir a largura do rio segue-se os seguintes procedimentos:

1. Fixar dois pontos A e C no mesmo lado do rio como na Figura 4.8.
2. Desde o ponto A fixar um ponto B no lado oposto do rio, tal que a distância AB aproxime a largura do rio.
3. Com uma trena medir o cateto AC do triângulo ABC .
4. Com o teodolito medir o ângulo A do triângulo ABC .
5. Com o teodolito medir o ângulo C do triângulo ABC .
6. Calcular o ângulo B do triângulo ABC :

$$B = 180 - A - C.$$

7. Usar a lei dos senos para calcular a largura AB :

$$\frac{\text{sen}(B)}{AC} = \frac{\text{sen}(C)}{AB}.$$

A seguir descrevemos os resultados no uso do teodolito para medir a largura do rio:

1. Com uma trena, mediu-se a distância AC entre os pontos A e C do mesmo lado da orla. A medida foi:

$$AC = 95,0 \text{ m.}$$

2. Desde o ponto A , fazemos coincidir o lado AC no transferidor do teodolito caseiro com o ângulo zero, movimentamos o canudo até coincidir com o lado AB . A medida do ângulo $\angle A$ foi de:

$$\angle A = 93^\circ.$$

3. Desde o ponto C , fazemos coincidir o lado CA no transferidor do teodolito caseiro com o ângulo zero, movimentamos o canudo até coincidir com o lado CB . A medida do ângulo $\angle C$ foi de:

$$\angle C = 69^\circ.$$

4. O ângulo $\angle B$ é calculado como:

$$\begin{aligned}\angle B &= 180 - \angle A - \angle C \\ &= 180 - 93 - 69 \\ &= 18^\circ.\end{aligned}$$

5. Na Figura 4.9 temos um diagrama dos valores calculados nos itens anteriores.

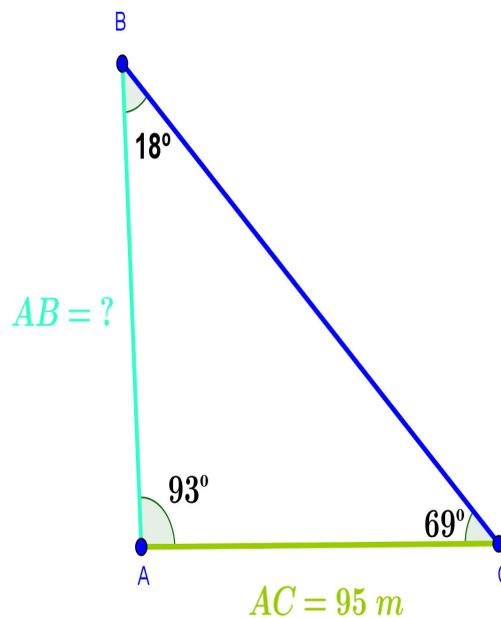


Figura 4.9: Diagrama com os valores calculados

6. Usando a lei dos senos temos:

$$\frac{\text{sen}(18^\circ)}{95} = \frac{\text{sen}(69^\circ)}{AB}$$

logo,

$$\begin{aligned}AB &= \frac{\text{sen}(69^\circ) \cdot 95}{\text{sen}(18^\circ)} \\ &= \frac{0,9335 \cdot 95}{0,3090} \\ &= 287,0\text{ m}.\end{aligned}$$

A largura do rio AB foi medida com um teodolito profissional, obtendo-se:

$$AB = 274,17 \text{ m.}$$

O erro absoluto E_A da medição da largura com o teodolito caseiro em relação ao teodolito profissional é dado por:

$$\begin{aligned} E_A &= |AB \text{ caseiro} - AB \text{ profissional}| \\ &= |287,0 - 274,17| \\ &= 12,83 \text{ m.} \end{aligned}$$

Enquanto, o erro relativo E_R entre estas duas medições é:

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{|AB \text{ caseiro} - AB \text{ profissional}|}{AB \text{ profissional}} \\ &= \frac{|287,0 - 274,17|}{274,17} \\ &= \frac{12,83}{274,17} \\ &= 0,0467. \end{aligned}$$

Em termos percentuais temos um erro relativo de 4,67% na medição da largura do rio Jari pelo teodolito caseiro em relação ao teodolito profissional. Um erro percentual similar ao erro na medição da altura da castanheira.

Na Figura 4.10 observa-se à equipe no trabalho de campo para a medição da largura do Rio Jari.

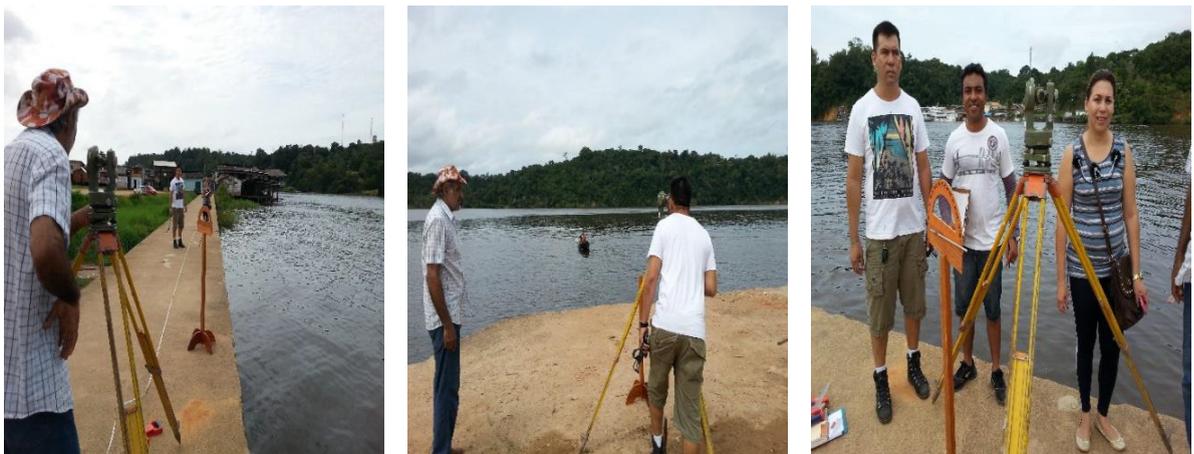


Figura 4.10: Equipe em trabalho de campo na medição da largura do Rio Jari

4.5 Cálculo da Torre da Igreja Santo Antônio do Jari

Foi escolhida a Igreja de Santo Antônio do Jari por ser um símbolo e parte da história do Município de Laranjal do Jari. Foi medida a altura da torre da Igreja usando o aplicativo Theodolite Droid e comparamos sua eficiência com medições do teodolito caseiro e teodolito profissional.

Na história desta igreja, mencionamos que em primeiro de agosto de 1985, Dom Luís Soares Vieira erige a "Quase-Paróquia" de Santo Antônio na Vila de Laranjal do Jari, adjudicando-lhe todas as Comunidades da margem esquerda do Rio Jari, atendidas, até o presente, pela Paróquia de Almerim e dando-lhe como Sede provisória a Capela de N.S. do Perpétuo Socorro em Laranjal do Jari.

Aos dois de junho de 1994 o Ex.mo. Bispo Diocesano de Macapá Dom João Risatti, erigiu finalmente à dignidade de Paróquia a Quase-Paróquia de Santo Antônio do Jari. O decreto entrou em vigor no dia treze de junho de 1994 com a benção da nova igreja matriz.

As tecnologias estão fazendo parte cada vez mais da vida das pessoas e, principalmente dos estudantes. Curtir, compartilhar, dividir arquivos e discutir abertamente sobre qualquer assunto é uma realidade que os alunos já participam, sendo necessário que os educadores conheçam esses cenários e saibam utilizar tais recursos a favor da educação.

Hoje, os professores e alunos também estão lançando mão de aplicativos e softwares que potencializam o aprendizado. Um exemplo é o Theodolite Droid, neste trabalho utilizado como ferramenta de medição de alturas, assim como o teodolito profissional e o caseiro. O ícone deste aplicativo é apresentado na Figura 4.11.

O Teodolite Droid é um aplicativo que trabalha de forma semelhante ao teodolito, aproveitando as ferramentas do smartphone ou tablet (GPS, mapas, inclinômetro, câmera, magnetômetro, etc.) Além disso, a longitude, latitude, altitude, azimute, endereço (se disponível), data e hora, e os ângulos horizontais e verticais são sobrepostos para o visor da câmera em tempo real e gravado quando for tirada uma fotografia (se desejado). A informação também é gravado em um mapa, incluindo rolamentos, distâncias e alturas de objetos medidos. Embora a ferramenta é usada principalmente por geólogos, arqueólogos, engenheiros, topógrafos, arquitetos e outros profissionais, o dispositivo pode ser extremamente útil para caminhantes e ciclistas, golfistas que tentam determinar as distâncias de furos, caçadores e viajantes em barcos e carros.

A altura de um objeto pode ser determinada estimando a distância ao objeto (ou por determinação da distância ao objeto num mapa por um simples toque no mapa) e apontando o visor

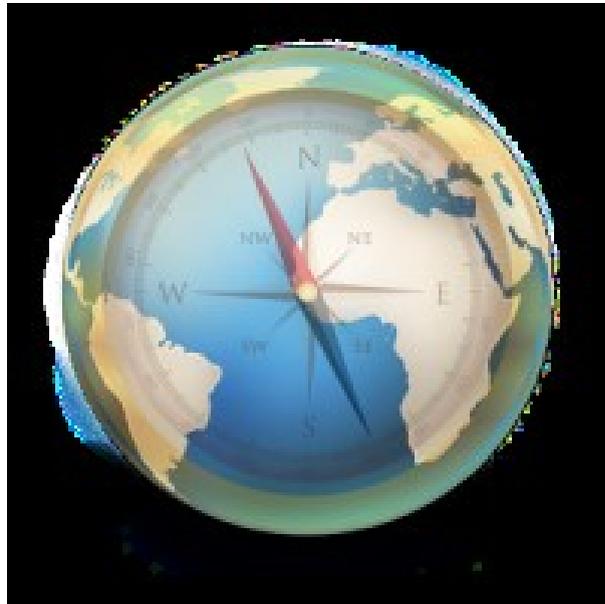


Figura 4.11: Ícone do aplicativo Theodolite Droid

na parte inferior do alvo e, em seguida, a parte superior do alvo. O aplicativo apresenta na tela o ângulo e a altura do objeto.

A distância a um objeto pode ser determinado de várias maneiras: estimando a altura do objeto, por triangulação a partir de dois pontos, ou apontando para o objeto num mapa.

O poder do aplicativo é que a informação além de pode ser compartilhada com vários sites sociais como o Facebook, e-mail, também pode ser sincronizado com um site que permite criar e outros possam ver o trabalho. Através do site, os dados podem ser visualizados em tempo real por amigos, familiares ou colegas. A sincronização também serve como uma forma de fazer backup dos dados se o telefone ou tablet tiverem problemas. Se não tiver acesso à web, o aplicativo irá coletar os dados e armazená-lo até que uma conexão web seja estabelecida. Depois que os dados forem enviados, pode-se editar os dados, criar relatórios ou mapas, e transferir os dados ou relatórios para planilhas e outros documentos. Uma vez que o levantamento ou medição for concluída, pode-se criar automaticamente um powerpoint ou vídeo do trabalho.

Os procedimentos para calcular a altura da torre usando o aplicativo Theodolite Droid foram os seguintes:

- a) Nos posicionamos a uma distância da torre, que foi medida como $d = 45$ metros.
- b) Desta posição apontamos o centro da mira na tela do celular para a base da torre e dando um toque na tela finalizamos este primeiro passo.

- c) Agora movimentamos o centro da mira na tela do celular para o topo da torre e damos outro toque na tela para finalizar o procedimento (ver Figura 4.12).

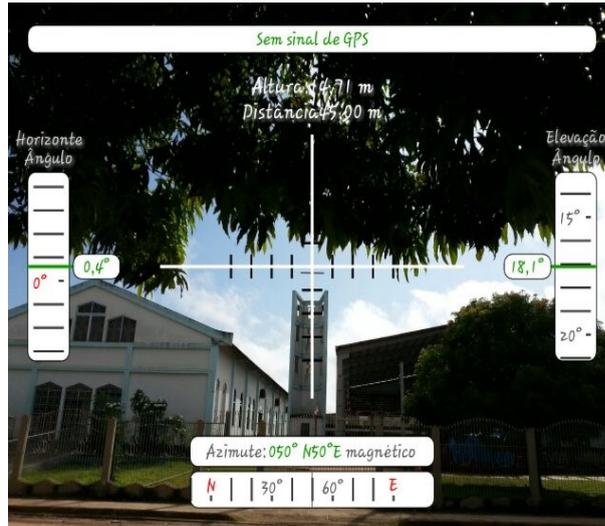


Figura 4.12: Medição da Torre usando o aplicativo Theodolite Droid

- d) Na tela do celular pode-se ler a altura da torre, o qual foi de 14,71 metros.

A altura da torre foi medida com o teodolito caseiro e o teodolito profissional (ver Figura 4.13). O teodolito caseiro forneceu uma altura de 15,06 metros, enquanto o teodolito profissional forneceu uma altura de 14,81 metros.



Figura 4.13: Altura da torre calculada com os teodolitos caseiro e profissional

O erro relativo E_T da medição da altura da torre da Igreja Santo Antônio do aplicativo Theodolite Droid em relação ao teodolito profissional é dado por:

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{|\text{altura Theodolite Droid} - \text{altura teodolito profissional}|}{\text{altura teodolito profissional}} \\ &= \frac{|14,71 - 14,81|}{14,81} \\ &= \frac{0,10}{14,81} \\ &= 0,0067 = 0,67\%. \end{aligned}$$

O erro relativo E_c da medição da altura da torre da Igreja Santo Antônio do teodolito caseiro em relação ao teodolito profissional é dado por:

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{|\text{altura teodolito caseiro} - \text{altura teodolito profissional}|}{\text{altura teodolito profissional}} \\ &= \frac{|15,06 - 14,81|}{14,81} \\ &= \frac{0,10}{14,81} \\ &= 0,0168 = 1,68\%. \end{aligned}$$

Em termos comparativos a altura calculada com o aplicativo Theodolite Droid foi mais precisa que o teodolito caseiro. Entretanto podemos considerar que ambos instrumentos tiveram boa performance em relação ao teodolito profissional, por apresentarem erros relativos pequenos.

Considerações Finais

O uso de materiais didáticos para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem é considerada uma ferramenta importante a disposição do professor de matemática, o qual pode colocar em prática os conceitos teóricos apresentados em sala de aula.

Neste trabalho, associamos conceitos de trigonometria a medidas de objetos característicos da região do Jari. Apresentar ao aluno o problema de estimar a medida real de uma árvore de castanheira, a qual é uma árvore comum na região, pode inicialmente parecer uma tarefa impossível para ele devido a que visualmente a altura é realmente grande. Desafio similar é pedir a altura real de uma torre de alta tensão, da torre de uma igreja ou do comprimento do rio Jari o qual é de vital importância para a navegação e o transporte.

Temos mostrado neste trabalho que com um investimento mínimo as escolas podem contar com teodolitos caseiros de boa precisão para as aulas de funções trigonométricas. Os alunos podem usar estes teodolitos para fazer trabalhos de campo, o qual é importante para aliar teoria à utilidade prática da matemática. O trabalho de campo precisa de planejamento prévio o qual é um elemento importante na educação escolar.

Em teoria a tecnologia chegou para revolucionar a educação, muitas escolas tem agora laboratórios de computação com computadores conectado a internet. Entretanto os resultados não são satisfatórios, os laboratórios são pouco utilizados no processo de aprendizagem. Mas se observa que os alunos são assíduos usuários da tecnologia, alguns das redes sociais como o Facebook e Whatsapp e outros dos jogos virtuais. Isto mostra que os alunos tem potencial para uso de novas tecnologias, infelizmente este potencial não é direcionado para a aprendizagem escolar.

Mostramos também neste trabalho que o uso de aplicativos de celular para auxiliar no processo de ensino é viável. O aplicativo de celular Theodolite Droid é um teodolito virtual que foi usado em trabalho de campo para medir a altura da torre da Igreja Santo Antônio com resultados satisfatórios. Os resultados são fornecidos na tela do celular, mas o aluno pode conferir que o resultado é correto pela aplicação da teoria.

As funções trigonométricas e o uso do teodolito fornecem conhecimento teórico e prático para futuros engenheiros, arquitetos, técnicos em edificações, topógrafos, agrimensores entre outras áreas. O correto é ter no projeto pedagógico atividades práticas com materiais didáticos e tecnológicos a cada teoria matemática apresentada ao aluno, mostrando ao aluno que o conhecimento matemático é mais que um ente abstrato e que vai ser de utilidade na sua vida adulta.

Os autores ficam a disposição para auxiliar na construção e calibragem do teodolito caseiro, assim como auxiliar no uso do Teodolite Droid no ensino da matemática. Acreditamos num repensar pedagógico, que venha a promover a construção de conteúdos complementares de ensino.

Referências Bibliográficas

- [1] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria e Números Complexos*. Coleção do Professor de Matemática. 3a. ed .Rio de Janeiro: Editora Imos, 1992. 49p.
- [2] MOTA, Fabio. *Historia da Agrimensura*. Disponível em <<http://cxsajba-engenhariapolitecnica.blogspot.com.br/2012/09/07-historia-da-agrimensura.html>>. Acesso em 03 de junho de 2015.
- [3] MATOS, C.M. et.al. *Aplicações da Trigonometria Esférica*. VII Congresso Norte Nordeste de Pesquisa e Inovações: Ações Sustentáveis para o Desenvolvimento Regional. Palmas-Tocantins 2012. Disponível em <[www.http://propi.ifto.edu.br/ocs/index.php/connepi/vii/paper/viewFile/878/880](http://www.propi.ifto.edu.br/ocs/index.php/connepi/vii/paper/viewFile/878/880)>. Acesso em 08 de junho de 2015.
- [4] FAGGION, Pedro Luís. *Considerações sobre a instrumentação topográfica*. Disponível em <http://www.cartografica.ufpr.br/docs/Pedro/Apostila%20de%20Instrumenta%C3%A7%C3%A3o%20Topogr%C3%A1fica_2011_Aluno.pdf>. Acesso em 01 de junho de 2015.
- [5] FASICK, Ron. *Como Utilizar um Teodolito de Agrimensor*. Disponível em <http://www.ehow.com.br/utilizar-teodolito-agrimensor-como_16592/>. Acesso em 05 de junho de 2015.
- [6] SILVA, G.A.O.; et.al. *O uso do teodolito como uma ferramenta no ensino da trigonometria*. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Ulbra- Canoas- Rio Grande do Sul 2013. Disponível em

<<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1259/316>>. Acesso em 05 de janeiro de 2015.

[7] YOUSSEF, Antonio Nicolau; FERNANDES, Vicente Paz; SOARES, Elizabeth. *Matemática, Ensino Médio*. São Paulo: Scipione, 477. 122p. Coleção Novos Tempos.

[8] *Como Calcular a Área de Um Triângulo Retângulo*. Disponível em <<http://seusaber.com.br/matematica/como-calcular-a-area-de-um-triangulo-retangulo.html>>. Acesso em 02 de junho de 2015.

[9] *Funções trigonométricas no triângulo retângulo*. Disponível em <<http://www.colegioweb.com.br/funcoes-trigonometricas-no-trianguloretangulo/funcoes-trigonometricas-no-triangulo-retangulo.html>>. Acesso em 01 de junho de 2015.

[10] *Teodolito*. Museu de Astronomia e ciências a fim. Disponível em <http://www.mast.br/multimedia_instrumentos/teodolito_atualidade.html>. Acesso em 05 de junho de 2015.

[11] *Quem foi Hiparco e quais suas Contribuições à Trigonometria*. Disponível em <<http://pt.slideshare.net/isabelrorig/quem-foi-hiparco-e-quais-suas-contribui-es-trigonometria>>. Acesso em 08 de junho de 2015.

[12] < <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1259/316>>. Acesso em 05 de janeiro de 2015.