UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Maria Carolina Martins Pereira

CONSTRUINDO FRAC-SOMA 235, E CONHECIMENTO, NO ENSINO BÁSICO

Porto Alegre
2009

Maria Carolina Martins Pereira

CONSTRUINDO FRAC-SOMA 235, E CONHECIMENTO, NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo Curso de Licenciatura Em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2009

Maria Carolina Martins Pereira

CONSTRUINDO FRAC-SOMA 235, E CONHECIMENTO, NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo Curso de Licenciatura Em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Aprovado em / /20 .

BANCA EXAMINADORA

Francisco Egger Moellwald- UFRGS- Faculdade de Educação

Elizabete Zardo Búrigo- UFRGS- Instituto de Matemática

RESUMO

A utilização de materiais manipulativos tem apresentado contribuições no ensino-aprendizagem de matemática. Por este motivo associou-se esta prática, a partir do material FRAC-SOMA 235 da autoria de R. R. Baldino, ao ensino de frações durante o ensino básico. A escolha do tema frações foi impulsionada pelas diversas experiências com alunos que mesmo já tendo estudado os racionais em sua forma fracionária, ainda encontram dificuldades na resolução de exercícios com estes números. Foi realizada uma prática de 20 horas com estudantes da 5ª série de uma Escola pública de Porto Alegre, onde os alunos puderam construir uma reprodução do material FRAC-SOMA 235, e após, utilizá-lo em seus estudos.

Juntamente à prática do projeto, professoras das séries iniciais foram convidadas a participarem de um curso de formação, onde este, e outros materiais foram apresentados, no intuito de que utilizem materiais concretos em suas aulas, como auxiliares na aprendizagem do estudante.

Palavras- chave: FRAC-SOMA 235, ensino-aprendizagem, frações, formação de professores.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante minha experiência como docente nas escolas Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CAp), Instituto de Educação General Flores da Cunha (IE), Instituto de Educação Rio Branco (RB) e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IF); através das disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-aprendizagem em Matemática I,II e III; Estágio em Educação Matemática I, II e III, e ainda como bolsista da Ação de Extensão "Assessorias de Matemática, Interação Virtual e Robótica para a Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática", há dois anos, pude perceber que desde os alunos das séries iniciais até os de nível médio, com os quais trabalhei, apresentam problemas no que se refere ao trabalho com números fracionários.

Ouvindo ainda os comentários de colegas que observavam a mesma situação, passei a me questionar por que grande parte dos alunos não compreende e não consegue operar com frações. A partir dessas conversas com meus colegas de curso, e também da observação de meus alunos, notei que o erro mais comum na operação com os números fracionários acontece na soma e na subtração destes. Parece que vêem as frações não como um único número, mas como dois números inteiros independentes, um sobre o outro, e por isso somam ou subtraem os numeradores e denominadores, tal qual fazem com números inteiros. Por exemplo, na soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ tipicamente os alunos operam da seguinte forma $\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$.

Procurando ajudar os alunos nesta questão, passei a pesquisar sobre os recursos que poderia utilizar para que houvesse uma melhor compreensão sobre este tema por parte dos estudantes. Conhecendo a eficácia do uso de materiais concretos para o ensino-aprendizagem de matemática, apontada por autores como Léa da Cruz Fagundes (1977) e Zoltan Dienes (1975), passei a buscar algum voltado aos conceitos e operações com frações. Conheci então um material chamado FRAC-SOMA 235, da autoria de R. R. Baldino. Este material é constituído por uma barra, a unidade, e outras barras do mesmo tamanho da unidade, subdivididas pelos múltiplos de 2, 3 e 5.

Realizei então um trabalho sobre frações com alunos do Projeto Amora[1] no CAp utilizando o material. A resposta dos alunos foi muito positiva. Os alunos demonstraram grande interesse na realização das atividades, pois podiam manipular as peças e comparar

[1] O Projeto Amora é um projeto que desenvolve atividades com alunos de 5ª e 6ª séries, através de uma distribuição curricular diferenciada.

seus tamanhos e suas relações com a barra unidade. Essa manipulação e comparação foram essenciais para que os alunos passassem a visualizar o significado de uma fração como parte de um todo, e também para compreender o processo que cada fração sofria quando operada com outra.

A partir desta experiência, passei a utilizar o FRAC-SOMA 235 sempre que iniciava o estudo das frações com alunos, pois os resultados obtidos foram muito significativos. Observou-se, por exemplo, que o erro na soma ou subtração das frações, que era somar ou subtrair os numeradores e os denominadores de forma direta, teve uma grande diminuição entre os estudantes, que passaram a perceber porque não podíamos nos utilizar desta regra. Essa percepção foi desencadeada pelo uso do material, pois a tentativa de somar ou subtrair frações de denominadores diferentes causava um problema de comparação entre o resultado desta operação e a barra unidade.

Como bolsista da Ação de Extensão de Matemática, Interação Virtual e Robótica para a Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática, trabalho no RB com assessorias de matemática para 5ª, 6ª e 7ª séries na Escola há dois anos, e os problemas com frações apresentados pelos alunos são muito semelhantes. Da Escola partiu o interesse por montar um laboratório de matemática e, sabendo do meu interesse por materiais manipulativos para o ensino de matemática, fui convidada pela Direção da Escola a participar da montagem deste laboratório.

Inicialmente organizei uma lista de materiais que deveriam ser adquiridos para compor o laboratório. Terminada a lista, passei a contatar lojas, averiguando onde os materiais poderiam ser comprados. Na lista constava o FRAC-SOMA 235, mas na pesquisa das lojas não encontrei nenhuma que tivesse o material, e desta forma este não foi adquirido para o acervo do Laboratório.

Daí partiu a idéia de então suprir este desfalque nos materiais do laboratório, mas procurando, de alguma forma, auxiliar alunos com este material para que compreendessem melhor o trabalho com frações. Assim, os 20 estudantes da 5ª série participantes das assessorias construíram um material baseado no FRAC-SOMA 235, e trabalharam conceitos e operações com frações com os próprios materiais que produziram. Escolhi trabalhar com alunos da 5ª série, pois é nesta série que se iniciam as formalizações sobre frações. Além disso, optei por construir o material com os alunos, pois o processo de divisão da barra unitária já é o primeiro conceito sobre números fracionários.

Ainda, como bolsista de Extensão, participava de um grupo de licenciandos que ministrava na mesma Escola um curso voltado a professores das séries iniciais. Neste curso, apresentei o material produzido pelos alunos, e com os professores participantes realizei atividades usando o material. O intuito era divulgar entre os professores a importância do uso de materiais concretos no ensino-aprendizagem de matemática, neste caso, especificamente o FRAC-SOMA 235; e fazer com que os professores conhecessem o material e o levassem para sala de aula quando iniciassem o trabalho com números fracionários já que agora o material estava disponível na Escola.

Assim sendo, o presente trabalho apresenta a descrição das aulas desenvolvidas com os alunos e professores através de apontamentos realizados durantes as aulas, além dos resultados obtidos com estes estudos. Destaco que a partir deste trabalho não só foi possível auxiliar aqueles estudantes com o estudo realizado, mas ainda pudemos prestar um serviço à Escola, que recebeu de presente os 10 jogos completos produzidos.

2 Por que estudar frações? A indicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são referências criadas pelo Governo Federal em 1996 que regem os conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental e Médio em todo o país, com o intuito de garantir que todo estudante brasileiro possa ter acesso aos mesmos conhecimentos escolares indicados como importantes.

Nos PCN o trabalho com frações se deve iniciar no segundo ciclo, ou seja, entre o 4° e o 7° ano, e tem por objetivo levar os alunos a perceberem que os conhecimentos sobre números naturais são insuficientes para a resolução de certos problemas. Esta percepção deve acontecer a partir de situações- problema indicadas pelo professor, em que os números naturais não são capazes de exprimir exatamente o resultado.

Segundo os PCN os Conteúdos Conceituais e Procedimentais a serem trabalhados são os seguintes:

- Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário;
- Formulação de hipóteses sobre a grandeza numérica, pela observação da posição dos algarismos na representação decimal de um número racional;
- Extensão das regras do sistema de numeração decimal para compreensão, leitura e representação dos números racionais na forma decimal;
- Comparação e ordenação de números racionais na forma decimal;
- Localização na reta numérica de números racionais na forma decimal;
- Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso freqüente;
- Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária;
- Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas;
- Exploração de diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão;
- Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária;
- Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional;
- Reconhecimento do uso da porcentagem no contexto diário;

- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais;

- Cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal, por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais.

A construção da idéia de número racional deve partir da relação de divisão entre dois números naturais[2], excluindo-se o caso em que o divisor é zero. Segundo os PCN, no que se refere às relações entre os números naturais, já conhecidos pelos alunos, e os números racionais, a aprendizagem destes supõe que aconteçam divergências entre o conhecimento sobre as operações com naturais e, agora, com racionais. Por isso, a abordagem deste novo número deve ser realizada adequadamente, inclusive em relação à demanda de tempo.

Sobre estas divergências entre os números naturais e racionais, os PCN indicam algumas confusões que podem ocorrer durante o trabalho com frações, por exemplo, as infinitas representações fracionárias de um mesmo número, ao contrário dos naturais, que têm representação única; a comparação entre frações, pois enquanto 3 é maior que 2, $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{1}{2}$; o "tamanho da escrita" dos números naturais é um indicador de quão grande eles são, já no números decimais isso nem sempre é determinante, pois 2,3 (com apenas dois algarismos) é maior que 2,123 (com três algarismos); nas multiplicações entre números naturais distintos de 1, é esperado que o resultado seja maior que ambos os números, no entanto entre números racionais o resultado de uma multiplicação pode ser menor que qualquer um dos fatores; e ainda, o fato de que tomando um racional qualquer, não é possível determinar qual o seu antecessor e sucessor.

Os PCN ressaltam que os números racionais no cotidiano aparecem mais freqüentemente na forma decimal, e que o uso de calculadoras pode proporcionar um bom trabalho, integrando o objetivo de observar as representações decimais de frações ao uso da tecnologia disponível. Na vida cotidiana, a representação dos números racionais na forma fracionária está restringida à relação de parte e todo envolvida na tradicional divisão de uma pizza; dividimo-la em algumas partes e tomamos algumas delas, por exemplo.

[2] Os PCN estabelecem que durante o segundo ciclo a divisão entre números, para a introdução do conceito de fração, deve contemplar apenas números naturais, visto que o trabalho com inteiros deve ser realizado apenas a partir do 3° ciclo.

Ainda sobre o significado das frações, os PCN trazem a fração com o significado de razão entre duas quantidades, por exemplo, 4 de cada 5 brasileiros adoram futebol. Traz ainda as noções de probabilidade, escala e porcentagem, envolvidas na representação fracionária.

De acordo com as indicações constantes nos Parâmetros, o trabalho com números racionais deve iniciar no segundo ciclo, mas estender-se até o fim da vida escolar do aluno.

> Esse breve resumo das interpretações mostra que a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo; trata-se de um trabalho que apenas será iniciado no segundo ciclo do ensino fundamental e consolidado nos dois ciclos finais. (BRASIL, 1996, p. 69).

Sobre as operações com números racionais os PCN consideram que muitos dos significados de transformação trabalhados com os números naturais podem ser estendidos aos números racionais. Para números racionais na forma decimal, inclusive os algoritmos empregados nas operações com números naturais podem ser transpostas aos racionais.

Os PCN reforçam ainda a importância de que os alunos verbalizem a escrita dos números na forma decimal, como forma de apropriarem-se da ordem dos algarismos de acordo com o sistema posicional.

Ao final do segundo ciclo, segundo os PCN, espera-se que o aluno, em relação aos números racionais, seja capaz de resolver problemas que evolvam estes números; que consiga ler, escrever, ordenar e identificar em intervalos os números racionais; que possa realizar cálculos mentais e por escrito, e que faça estimativas sobre o resultado a ser obtido. Por este motivo é importante que os cálculos desenvolvidos durante as aulas sejam sempre vinculados a situações reais, que possibilitem ao aluno enquadrar resultados a partir de números naturais próximos.

3 O PROBLEMA DAS FRAÇÕES

Não é de hoje que se comenta sobre os baixos níveis de aproveitamento dos conteúdos matemáticos nas escolas públicas brasileiras. Segundo Druck (2006) no SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) de 2006, apenas 3% dos estudantes obtiveram índices de aproveitamento desejáveis. No PISA (Programa Internacional para a Avaliação de Estudantes), dentre os 43 países participantes, o Brasil ficou em último lugar.

Dentre os diversos problemas no domínio do conteúdo matemático, é possível destacar a lógica e as operações aritméticas básicas, porque grande parte dos estudantes não consegue interpretar problemas, e buscar dentre seus conhecimentos o que se pode aplicar naquele momento. Ainda, num grande número de vezes, mesmo que o aluno raciocine de forma coerente, esbarra nas operações aritméticas para a resolução do problema.

Durante minha experiência de trabalho com alunos do ensino fundamental, observei que dos um dos conceitos matemáticos que mais apresenta problemas de significação são as frações. E estes problemas não se mostram apenas durante o ensino fundamental, pois trabalhos com alunos de ensino médio mostram que, mesmo convivendo com estes números há alguns anos, este alunos ainda não se apropriaram deste conceito.

O trabalho com frações de uma forma visual relacionando parte e todo ocorre apenas para a introdução deste “novo número”, e de uma forma que não permite ao aluno a reflexão, a interrogação, fatores fundamentais para a aprendizagem. Segundo Bertoni (2004), os exercícios dos livros didáticos prendem o aluno na manipulação de figuras, e dele não é solicitada a formulação de nenhuma idéia.

> (...) há muitas décadas que o tema frações com todo seu acervo de conceitos e procedimentos subjacentes (frações próprias, equivalentes, ordenação, aplicações e cálculos) podem e devem ser “ensinados” na 5ª série como um pacote. É um grande erro. (LOPES, 2004).

Ainda assim, tanto nos trabalhos dos professores quanto nos livros didáticos desenhos e materiais concretos são utilizados apenas nas primeiras aulas, e logo em seguida voltam-se aos algoritmos e às operações totalmente abstratas.

> Pode ser que algumas das dificuldades que permeiam o ensino e a aprendizagem das frações, em algum de seus aspectos, venha determinada por encontrarmos tão rapidamente o caráter algébrico na seqüência curricular. (CISCAR e GARCIA, 1988, p. 54)

Para muitos dos alunos este tempo é muito curto, e o aluno antes de uma maior compreensão do novo conceito inicia o trabalho abstrato.

Comparado ao tempo que é destinado ao trabalho com números naturais, o período destinado ao estudo dos números fracionários mal possibilita sua apresentação, quanto mais sua assimilação pelos alunos. Enquanto o contato com números naturais inicia antes da idade escolar, os números racionais são trabalhados durante alguns meses da 4ª ou 5ª série, contrariando as indicações dos PCN: “(...) em que pese às relações entre números naturais e racionais, a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com idéias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo (...)” (BRASIL, 1996, p. 67).

Segundo Lopes (2004), “a formação do pensamento proporcional é longa, estendendo-se dos 9/10 anos até os 14/15 anos.”. Ou seja, de acordo com a idade escolar, o ensino das frações deveria iniciar na quinta série e findar apenas na oitava. De fato, é compreensível a confusão e a volatilidade dos conceitos associados aos números fracionários, já que um estudo que deveria ser distribuído por grande parte da vida escolar básica é resumido a algumas aulas de uma série determinada.

> (...) as frações são introduzidas (...) em algumas páginas dos livros didáticos, são introduzidos os nomes de todas as frações, as representações numéricas correspondentes e a nomenclatura de tipos especiais de frações. Ou seja, espera-se que, aproximadamente em uma semana, a criança esteja compreendendo esse novo campo numérico. (BERTONI, 2004, p. 04).

No entanto, creio não ser possível que os alunos trabalhem com novas regras de adição, multiplicação e divisão sem que tenham observado o que e porque isso acontece. Digo que não é possível que trabalhem de uma forma duradoura, ou seja, os alunos trabalham com frações durante boa parte da sua 5ª série, e conseguem, sim, operar com estes números, mas já na sexta série as “regras” são esquecidas, e o aluno freqüentemente recorre a regras deduzidas por ele próprio, a partir das de operações com números inteiros. Por exemplo, na soma das frações, os alunos não raramente somam de maneira direta os numeradores e denominadores, respectivamente, entre si.

> A destreza que se pode conseguir no manejo dos símbolos relativos às frações e às operações com frações, não é fácil de reter se não tenhamos sido capazes de criar um esquema conceitual a partir de situações concretas. (CISCAR e GARCIA, 1988, p. 54)

Assim, a partir do momento em que os alunos conhecem a forma decimal de representação, acabam preferindo esta, pela semelhança entre a operação com estes números e os naturais. No entanto, ainda que o aluno consiga operar números racionais em sua forma decimal, não consegue transitar entre as duas formas: da fracionária para a decimal e da decimal para a fracionária. Parte dos alunos vêem na forma fracionária de representação apenas um desenho, uma maneira de relacionar parte e todo. A barra entre numerador e denominador não faz referência ao algoritmo euclidiano de divisão. Tampouco a posição adotada por cada algarismo na representação decimal tem relação com a fração com denominador alguma potência de dez. Então, mesmo que o aluno possa resolver um problema através da representação decimal dos números racionais, quando defrontado com uma fração, a resolução deste mesmo exercício torna-se problemática.

A Matemática é uma disciplina cumulativa, ou seja, as noções básicas de cálculo trabalhadas na primeira série básica não são trabalhadas apenas durante aquele período, elas são utilizadas por toda a vida escolar dos alunos, como na resolução de problemas de funções durante o ensino médio, por exemplo. Partindo deste princípio, sem o domínio do conteúdo de frações, a cada exercício sobre um novo tema que tenha algum dado racional, o aluno se depara com dois problemas: o conteúdo novo e o trabalho com as frações. O exercício torna-se mais complicado, impossível, caso não haja alguma interferência por parte do professor, relembrando as “regras” das operações com racionais: “A matemática é seqüencial, sobretudo da 1ª à 8ª série. Assim, um tópico não aprendido compromete o aprendizado dos subseqüentes.” (DRUCK, 2006, p. 8). Para o aluno, muito provavelmente aquele exercício não terá tido a finalidade a que se propunha: tratar do novo tema, pois antes de trabalhar o novo conteúdo, o aluno esbarrou na operação com os dados do problema, e a dificuldade ou a impossibilidade da operação, confunde o objetivo do exercício. É como se apesar de o aluno o ter resolvido e exercício, ficasse uma névoa. Nem a intenção do exercício, nem as “regras” de operações com frações ficaram claras. É como se fossemos aprender a cozinhar, e já na primeira aula tivéssemos de preparar ao mesmo tempo dois pratos diferentes.

Por este motivo, exercícios de livros didáticos raramente têm dados racionais. Nota-se que os exercícios geralmente têm dados naturais ou inteiros, e as respostas seguem a mesma linha. Os números são escolhidos de modo a serem sempre exatos, “redondos”.

> (...) não se nota, de modo geral, nos livros e nas propostas curriculares de 5ª a 8ª série, mudanças no sentido de uma introdução mais cuidadosa às frações e às operações entre elas, visando suprir essa lacuna deixada nas séries iniciais. (BERTONI, 2004, p. 01).

Isso reforça a idéia de que os números racionais são estranhos, são difíceis, e não são utilizados em situações diárias. Tanto, que até mesmo os exercícios que tratam de operações financeiras, onde é mais que comum a utilização das frações do Real, nossa moeda, na forma decimal, têm dados e resultados inteiros. Desta forma, grande parte dos alunos concluem o ensino básico sem que consigam dominar completamente a noção e as operações com frações, e isto certamente torna-se um problema no cálculo de probabilidades, estatística, juros, porcentagens, e muitos outros conteúdos do Ensino Médio.

As alternativas que podem reverter este quadro baseiam-se na construção do conceito de fração pelo próprio aluno através de atividades que tragam diversas situações do cotidiano para dentro da sala de aula. Ainda, é importante a valorização dos conhecimentos prévios de cada aluno e a congratulação por cada nova conjectura realizada durante os estudos.

Colocar o aluno como agente na construção do seu conhecimento é uma forma de estimulá-lo a pesquisar, investigar e, por conseguinte, se apropriar de conhecimentos.

4 Diferentes Abordagens

Quando se trata de números fracionários, observamos que existem muitos contextos onde estes números são tratados com diferentes significados. Para Ciscar e García (1988) por estas muitas interpretações de número fracionário, o conceito de fração, na verdade, é um “megaconceito”. À primeira vista estas abordagens sobre o número racional não têm nada em comum, mas todas essas vertentes se unem quando se trata a fração como um mesmo ente matemático. Trataremos de algumas destas abordagens possíveis, neste caso, as mais presentes nos problemas escolares.

As relações existentes entre as diversas interpretações dos números fracionários pode ser expressa através do seguinte mapa conceitual baseado no de Ciscar e García (1988):

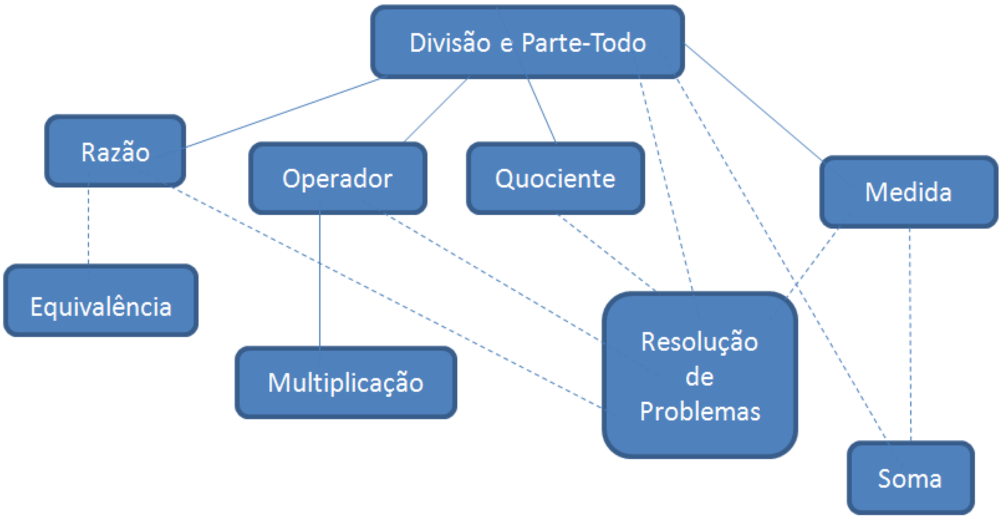


Figura 1- Diagrama das relações entre os conceitos de fração.

4.1 Parte-todo

Segundo Ciscar e García (1988), a noção intuitiva de fração vem da noção de metades, terços, quartos, ou seja, da relação parte-todo. É com esta abordagem que se inicia o trabalho com estes números, e é sobre esta abordagem que se baseiam as demais. Portanto, esta abordagem tem grande importância para a construção do “megaconceito” fração.

Esta relação está presente quando tomamos um inteiro e o dividimos em partes iguais, geralmente discretas. A fração aparece quando relacionamos o número de partes que queremos (numerador) com o número total de partes em que o inteiro foi dividido (denominador).

4.1.1 Representações Contínuas e Discretas

Esta representação das frações é com maior freqüência abordada através de problemas que envolvem divisão de segmentos, organização de grupos e áreas de figuras; representação contínua.

Os problemas que envolvem áreas de figuras tipicamente partem da divisão da figura em partes de mesma área, geralmente em figuras congruentes, relacionando parte sombreada com numero total de partes em que a figura inteira foi dividida.

Esta manutenção do formato das figuras que completam o todo é importante quando se inicia o trabalho com frações para que o aluno possa perceber que na abordagem parte-todo, as partes tomadas têm de ter alguma relação que permita compará-las, e isso depende do objetivo do exercício. Neste caso, onde uma figura inteira é subdividida em figuras iguais, pode-se questionar sobre as figuras componentes do inteiro, pois neste critério estão em igualdade.

Um exemplo deste tipo de problema pode ser observado no exercício a seguir, retirado de Imenes e Lellis (2002, p. 101).

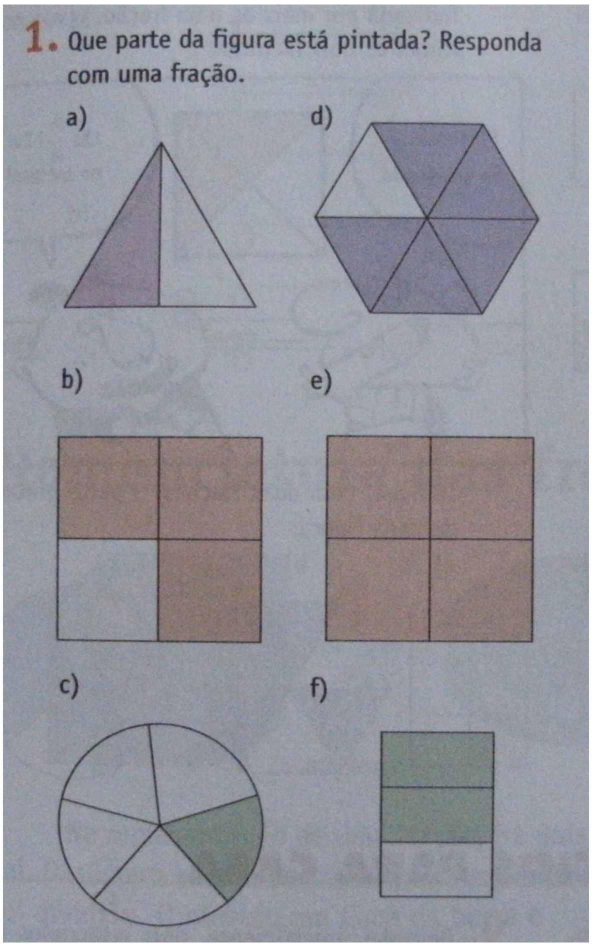
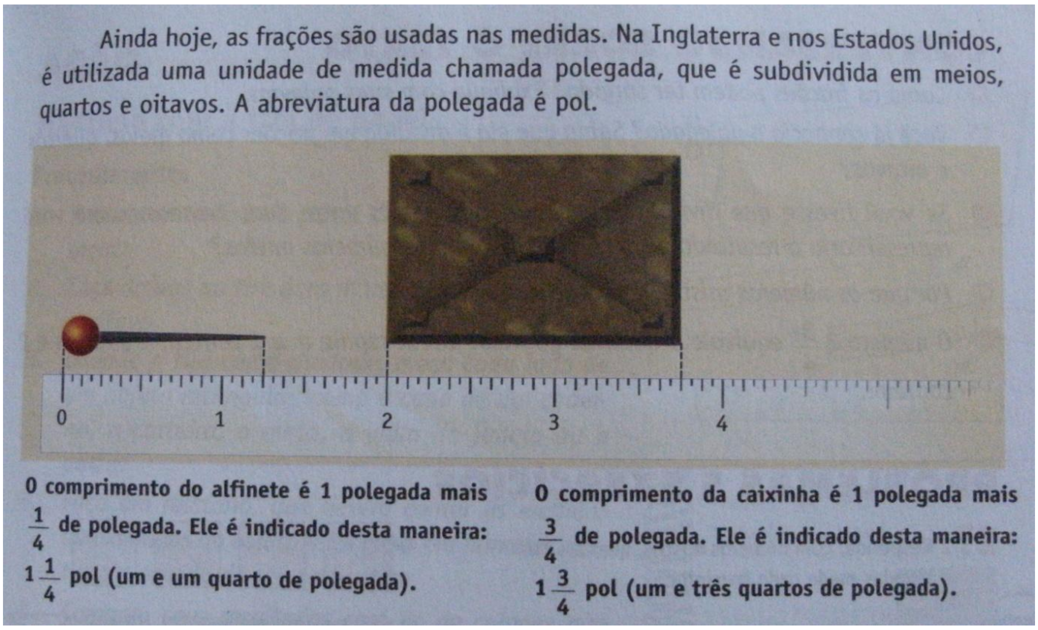


FIGURA 2- Exercício 1: Relação parte-todo com áreas.

Os problemas que envolvem divisão de segmentos geralmente repartem algum objeto unidimensional[3] como um barbante ou uma régua. No caso dos barbantes, a idéia é a mesma trabalhada nas figuras bidimensionais: reparte-se o barbante em pedaços iguais, e tomando alguns deles é possível determinar frações.

No uso da régua e possível trabalhar os conceitos de fração juntamente com unidades de medida. No caso do metro, por exemplo, pode-se questionar a fração relativa a um centímetro, a um milímetro de um centímetro, e, por conseguinte, um milímetro de um metro. Ainda é possível abordar unidades de medida diferentes, relacionando-as com o metro, nossa unidade usual, como forma de mostrar aos estudantes que há muitas maneiras de se medir, mas que todas podem ser relacionadas com a unidade preponderante em sua cultura e com o objeto da medição. Um exemplo disso é o seguinte texto retirado de Imenes e Lellis (2002, p. 108).

[3] Relativamente aos objetos presentes no dia-dia não é possível classificá-los como unidimensionais, mas estes objetos atendem bem a esta idéia quando focam seus dados importantes sobre uma única linha.



Ainda hoje, as frações são usadas nas medidas. Na Inglaterra e nos Estados Unidos, é utilizada uma unidade de medida chamada polegada, que é subdividida em meios, quartos e oitavos. A abreviatura da polegada é pol.

O comprimento do alfinete é 1 polegada mais $\frac{1}{4}$ de polegada. Ele é indicado desta maneira: $1\frac{1}{4}$ pol (um e um quarto de polegada).

O comprimento da caixinha é 1 polegada mais $\frac{3}{4}$ de polegada. Ele é indicado desta maneira: $1\frac{3}{4}$ pol (um e três quartos de polegada).

FIGURA 3- Frações como medidas.

Este texto estava presente entre os exercícios, e expõe os alunos às diferentes matemáticas produzidas por diferentes culturas.

Um exemplo de exercício que aborda frações com divisão de segmentos pode ser observado no exercício do livro de Imenes e Lellis (2002, p. 108).

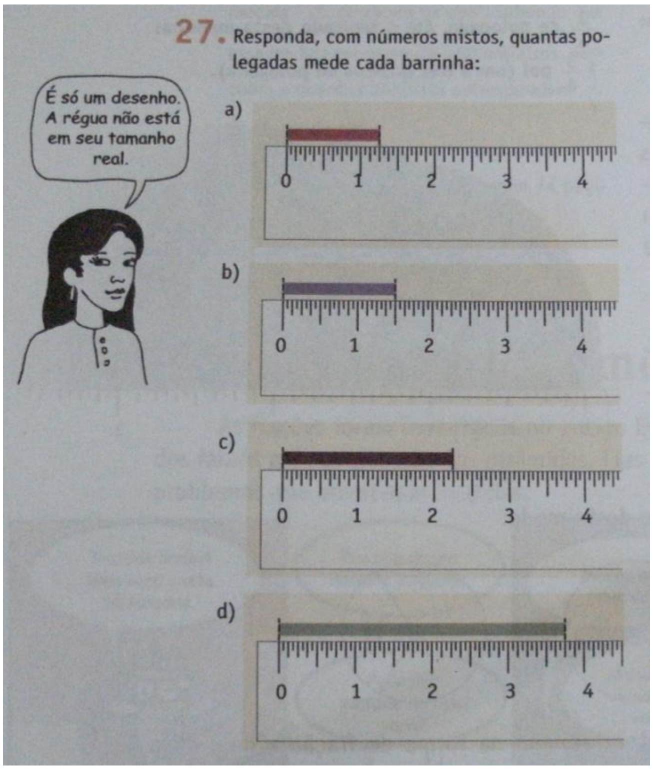
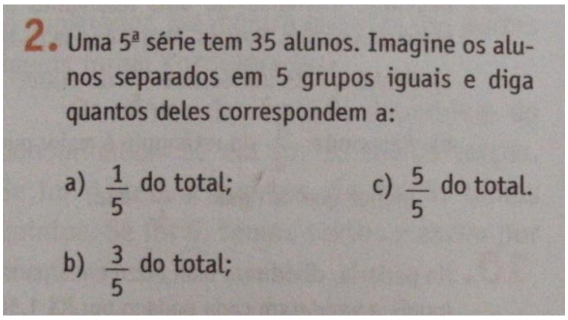


FIGURA 4- Exercício 2: Relação parte-todo com segmentos.

Há ainda a representação através da montagem de grupos a partir de um conjunto. Neste caso de representação discreta, são montados grupos de acordo com o número de componentes, e então é determinado quantos são os grupos possíveis; ou é determinado o número de componentes quando determinado o número de grupos.

Nestes exercícios podem ser encontradas relações de cor como nos problemas de área, como também pode ser observada a identificação da fração correspondente a um número de elementos em relação ao total. O aluno pode perceber a relação de igualdade existente entre o número de componentes de um grupo em relação a todos os elementos, e um grupo em relação aos demais grupos. Um exemplo deste tipo de exercício pode ser observado a seguir neste problema do livro de Imenes e Lellis (2002, p. 101).


2. Uma 5ª série tem 35 alunos. Imagine os alunos separados em 5 grupos iguais e diga quantos deles correspondem a:

a) $\frac{1}{5}$ do total;

b) $\frac{3}{5}$ do total;

c) $\frac{5}{5}$ do total.

FIGURA 5- Exercício 3: Relação parte-todo com elementos completos.

Exercícios onde se devem montar grupos de elementos e compará-los ao número total são muito importantes na construção do conceito geral de fração, pois nestes casos o aluno tem que deslocar sua noção de inteiro como um objeto único para um grupo de objetos. E as partes a serem consideradas já não são mais partes componentes do objeto, são sim objetos completos, que fazem parte do grupo como um inteiro.

4.1.2 Decimais

As relações de parte-todo já mencionadas no tópico anterior, unidas às características e à aplicabilidade de nosso sistema posicional decimal, possibilitam que frações também possam ser observadas como números decimais, acrescentando-os assim à reta onde já estavam presentes os números naturais.

A relação parte-todo é utilizada nesta ligação quando se utilizam aproximações decimais (frações com denominadores múltiplos de dez) para preencher uma área que a principio estava dividida num outro número de partes.

Por exemplo, para transformar a fração $\frac{1}{4}$ (como área sombreada de uma figura) em decimal utilizando-se da relação parte-todo primeiramente observa-se se o inteiro está totalmente preenchido, se sim quantas vezes, neste caso nenhuma. Então sabemos que a representação decimal de $\frac{1}{4}$ inicia por “0,”. Em seguida divide-se o inteiro em 10 partes congruentes e se observa quantas estão completamente preenchidas pela parte pintada, neste caso duas. Então se representa “0,2”. Após faz-se a divisão do inteiro por 100, e observa-se quantas partes estão sombreadas, que são 5. Assim $\frac{1}{4}$ é 0 partes inteiras, 2 partes completas quando se dividiu o inteiro em 10, e mais 5 partes de quando se dividiu o inteiro em 100; e sua representação decimal é 0,25. No caso de sobrar ainda alguma parte sombreada, dividir-se-ia o inteiro em 1000 partes, e se contaria quantas estavam completamente preenchidas. Este processo deve seguir até toda a área ser coberta por alguma fração com denominador potência de dez.

4.1.3 Coordenadas de pontos sobre a reta

De maneira geral, também é um tipo de representação do tipo parte-todo. Aqui, o espaço existente entre os números naturais é subdividido no número de partes determinado pelo denominador, e o numerador determina quantas desta partes serão tomadas a partir do ponto inicial de referência.

Esta representação mostra ao aluno mais uma forma de indicar um número racional: como parte de um todo, como um número, e agora como um ponto. Segundo Ciscar e García (1988), esta forma de representar frações traz algumas vantagens como a melhor visualização e interpretação das frações impróprias[4]; a visualização de que as frações são uma extensão dos números naturais, e preenchem lacunas entre estes números na reta numérica; e traz consigo o conceito de medida. No entanto, os autores ainda ressaltam que esta representação pode ser problemática aos alunos, quando estes têm de perceber que as frações solicitadas têm relação

[4] Frações impróprias são frações que são maiores que a unidade.

com a unidade e não com todo o segmento, mas este problema é facilmente solucionado quando o intervalo entre os números naturais já vem subdividido, o que de qualquer forma pode ser feito pelos alunos.

4.2 QUOCIENTE

Neste conceito sobre fração o que está sendo abordado não mais é tomar um inteiro, dividi-lo em partes iguais e tomar algumas elas. Agora a idéia de fração contempla a divisão de um número de elementos por outro. Para o aluno que está aprendendo a lidar com os diversos conceitos que podem ter os números racionais, as duas situações são muito distintas, apesar de terem o mesmo resultado.

Um aspecto importante neste conceito é a de equivalência quantitativa entre a fração e sua forma decimal.

4.2.1 Divisão

Nesta abordagem a roupagem dada às partes em que o inteiro é dividido e quantas são tomadas é diferente. Aqui é considerada uma quantia que deve ser dividida por outra. Como, por exemplo, dividir igualitariamente barras de chocolate entre crianças.

Ciscar e García (1988) citam que apenas um terço dos estudantes entre doze e treze anos consegue observar que a divisão entre dois inteiros nada mais é do que uma fração. Esta “desconexão” pode se dever ao fato de que os alunos já estão familiarizados com a noção parte-todo dadas às frações, e dividir um número por outro é algo muito diferente do conceito de fração visto até então.

Os autores destacam ainda que diante de problemas discretos e contínuos os alunos têm um melhor desempenho nos discretos. Entre dividir balas e repartir uma fita entre crianças, a divisão das balas ocorre facilmente, os alunos podem contar quantas unidades cada criança obteve, fazendo a distribuição de uma em uma unidade, e a partir disso apontar a fração relativa. Já no caso da fita, identificar a medida que cada criança recebeu necessita de um outro esquema, da operação aritmética de divisão do tamanho da fita pelo número de crianças.

4.2.2 Razão

Nesta abordagem as frações têm a função de comparar duas quantidades, de indicar a proporção existente entre elas. Neste caso não há um todo a ser dividido, e sim um par ordenado de números naturais que têm sua relação de grandeza determinada por uma razão de proporção, escrita com uma fração. Por exemplo, duas crianças A e B que têm alturas respectivamente 50 e 100 centímetros. A razão representante da altura da criança A em relação à B é $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, ou seja, A tem a metade da altura de B. Já a razão entre a altura da criança B em relação à A é $\frac{100}{50} = \frac{2}{1} = 2$, ou seja, B tem o dobro da altura de A.

Observe que é possível mudar o referencial, que antes era o inteiro subdividido, e por este motivo podemos obter dados relacionando tanto A com B, quanto B com A.

A fração neste contexto introduz a idéia da “Regra de Três”, que nada mais é do que uma “receita” para comparação entre razões. Aqui já é utilizada a idéia de incógnita, trabalhada na a 5ª série com equações de 1° grau simples. Por exemplo, se um carro percorre 80 quilômetros em uma hora, quantos quilômetros percorrerá em 3 horas? Esta questão traduz-se algebricamente ao seguinte: $\frac{80\ quil\hat{o}metros}{1\ hora} = \frac{x\ quil\hat{o}metros}{3\ horas}$, e x nesta situação vale 240. Em outras palavras, para se manter a proporção indicada pelo sinal de igualdade, o valor de x, o numerador, tem de sofrer o mesmo crescimento sofrido pelo denominador de uma fração para outra.

4.2.3 Probabilidade

De maneira geral o cálculo das probabilidades é um tema problemático tanto no ensino médio quanto no ensino superior, onde tipicamente não se estabelece relação alguma entre os casos de interesse e todos os possíveis com a fração que representa esta situação. E talvez seja por este motivo que pareça tão difícil entender como calcular a probabilidade de um evento acontecer.

Analisemos a seguinte situação: qual a probabilidade de no lançamento de um dado a face voltada para cima ser um número par?

Voltemos à idéia de parte-todo apresentada na primeira seção deste capítulo. Nosso inteiro neste caso é o dado, e suas divisões são suas faces. Então nosso inteiro está subdividido em 6 partes. Já temos o denominador da fração correspondente à probabilidade deste evento. Agora observemos o que o problema indica: que as faces voltadas para cima apresentam números pares. Quantos são os números pares entre 1 e 6? – Três. Esta é a parte que tomamos das partes em que dividimos o dado. Então, a probabilidade de ao lançar um dado, a face voltada para cima apresentar um número par é de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, ou seja, uma chance a cada duas jogadas.

4.2.4 Porcentagem

À relação de proporção existente entre um número e 100 chamamos de porcentagem, indicada pelo símbolo “%”. Por exemplo, 35% = $\frac{35}{100}$. Novamente a relação parte-todo se faz presente quando não tomamos a porcentagem apenas como um operador, mas como uma representação cheia de significado. O que significa, por exemplo, calcular 50% de 10? Ora, se 50% = $\frac{50}{100}$, isso significa que tomamos o número 10 como nosso inteiro, dividimo-lo em 100 partes, cada uma valendo 0,1. E então tomamos 50 destas partes, o que resulta 5. Logo 50% de 10 é 5.

4.3 OPERADORES

Concebendo a idéia de fração como algo que modifica uma situação, podemos tratar destes números também como operadores. Basta interpretarmos uma fração como o indicativo de uma multiplicação e, em seguida, uma divisão, ou primeiro a divisão e depois a multiplicação. Por exemplo, se fizermos atuar a fração $\frac{2}{3}$ sobre a quantidade 300, teremos 300 divididos por 3, que é 100, e este valor multiplicado por 2, que resulta 200.

Esta interpretação novamente coloca o número racional em paralelo aos números naturais, que podem operar naturalmente outros números.

4.4 CONSIDERAÇÕES

Quando tratamos de frações durante o ensino fundamental, partimos de uma destas abordagens, e ao longo do trabalho introduzimos outras. Espera-se que os alunos acompanhem e compreendam a versatilidade destes números, mas será que isso realmente acontece?

Segundo Ciscar e García (1988), esta capacidade de trasladar o conhecimento sobre frações a situações distintas não parece clara. Um aluno pode compreender muito bem a relação da utilização de números fracionários num certo contexto, mas isso não implica que identifique o uso desta "ferramenta" em outras situações. Desta forma, a organização do ensino de frações deve ser seqüenciada de forma interligada a fim de proporcionar aos estudantes a experiência com a maioria das interpretações de número racional, sem que a mudança na abordagem interfira nos conceitos já aprendidos.

Os autores citam ainda que, conforme os alunos vão se apropriando das novas abordagens dos números racionais, a dificuldade existente na transição de um conceito a outro tende a diminuir, e quando o trabalho já pode ser feito todo abstratamente já não há mais impedimentos conceituais que comprometam esta circulação por entre os diversos conceitos.

5 O MATERIAL MANIPULATIVO NO ENSINO-APRENDIZAGEM

5.1 HISTÓRICO

Segundo Zacharias (2007a), até o século XVI não existia o conceito de criança. Acreditava-se que aqueles indivíduos eram somente adultos pequenos, com todas as capacidades adultas já estabelecidas, apenas menos desenvolvidas. A educação viria, neste caso, para desenvolver estas capacidades, corrigir estas “falhas”. O ensino se dava de uma forma passiva, ou seja, o professor detinha o conhecimento e o transmitia aos seus alunos. Esta transmissão baseava-se na memorização de fatos, datas, fórmulas e regras. O uso de materiais concretos acontecia, quando muito, pelos professores como forma de demonstrar a validade de suas afirmações, auxiliando na memorização destas.

No século XVII, Jan Amos Komenský, conhecido como Comenius, introduziu uma nova perspectiva sobre a educação. Sob a máxima "ensinar tudo a todos", seria respeitada a condição infantil do aluno e seu respectivo estágio de desenvolvimento; o conhecimento deveria advir da experiência, da observação e da ação, pois as experiências promovidas pelos sentidos seriam internalizadas, e depois, interpretadas pela razão; haveria interdisciplinaridade e afetividade entre mestres e alunos. Em sua obra mais conhecida da área educacional, a Didactica Magna, Comenius deixa claro seu objetivo por uma reforma nas concepções sobre a educação e o conhecimento humano, de forma que se tornassem uma ciência única.

Jean Jacques Rousseau, já no século XVIII, tinha por ideal de educação a “pedagogia política”, que tratava tanto de aspectos educacionais quanto políticos. Enfatizava a união entre a natureza e a humanidade como elemento essencial à educação. Não que se devesse voltar a uma vida primitiva; o que Rousseau questionava eram as regras e convenções sociais. Para Rousseau as disposições primitivas do indivíduo como as emoções, os instintos e os sentidos eram mais confiáveis e dignos de atenção do que as regras forjadas pela sociedade. Rousseau ainda apresentou idéias que combatiam a prática habitual da época, sendo as crianças eram educadas de acordo com os interesses adultos. Segundo ele, na infância o indivíduo vê, sente e pensa o mundo de uma maneira muito peculiar, e neste momento a ação do educador deve respeitar a inocência e a ingenuidade não características da razão adulta. Assim, propôs que ao invés do excessivo uso da memória e da disciplina, fossem apresentados à criança jogos, brinquedos e instrumentos que faziam parte de seus interesses e vidas.

No século XIX, sob a perspectiva de Johann Heinrich Pestalozzi, a criança deveria "aprender fazendo". A educação deveria ser trabalhada entre professores e alunos juntos, e a criança também deveria ser ativa no seu processo de aprendizagem. Os estudos deveriam partir do já conhecido ao novo, do manipulável ao abstrato através de experimentações práticas, enfatizando a ação e a percepção dos objetos. Para Pestalozzi "a função principal do ensino é levar as crianças a desenvolver suas habilidades naturais e inatas.". (PESTALOZZI, 2008)

Através de experiências de ensino com alunos com necessidades educativas especiais, Maria Montessori já no início deste século observou que aqueles que a sociedade julgava incapazes de aprender respondiam muito bem às atividades manuais e ao incentivo à autonomia. Não muito tarde, passou a fazer também experiências com crianças ditas normais. Desenvolveu diversos materiais para o estudo da matemática, como o Material Dourado ou Multibase. Para Montessori, cada criança tem a capacidade de educar-se desde que lhe sejam dadas condições para tal. A partir desta experiência, Montessori baseou suas idéias na educação pelo sentido e na educação pelo movimento.

O uso de materiais manipulativos no Brasil ganhou força em 1970, motivado pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), nas discussões sobre o implante dos ideais do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. O GEEM oferecia cursos aos professores que divulgavam os trabalhos de diversos autores, entre eles Dienes.

O húngaro Zoltan Dienes era matemático e preocupava-se em reação ao ensino de matemática não só com os conteúdos que deveriam ser tratados, mas com a maneira com que deveriam ser tratados e as motivações que eram usadas para estes estudos. Dienes teve enfoque no trabalho com as séries iniciais. Desenvolveu e divulgou o uso de materiais manipulativos para o ensino de matemática, como os Blocos Lógicos, de sua autoria, e o Multibase de Montessori. A proposta metodológica de Dienes baseava-se nas idéias de Jean Piaget sobre o desenvolvimento lógico da criança, de como a criança aprende, e não simplesmente o que ela deve aprender. Dienes ainda classifica o aprendizado como natural e artificial. O natural é o aprendizado provido da necessidade, como chorar quando se tem fome. O artificial é o aprendizado que decorre de um ensino. Desses dois, Dienes ressalta que o aprendizado natural é muito mais efetivo, mas o ensino de matemática é realizado de maneira artificial, e por isso ocorrem as falhas no aprendizado.

5.2 POR QUE USAR?

Muitos são os trabalhos que relatam a importância do uso de materiais manipulativos e as grandes vantagens trazidas por estes, como nos estudos de Léa Fagundes, Zoltan Dienes, Maria Montessori e Nilza Bertoni. Podemos destacar que o uso dos materiais concretos, utilizados durante o ensino básico, na introdução de novos conceitos matemáticos, contribui para o ensino-aprendizagem, eles atraem a atenção dos alunos com a instigação à manipulação e investigação, colocando o estudante como agente na construção do seu conhecimento.

Um exemplo desta contribuição está relatado em “Na vida dez, na Escola zero” de Terezinha Carraher, David Carraher a Ana Lúcia Schliemann. Neste texto os autores relatam experiências realizadas com crianças que trabalham comercializando produtos nas ruas. Segundo os autores, essas crianças lidam muito bem com as operações aritméticas, pois utilizam-nas em suas vendas. Neste caso o material concreto é o dinheiro, e as operações que devem ser feitas com estes números fazem todo sentido naquele contexto. É observável a facilidade que feirantes e outros comerciantes, que lidam diretamente com dinheiro, têm em operar números mentalmente, o que se pode relacionar, em principio, a um contato estreito entre o material e seu manipulador.

No entanto, ainda há professores que são alheios a esta prática pedagógica. Segundo Fagundes (1977), apesar do grande avanço da ciência, da tecnologia e da psicologia, esses desenvolvimentos não chegaram ainda a alterar o ambiente de sala de aula, onde os alunos ainda são tratados uniformemente, devem se manter receptivos aos ensinamentos do professor, transmitidos a partir do quadro negro, giz e idéias interligadas logicamente, tal como se davam as práticas pedagógicas do início do século. Esses métodos não são suficientes para desenvolver plenamente o raciocínio dos alunos de modo que possam adquirir conhecimento. Os maus resultados na aprendizagem da matemática levam grande parte dos professores a acreditar que a lógica matemática é de uma complexidade capaz de ser compreendida apenas por poucos.

Segundo a autora, a insuficiência na formação psicológica destes professores, leva-os a crer que a utilização dos materiais não permite ao aluno desvincular-se deles posteriormente, e que a ação sobre objetos reduz o raciocínio do estudante a cópias fiéis do que manipula. A autora rebate afirmando que o uso do material concreto é importante e necessário durante as primeiras fazes do desenvolvimento. Para níveis superiores de raciocínio, quando o aluno é capaz de refletir sobre suas ações e abstrair seus resultados, a utilização do material não mais se faz necessária, e a desvinculação entre objeto e estudante acontece de maneira natural. “Soluções (...) envolvendo apenas raciocínio e uma boa conceituação (...) pareciam indicar que, em certa fase da aprendizagem, os alunos poderiam dispensar o material e pensar com autonomia.”. (BERTONI, 2004, p. 08).

Existe a questão relativa às escolas que não têm possibilidade de adquirir estes materiais para a utilização em sala. Para isso venho dizer que quando se trata de material manipulativo não se refere necessariamente aos materiais produzidos exclusivamente para este fim. Material concreto é todo o material que o aluno possa manipular, interagir e a partir disso intuir padrões e, por conseguinte, construir algum conhecimento proveniente desta ação. Portanto, materiais como o Material Dourado e o ábaco podem ser substituídos por tampinhas coloridas, conchinhas em tamanhos diferentes, palitos ou qualquer outro material disponível.

É importante ressaltar que quando um conteúdo já é conhecido a utilização de desenhos é bem vinda. No entanto, quando se inicia o trabalho com um novo tema, o apelo à mobilidade de peças concretas possibilita ao aluno uma construção, observação e avaliação de seu próprio trabalho de maneira natural e instantânea, ao passo que não é necessária a figura do professor como corretor, pois as peças permitem um julgamento simples: se deu certo é porque está certo, se não é porque há algo fora de lugar. Esta análise pode ser feita pelo próprio aluno no mesmo momento em que realiza a atividade possibilitando, concomitantemente, o aprendizado do novo tema e a análise e reflexão sobre os erros cometidos, o que é importantíssimo na construção de estratégias de raciocínio.

No que se refere ao trabalho com frações, existem muitos materiais manipulativos que possibilitam a apresentação deste novo tipo de número ao aluno. Estes materiais geralmente abordam os números racionais a partir da relação entre parte e todo. Como não poderia ser diferente, o inteiro é dividido em um certo número de peças de tamanhos iguais, que podem ser contadas e agrupadas para a formação do inteiro, classificadas de acordo com seu tamanho, ou agrupadas de modo que mesmo com tamanhos diferentes ainda formem o inteiro. O importante nesta prática é que ao contar, classificar e agrupar as peças, o aluno repete ações que já realizava sobre os números naturais com os quais já trabalhava.

> Esse era um ponto que considerávamos, e ainda consideramos, importante – conservar os modelos de referência, por meio do que os alunos percebem que as coleções quantificáveis podem ser constituídas de objetos (unidades) inteiros e também de parte deles. Ou seja, ficava garantida a idéia do acréscimo de outros números aos números naturais. (BERTONI, 2004, p. 05).

Desta forma, a apresentação dos números racionais (positivos) não é feita de um modo totalmente distinto a dos números naturais, e com isso, a quantidade relativa a uma parte de um certo todo é vista pela criança como mais um número como os que ela já conhecia, e não somente uma representação.

6 O FRAC-SOMA 235

Este material é da autoria de Roberto Ribeiro Baldino, e busca trabalhar o conceito e operações com frações. Consiste em barras de mesmo tamanho, 60 centímetros, que são divididas em peças congruentes, com divisores múltiplos de 2, 3 e 5. Então no jogo completo temos as seguintes peças:

- 1 barra branca com 60 centímetros, a unidade;
- 2 peças vermelhas de tamanho 30 cm (a unidade em duas partes);
- 3 peças amarelas com 20 cm (a unidade em 3 partes);
- 4 peças vermelhas com 15 cm (a unidade em 4 partes);
- 5 peças azuis com 12 cm (a unidade dividida em 5);
- 6 peças laranja com 10 cm (a unidade em 6 partes);
- 8 peças vermelhas com 7,5 cm;
- 9 peças amarelas com aproximadamente 6,67 cm;
- 10 peças roxas com 6 cm;
- 12 peças laranja com 5 cm;
- 15 peças verdes com 4 cm;
- 16 peças vermelhas com 3,75 cm;
- 18 peças laranja com aproximadamente 3,33 cm;
- 20 peças roxas com 3 cm;
- 24 peças laranja com 2,5 cm;
- 25 peças azuis com 2,4 cm;
- 27 peças amarelas com aproximadamente 2,22 cm;
- 30 peças pretas com 2 cm cada.

Totalizando, coincidentemente, 235 peças. Observe que 235 faz parte do nome do material, indicando os números 2, 3 e 5, cujos divisores de 60 são múltiplos, e não a quantidade de peças envolvidas.

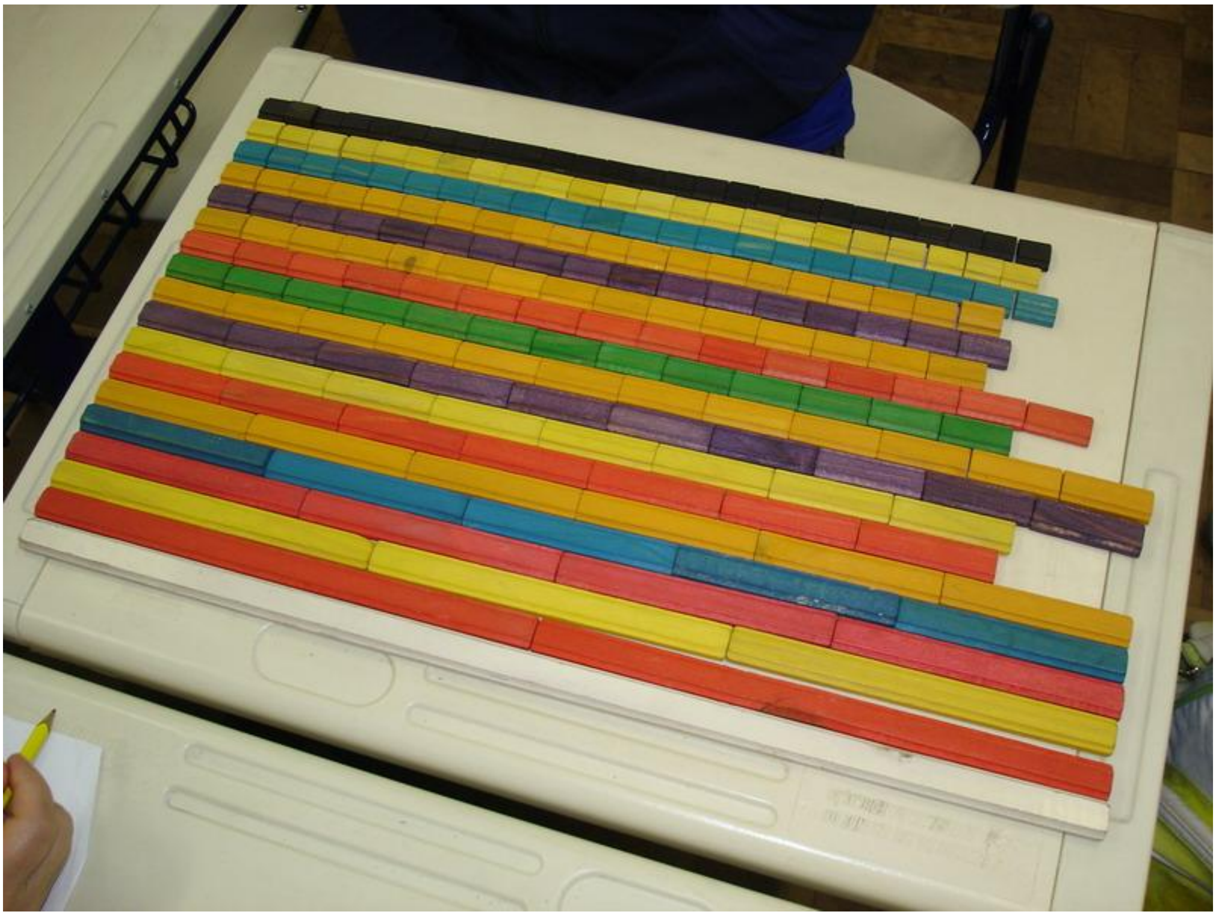


FIGURA 6- FRAC-SOMA 235.[5]

Estas peças são coloridas a seguinte maneira: a barra inteira, a unidade, é da cor branca. A primeira peça com denominador múltiplo de 2, a $\frac{1}{2}$, é da cor vermelha. A primeira barra com denominador múltiplo de 3, a $\frac{1}{3}$ é da cor amarela, e a primeira barra com denominador múltiplo de 5, a $\frac{1}{5}$, é da cor azul. Observe que as cores relativas aos denominadores primos também são cores primas. Esta é uma observação importante, pois os denominadores compostos tem cores referentes às misturas das cores de seus fatores primos: as peças $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$ são todas vermelhas, visto que a fatoração de 4, 8 e 16 é respectivamente 2^2, 2^3 e 2^4.Como a fatoração destes números se dá apenas com fatores 2, estas peças também são vermelhas. Analogamente para as peças $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{27}$, cuja fatoração dos denominadores baseia-se também apenas em um fator, o 3. Desta forma, todas estas peças são da cor amarela. A peça $\frac{1}{25}$, como também tem denominador com fatoração em primos apenas com o número 5, também é azul. As demais peças têm sua cor determinada pela cor dos fatores primos de sua

[5] O jogo apresentado na figura não está completo, esta imagem vem apenas ilustrar as relações citadas.

fatoração. Por exemplo, a peça $\frac{1}{6}$, em que 6 resulta da multiplicação de 2 por 3, é constituída das cores vermelha, relativa ao fator 2, e amarela, relativa ao fator 3. Logo a peça $\frac{1}{6}$ é a mistura destas duas cores, laranja.

A peça que tem no denominador todos os números primos envolvidos no material (2, 3 e 5), e representa $\frac{1}{30}$ da unidade, pela propriedade das cores teria de ter sua cor determinada pela mistura das cores vermelha, amarela e azul. Mas como a mistura destas cores não é muito agradável, ainda mais num material voltado a crianças, esta cor foi substituída pelo preto. Assim, das peças do material, a única que não obedece à relação das cores é a peça $\frac{1}{30}$.

Então observando a cor de uma peça é possível supor em quantas partes ela foi dividida: se a peça é roxa, a mistura de vermelho e azul, então é porque o denominador da fração representante desta peça tem alguma potência dos números 2 e 5 em sua fatoração única em primos. Essa relação com as cores é muito importante, pois faz uma ligação a saberes anteriores dos estudantes, estimulando-os a aplicar este conhecimento diante desta nova perspectiva, agora na fatoração única de números.

A barra unitária tem 60 cm não só porque o número 60 tem um grande número de divisores, mas também porque as classes escolares têm esta largura ou mais, e desta forma, na utilização do material as peças podem ficar inteiramente sobre as classes, facilitando sua manipulação.

7 A PRÁTICA DO PROJETO

7.1 IDEALIZAÇÃO

A pesquisa foi desenvolvida com alunos de 5ª série ou 6° ano do ensino básico, estudantes do Instituto Estadual Rio Branco (RB) durante 20 horas-aula distribuídas em cinco encontros de duas horas aula cada um.

O motivo de trabalhar com alunos de 5ª série é principalmente o fato de que estes alunos ainda não haviam trabalhado com números racionais, e desta maneira, minha pesquisa seria muito mais realista no que se refere à utilização de materiais na introdução de novos conceitos matemáticos, neste caso as frações. Os alunos que já tivessem estudado os algoritmos de soma e subtração de frações provavelmente não gostariam de lidar com peças, pois em outros trabalhos utilizando materiais com os alunos já conhecendo o conteúdo abordado, estes consideraram que aquela prática era um retrocesso em seus raciocínios; a manipulação era infantil e desnecessária.

Nas três turmas de 5ª série em que realizei a pesquisa, todas estavam iniciando o estudo das frações em sala de aula. Assim, o trabalho da pesquisa foi ao encontro do que estava sendo discutido em horário regular de aula, servindo ainda como complemento a esses estudos.

7.2 ASSESSORIAS DE MATEMÁTICA

Os alunos presentes na pesquisa são estudantes que participam das Assessorias de Matemática ministradas nesta Escola pela Ação de Extensão Assessorias de Matemática, Interação Virtual e Robótica para a Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática.

As Assessorias para o ensino fundamental no RB surgiram da parceria entre a escola e o Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (IM-UFRGS) na busca de uma melhoria no rendimento dos alunos nesta disciplina. Estes alunos são indicados por seus professores a participarem das Assessorias, pois estes alunos aparentam necessitar de mais atenção para poderem aprender matemática.

As aulas são planejadas e ministradas por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, os quais são convidados a participar como voluntários. Nas Assessorias buscamos tratar dos temas que os alunos estão estudando em aula regular, buscando ainda o saneamento de dúvidas relativas a outros conteúdos.

Este trabalho já dura um ano e durante este tempo foram atendidas turmas de 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries, totalizando aproximadamente 200 alunos. Os resultados deste projeto em relação aos alunos são muito satisfatórios, visto o bom desempenho apresentado pelos estudantes que participaram das aulas de Assessoria.

Na prática deste projeto tive ainda a ajuda de outros quatro licenciandos que trabalham nessas Assessorias com os alunos de 5ª série. Estes colegas me auxiliaram na assistência aos estudantes quando esses manifestavam alguma dúvida, mas nunca conduziram efetivamente as aulas.

7.3 DESENVOLVIMENTO

7.3.1 Construção do Material (dia 02/10/09)

Nesta aula iniciamos a construção das peças do material. Optei pela estratégia de os alunos construírem seu material por alguns fatores: para a construção do jogo os alunos precisarão medir, de modo que possam dividir a barra inteira em partes iguais, ou seja, já na construção das peças que serão utilizadas os alunos estarão trabalhando com conceitos de frações de modo muito sutil. Além disso, quando produzem o próprio material, os alunos acabam desenvolvendo certa afeição à sua utilização por poderem fazer uso de algo que eles próprios construíram, ou seja, sentem-se capazes de também produzir matemática. E, ainda, porque com a confecção das peças fica claro que a utilização de materiais no ensino de matemática não está restrita aos jogos industrializados - discurso comum entre professores que não possuem disponíveis estes jogos -, pois como já evidenciado, justamente a indisponibilidade deste material impulsionou sua construção.

Para a construção do material distribui aos grupos de trabalho tiras coloridas com as mesmas cores indicadas pelo FRAC-SOMA 235. Estas tiras estavam inteiras, sem nenhuma marcação ou recorte. Cabe às duplas decidir onde marcar e cortar suas tiras a fim de obter o número de peças que solicitei.

Iniciei a aula me apresentando aos alunos. Depois disso descrevi como seria nosso trabalho: “a aula de hoje é o início de um trabalho que durará 5 encontros”. Procurei não revelar o assunto sobre o qual iríamos tratar, pois o objetivo deste trabalho é que o aluno consiga chegar às próprias conclusões através do uso do material que estávamos produzindo.

Pedi que os alunos montassem duplas de trabalho, para que cada aluno tivesse um colega para ajudá-lo, e para que durante o processo de medição, pudessem discutir sobre o que estavam fazendo, e qual a melhor maneira de executar cada tarefa.

Distribui as caixas com as tiras coloridas, as quais deveriam ser divididas pelos alunos. Com cada caixa os alunos receberam também duas réguas de 30 cm fornecidas pela escola.

Iniciamos pela tira branca. Cada dupla tirou da sua caixa a tira branca. Disse-lhes que com aquela tira não faríamos nada, ela seria a nossa tira “original”. Agora partimos para uma das tiras vermelhas. Pedi aos alunos que dividissem aquela tira em duas partes iguais. Alguns alunos recorreram às réguas, mas muitos deles simplesmente dobraram-na ao meio, e logo fizeram a marca onde a tira deveria ser cortada.

FIGURA 7- Divisão das tiras.

Partimos para uma tira amarela. Os alunos logo perguntaram se aquela nós dividiríamos em 3 partes. A resposta foi “sim”, e logo alguns alunos tentaram dobrar a tira assim como haviam feito anteriormente, sem obter sucesso. Observando os colegas que estavam usando régua, adotaram a idéia. Alguns alunos que dobraram a primeira peça nem tentaram fazê-lo na divisão por 3, logo perceberam que era melhor usar a régua.

Uma nova peça vermelha, e os alunos dividiram-na em 4 partes. Uma peça azul, dividiram-na em 5. Agora, os alunos já usavam apenas as réguas para fazer as divisões.

Conforme os alunos dividiam as peças, os professores - eu e o grupo que já trabalhava com a turma - cortavam-nas.

Os alunos não conseguiram cortar todas as peças necessárias do material, mas como já haviam feito algumas, percebi que já haviam compreendido o processo, e o corte das demais peças seria apenas trabalho braçal.

Antes do fim da aula pedi que os alunos respondessem individualmente a seguinte questão: “O que estamos fazendo com as tiras?”. A maior parte dos alunos fez referência à divisão das tiras em partes iguais: *“Estamos contando em várias partes iguais.”, “Estamos dividindo as tiras para dividirmos e aprendermos sobre divisão!!”.*

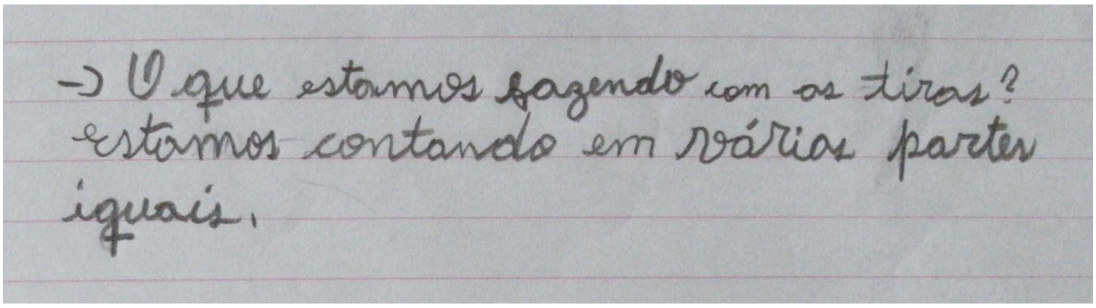


FIGURA 8- Resposta 1: O que estamos fazendo com as tiras?

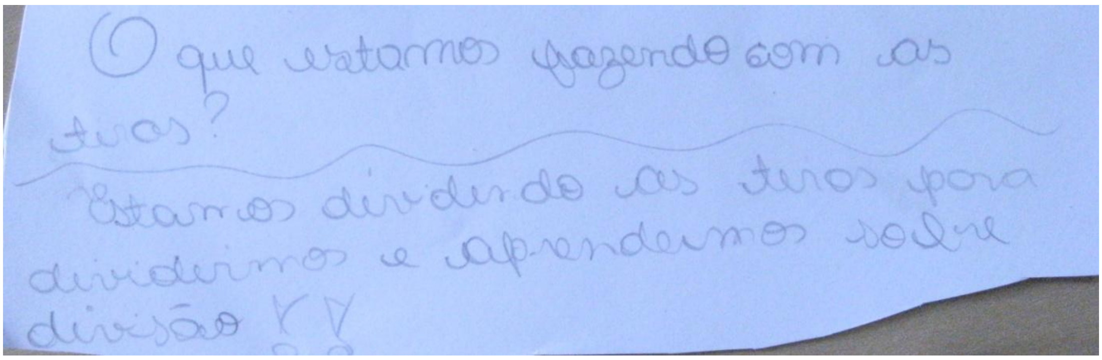


FIGURA 9- Resposta 2: O que estamos fazendo com as tiras?

Alguns alunos já fizeram referência ao cálculo do mínimo múltiplo comum: *"Estamos repartindo, dividindo o possível. É meio parecido com m.m.c..".*

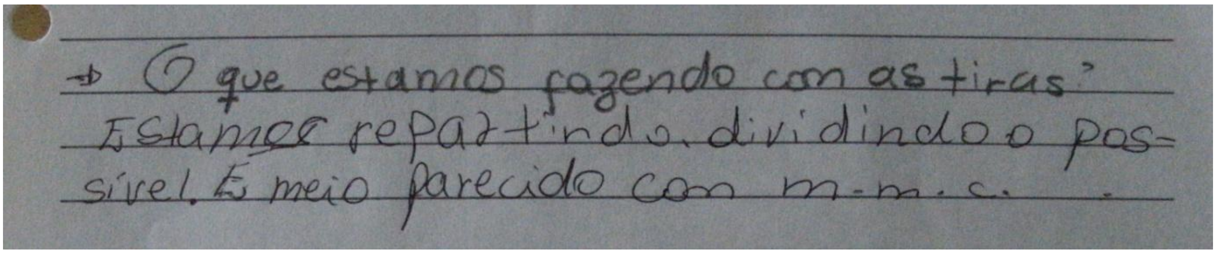

O que estamos fazendo com as tiras?
Estamos repartindo, dividindo o possível. É meio parecido com m.m.c..

FIGURA 10- Resposta 3: O que estamos fazendo com as tiras?

Isso mostra que dentre as turmas participantes, há uma que já iniciou o trabalho com operações, ao passo que a pouca referência entre os demais estudantes sobre os conceitos específicos de frações declara o recente início deste trabalho. Dois alunos puderam perceber a relação inversa existente entre o divisor solicitado e o tamanho das peças: *"Estamos dividindo e conforme cortamos elas ficam menores e em maior número."*.

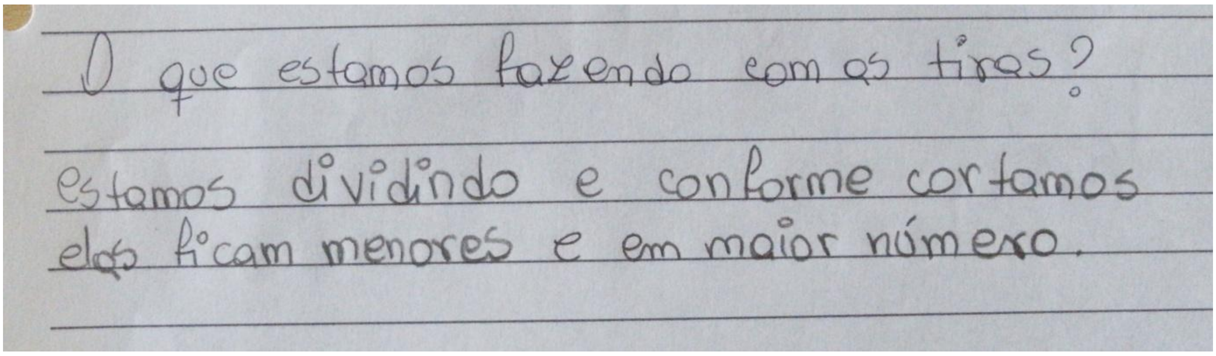

O que estamos fazendo com as tiras?
estamos dividindo e conforme cortamos elas ficam menores e em maior número.

FIGURA 11- Resposta 4: O que estamos fazendo com as tiras?

Isso porque as tiras eram todas de mesmo tamanho, então conforme se aumentava o número de peças, era necessário que seus tamanhos diminuíssem. Essa é uma relação muito importante na concepção de divisão e, por conseguinte, de fração. Se temos uma quantidade constante, quanto mais a dividimos, menores serão as quantias de cada parte.

Sendo assim, posso dizer que a intenção desta primeira aula foi atingida. Os alunos perceberam que estávamos dividindo as peças em partes iguais, em diferentes números, e que quanto mais dividíamos, menores eram as peças devido ao fato de que as tiras eram todas de mesmo tamanho: a unidade. Nas próximas aulas estas conclusões seriam muito importantes para que os alunos pudessem compreender as relações entre numerador e denominador de uma fração.

7.3.2 Conceito de fração e equivalência entre frações (dia 09/10/09)

Concluída com sucesso a primeira parte da Pesquisa, com os alunos percebendo que dividimos peças de mesmo tamanho em partes iguais, demos início então ao estudo do conceito do que representa uma fração. Depois de compreendida esta idéia, partimos ao estudo da relação existente entre duas frações que são equivalentes, e o que isso significa. Para tanto redistribui os materiais iniciados pelos alunos, mas concluídos por mim, pois acreditei não ser mais necessário o trabalho de corte das peças, pois os alunos já haviam compreendido o processo de divisão das tiras.

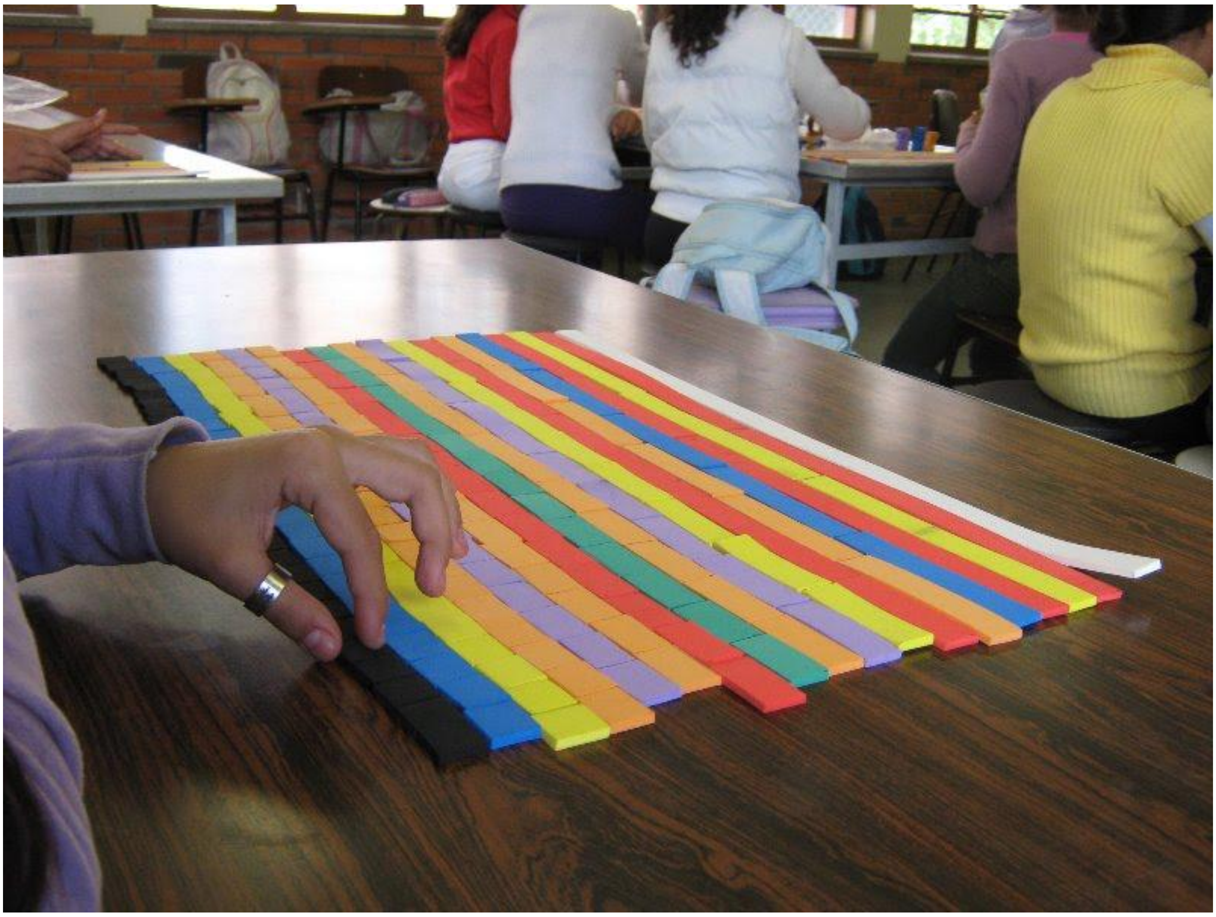


FIGURA 12- Reprodução do FRAC-SOMA 235.

Professora: - Vocês lembram o que fizemos na aula passada?

Alunos: - Cortamos tiras coloridas de mesmo tamanho em várias partes iguais, e cada tira foi dividida num número diferente de partes.

P: - O que esta peça (mostrando uma peça $\frac{1}{3}$) significa em relação a tira de que foi cortada?

As: - É uma parte da tira.

P: - Como podemos fazer para descobrir quanto da tira ela representa?

A: - Podemos usar uma régua e medir o tamanho deste pedaço.

P: - Mas isso não resolve o nosso problema. Dizer apenas quanto esta peça mede não nos diz nada sobre a relação dela com o inteiro.

A: - Então medimos também a peça branca.

P: - Lembrem que a peça branca representa o nosso inteiro, o número 1, então se a medirmos certamente teremos um valor diferente de 1, e isso agora nos complica um pouco.

Aqui é importante observar uma das propriedades importantes das frações: a unidade não necessariamente tem o tamanho um. A unidade nas frações é objeto completo que será repartido, onde a medida pode ser descoberta se utilizarmos as frações mais uma vez, agora como operadores sobre o objeto completo, a unidade.

A: - As tiras tinham o mesmo tamanho, não tinham? Nós apenas as cortamos em números diferentes de peças, mas se juntarmos todas as peças voltamos a ter a tira do mesmo tamanho de antes. Então a gente monta a tira de novo, e conta em quantas peças ela foi dividida. Aí se eu pegar uma parte eu vou ter 1 parte das tantas em que eu cortei.

Alguns alunos não compreenderam o raciocínio do colega, então pedi para que ele explicasse novamente para toda a turma. O aluno explicou, alguns colegas compreenderam, e apoiaram a idéia. Para os que não compreenderam, expliquei novamente o que o colega havia sugerido, usando as três peças $\frac{1}{3}$

P: - Estas três peças aqui juntas formam uma tira do mesmo tamanho que ela era antes de a gente a recortar, certo? Então uma só parte dessas 3 é quanto em relação à tira completa?

As: - Ahhh, agora entendi. Esta é uma das três partes em que a tira foi dividida.

Perguntei aos alunos se não parecia complicada aquela maneira de dizer que tamanho a peça tinha: "uma das tantas que eu precisava". Alguns alunos concordaram, outros acharam que aquela maneira estava bem, pois caracterizava a relação entre as duas peças. Disse então que em matemática existe uma maneira de escrever aquilo que acabávamos de fazer.

P: - Quantas peças eu tenho? (Com uma peça $\frac{1}{3}$ na mão)

As: - Uma.

Escrevi o número 1 no quadro.

P: - E quantas desta são necessárias para formarmos a peça inteira?

As: - Três.

Tracei uma barra sob o número 1 e abaixo o número 3.

P: - Isto que está escrito aqui no quadro significa que esta pecinha aqui (mostrando a peça amarela) é uma das partes em que a tira toda foi dividida. Lemos isto como um terço. Então dizemos que esta pecinha é um terço da peça inteira.

Fizemos mais um exemplo com a peça azul, a $\frac{1}{5}$. Os alunos verificaram quantas daquelas peças eram necessárias para completar a peça branca: 5. Como eu segurava na mão apenas uma das peças azuis, tínhamos o seguinte: uma das cinco peças que precisávamos para completar a peça branca, logo aquela peça azul representava um quinto da peça branca, nosso inteiro.

P: - E como escreveríamos se eu pegasse mais de uma peça?

As: - Se tu pegares duas, ai teremos duas das peças de que precisamos para completar a inteira.

Visto que os alunos haviam dominado tanto a idéia do significado de fração, quanto a representação matemática destas quantidades, passamos ao próximo desafio: pedi que as duplas de alunos que estavam na mesma mesa se juntassem e montassem a fração $\frac{4}{2}$. Alguns alunos apresentavam alguma confusão sobre a organização das peças: se eram 4 peças das quais precisávamos duas para completar a branca, ou se eram 2 peças das que precisávamos 4. Retomei o exercício que acabáramos de fazer, sobre a peça amarela que representava $\frac{1}{3}$. Novamente peguei esta peça, e perguntei ao aluno quantas peças eu tinha na mão. O aluno respondeu uma. Escrevi no quadro o número 1. Então perguntei quantas precisávamos para completar a peça branca. O aluno respondeu olhando o material: “três”. Então abaixo do 1 que tinha escrito no quadro, risquei uma traço, e abaixo escrevi o número 3. Interpretei, para a conclusão: isso significa que tomamos uma peça (apontando o número 1 no numerador) das 3 que precisávamos (apontando o número 3 no denominador).

Passamos agora para o exercício que havia sido proposto: como montar a fração $\frac{4}{2}$? Depois da explicação, o aluno logo concluiu que precisávamos de 4 peças das duas que formam a peça branca. Essa peça era a vermelha maior. Com a dupla do lado montaram a fração, assim como os outros colegas.

P: - Quanto esta fração que vocês montaram representa da peça branca?

Os alunos precisaram de duas barras brancas para completar o tamanho de $\frac{4}{2}$, e logo responderam que aquela fração tinha o tamanho de duas barras brancas.

P: - Mas quanto vale a nossa barra branca?

As: - Vale 1.

P: - Então se duas barras brancas completam o tamanho de $\frac{4}{2}$, quanto vale esta fração em função das barras brancas?

As: - Dois[6].

Escrevi no quadro então $\frac{4}{2}$ =2. Perguntei então aos alunos qual era o resultado da divisão de 4 por 2. Ao lado da fração $\frac{4}{2}$ escrevi 4:2=. Os alunos responderam que o resultado era 2. Então coloquei a resposta 4:2=2.

Agora pedi que os alunos montassem com as peças a fração $\frac{6}{3}$. Desta vez os alunos não apresentaram problema algum, e em pouco tempo as bancadas já estavam com as peças

[6] Aqui o número dois é citado pelo aluno como o tamanho fornecido por duas barras unidade juntas.

organizadas. Perguntei então quantas peças brancas aquela nova fração valia. Os alunos logo posicionaram as peças brancas sobre as 6 peças amarelas, e logo concluíram que $\frac{6}{3}$ tinha o mesmo tamanho que duas peças brancas.

P: - Então qual o valor desta nova fração em peças brancas?

As: - Dois também.

Escrevi no quadro abaixo do exercício anterior $\frac{6}{3}$ =2. Perguntei aos alunos quanto valia 6:3. Os alunos responderam 2. Então escrevi 6:3=2 ao lado da fração $\frac{6}{3}$.

Um dos alunos percebeu que o número de peças brancas que equivaliam às frações que havíamos montado era exatamente o resultado da divisão do número de cima pelo de baixo. Perguntei então aos alunos o que poderíamos concluir com este fato. Os alunos responderam que as duas contas dão o mesmo resultado.

P: - Mas estas contas são diferentes? $\frac{4}{2}$ é a mesma conta que 4:2, e $\frac{6}{3}$ é a mesma conta que 6:3?

A: Sim, temos os mesmos números e os mesmos resultados, então a conta só pode ser a mesma.

Confirmei que realmente as contas eram as mesmas, representadas apenas de maneiras distintas. Ou seja, para sabermos quanto de uma peça branca uma fração equivale, basta calcularmos a divisão indicada.

P: - Então quanto vale a fração $\frac{4}{2}$?

As:- Vale 2.

P: - E quanto vale a fração $\frac{6}{3}$?

As: - Vale 2.

P: - Mas como é possível que duas frações diferentes tenham o mesmo resultado?

Os alunos ficaram pensativos, mas ressaltavam que os resultados estavam corretos. Um dos alunos então observou que em $\frac{6}{3}$, 6 é o dobro de 3, assim como em $\frac{4}{2}$, mas não pareceu muito confiante na relação existente entre sua conclusão e o resultado daquelas frações, tanto que me perguntou se aquilo tinha alguma coisa “a ver” com a resposta que estávamos buscando. Respondi que sim, que tinha “tudo a ver”. Retomei os exemplos anteriores: suponha que tu tenhas três amigos e que tenhas o dobro deste número em balas. Quantas balas tu terás? Os alunos responderam que eu teria 6 balas. Então quantas balas cada amigo receberia? Os alunos responderam que cada amigo receberia duas balas. Fizemos o mesmo exercício para 2 e para 4 amigos. Então perguntei aos alunos como era possível que mesmo eu tendo um numero de amigos diferentes, eles sempre receberão o mesmo número de balas. Um dos alunos então percebeu que quando eu altero o número de amigos eu também altero o número de balas, que é sempre o dobro do número de amigos, por isso, cada um sempre recebe duas.

Com as frações $\frac{6}{3}, \frac{4}{2}$ e $\frac{8}{4}$ escritas no quadro, coloquei um sinal de igual entre elas, dizendo então que mesmo escritas de maneiras diferentes aquelas frações representavam a mesma quantidade. Por isso, nós as chamamos de frações equivalentes, pois os valores que elas representam são iguais.

A: - São só essas as frações equivalentes?

A: - Não. Se tu tivesses 8 amigos e 16 balas, cada amigo também ganharia 2 balas.

Escrevi no quadro ao lado das demais frações, a indicada pelo colega: $\frac{16}{8}$.

Pedi que os alunos, utilizando o material, me dissessem quais frações tínhamos equivalentes à $\frac{1}{2}$. Como tínhamos feito anteriormente, para descobrir frações equivalentes precisamos encontrar grupos de peças diferentes, mas que completem a mesma medida. Os alunos iniciaram a tarefa, e na medida em que iam encontrando uma nova fração iam me ditando, e eu escrevia no quadro, sempre com um sinal de igualdade entre elas.

FIGURA 13- Equivalência entre frações.

A: - Então, para acharmos frações equivalentes é só multiplicar “em cima e embaixo” pelo mesmo número.

P: - Como tu chegaste a esta conclusão?

A: - É só olhar para as frações escritas no quadro, sempre que eu mexo no número de “baixo” eu mexo também no número “de cima”, e que quando eu mexo, a nova fração é sempre o anterior multiplicada “em cima e embaixo” por 2 ou 3.

Disse que realmente seu raciocínio estava correto, e que o motivo de multiplicarmos numerador e denominador era que se eu quero que meus amigos continuem ganhando o mesmo número de balas, cada vez que eu dobro o número de amigos, o denominador, tenho também que dobrar o número de balas, o numerador. Se eu resolver triplicar o número de amigos, tenho também que triplicar o número de balas, e assim por diante, para qualquer número.

Neste momento os alunos passaram então a me ditar muitas frações equivalentes utilizando-se da idéia do colega. Algumas destas frações nem pertenciam ao material, como

$\frac{7}{14}$, o que mostrou que agora os alunos não utilizavam mais o material para responder, pois já haviam criado uma regra de construção para frações equivalentes.

Ao final da aula, perguntei aos alunos sobre o que era uma fração, e o que eram frações equivalentes. As respostas centraram-se na idéia de que fração é parte em relação a um todo, e que frações equivalentes são frações que estabelecem uma relação através de um número: *"Fração é o pedaço de um inteiro."*, *"*(frações equivalentes) *É a metade, terço e por ai vai... É a conta relativa à outra."*.

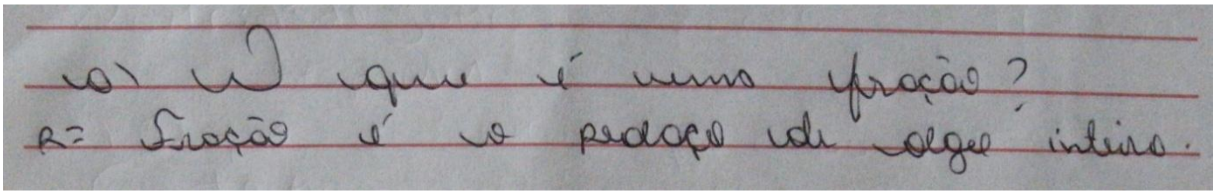


FIGURA 14- Resposta 5: O que é uma fração?

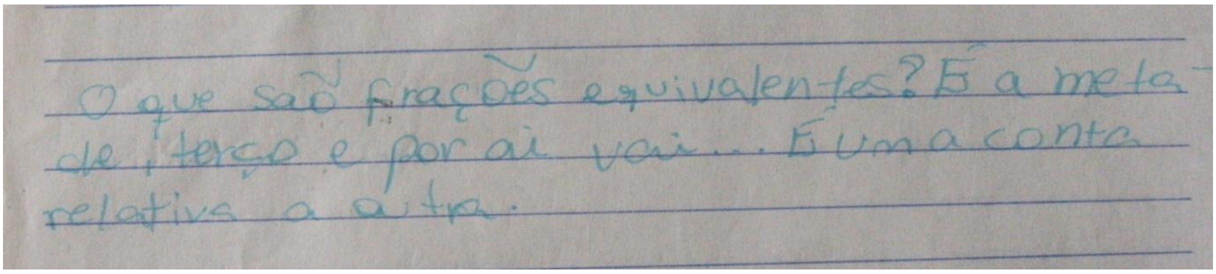


FIGURA 15- Resposta 6: O que são frações equivalentes?

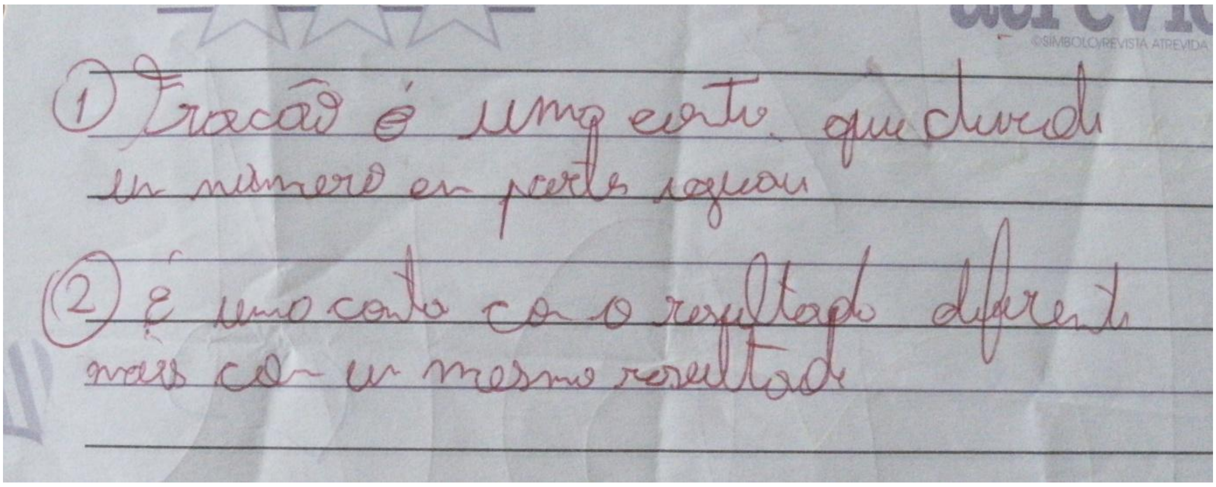


FIGURA 16- Resposta 7: O que é uma fração? O que são frações equivalentes?

Aqui, podemos observar, apesar da incoerência na escrita do aluno, que ele percebeu que nas frações equivalentes apesar de serem escritas de maneiras diferentes, o valor quantitativo permanece o mesmo.

Estas respostas mostram que a idéia de trabalhar frações como parte de um todo, adotada como estratégia de ensino, foi alcançada. Os comentários feitos pelos alunos durante as aulas geralmente faziam referência a quantas partes o inteiro era dividido, e quantas destas partes eram tomadas, principalmente quando precisavam decidir o “nome” de alguma das peças do jogo. Por exemplo, quando encontravam algum grupo de peças com as quais era possível completar uma fração na busca de uma equivalente, os alunos completavam a barra branca com aquelas peças, observavam quantas completavam a unidade, e quantas foram necessárias para completar a fração equivalente.

7.3.3 Operações com frações: adição e subtração (dia 16/10/09)

A intenção desta aula era trabalhar com a idéia de adição e subtração de frações. Isso, pois observei durante minha experiência como docente que grande parte dos alunos não compreende o motivo pelo qual devemos ter denominadores iguais para podermos efetuar esse cálculo.

Iniciei a aula relembrando o que fizemos na aula anterior, quando conseguíamos determinar o tamanho da união de peças iguais. Por exemplo, para montarmos a fração $\frac{4}{2}$ colocamos lado a lado 4 peças de tamanho $\frac{1}{2}$.

A nova questão era determinar o quanto mede a união de peças com tamanho diferentes. Iniciei com o seguinte problema: tomei uma peça de tamanho $\frac{1}{2}$ e uma de tamanho $\frac{1}{3}$. Colocando-as lado a lado questionei o quanto aquele tamanho representava em relação à peça branca. Os alunos, num primeiro momento, não responderam a minha pergunta. Então resolvemos um exercício com conceitos da aula anterior para que os alunos tentassem estabelecer uma regra para a soma de frações.

P: - Quanto vale esta peça? (com uma peça $\frac{1}{2}$ na mão)

As: - Vale $\frac{1}{2}$.

Escrevi no quadro a fração $\frac{1}{2}$.

P: - E esta aqui, quanto vale? (com outra peça $\frac{1}{2}$ na mão)

As: - $\frac{1}{2}$ também. A peça é igual.

P: - Se eu juntar as duas, quanto tenho?

As: - Duas peças das duas de que precisamos para completar a peça branca, então é $\frac{2}{2}$.

A: - Ou 1, porque é o mesmo tamanho da branca.

Escrevi no quadro $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Voltamos ao nosso problema das frações de denominadores diferentes. Novamente peguei as peças $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e colocando uma ao lado da outra perguntei quanto valia então aquele tamanho.

A: - $\frac{2}{5}$.

P: Por quê? Como tu fizeste este cálculo?

A: - É só somar os números "de cima" com os "de cima" e os "de baixo" com os "de baixo", O que é muito freqüente entre os estudantes.

Retornei então ao exemplo feito no quadro.

P: - Como fizemos esta conta aqui?

A: - Somamos os números "de cima".

P: - E os "de baixo"?

A: - São iguais, então a gente não mexe.

P: - Então porque agora somamos, se antes não fazíamos assim?

A: - Não sei. Acho que então não tem como somar.

P: - Mas estas peças tem um tamanho, não tem?

A: - Sim. É uma parte da peça inteira.

P: - E será que não existe nenhuma maneira de descobrirmos o tamanho de duas peças só porque ela tem tamanhos diferentes?

A: - Acho que sim.

Os alunos passaram a discutir nas duplas como solucionar aquele problema utilizando as peças do jogo. Depois de algum tempo de discussão entre eles, sem a minha interferência, retomei nosso problema.

P: - Afinal, o que estamos tentando fazer mesmo?

A: - Precisamos somar duas frações que não têm os mesmos denominadores.

P: - Mas por que precisamos ter os mesmos denominadores?

Os alunos ficaram pensativos, e não obtive resposta. Tomei duas peças de mesmo tamanho e perguntei quanto valia o tamanho das duas juntas. Os alunos responderam que valia dois, e partiram para descobrir que parte do todo aquela peça representava, para poderem me dizer de “alguma coisa”. Antes que os alunos pudessem organizar as peças, tomei mais uma peça igual e perguntei quanto valia aquela nova fração que eu havia montado. Os alunos responderam que valia três de “alguma coisa”, e continuaram tentando descobrir o denominador. Mais uma peça igual, e perguntei quanto valia agora a nova fração. Os alunos responderam quatro da “mesma coisa”.

P: - Como vocês conseguem me dizer, mesmo sem saber o denominador desta fração, qual o seu numerador?

A: - É porque estas peças são iguais, então é só contar.

P: - E por que no nosso problema de somar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ não podemos dizer que temoss duas peças de “alguma coisa”?

A: - É porque não temos peças iguais, então não podemos só contar.

P: - Se tivessem o mesmo tamanho nós conseguiríamos somar?

A: - Sim.

P: - E será que não há um jeito de deixarmos as peças com o mesmo tamanho?

A: - Equivalentes! Para deixarmos com o mesmo tamanho podemos achar uma equivalente, e ai podemos contar.

Alguns alunos logo compreenderam a proposta e partiram em busca de peças que completassem o mesmo tamanho das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ juntas.

FIGURA 17- Soma de frações com denominadores diferentes.

Outros alunos não entenderam por que aquilo solucionaria nosso problema. Lembrei estes alunos sobre o que tínhamos falado sobre frações equivalentes na aula anterior: um tamanho pode ser representado por diversas frações diferentes. Para descobrirmos que fração era equivalente à outra, preenchíamo-la com outras peças iguais que juntas formavam o mesmo tamanho. O que estamos fazendo aqui é a mesma coisa. Temos um tamanho, e estamos tentando descobrir um outro conjunto de peças que equivalha ao anterior para que possamos trocá-las, só que como na aula passada, precisamos que as peças que completarão o tamanho sejam iguais para que possamos contá-las. Uma das alunas então concluiu que essa fração equivalente a ser encontrada correspondia ao resultado daquela conta, porque representaria o tamanho das peças $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ juntas, de uma forma diferente.

Neste momento alguns alunos já forneciam respostas para o problema de quanto valia $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Surgiram as respostas $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{12}$ e $\frac{15}{18}$.

P: - Mas qual destas está correta?

A: - Todas. Elas são equivalentes!

Fizemos mais alguns exercícios de adição antes de partirmos para a subtração de duas frações. Na subtração, iniciei com as mesmas frações utilizadas para introduzir a soma: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

P: - Quanto vale $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$?

Os alunos já com a referência criada para o modo como somar frações (colocar as barras uma ao lado da outra), passaram a testar posições que pudessem indicar o resultado daquela conta. Percebi que os alunos basicamente tentavam calcular a diferença que existia entre as barras da seguinte forma: tomavam uma peça menor que $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, e preenchiam a peça maior, depois com as mesmas peças tentavam preencher a peça menor, e contar quantas peças de diferença havia entre elas. No entanto este processo demorava muito já que, muitas vezes, quando os alunos encontravam uma peça que completava o tamanho de $\frac{1}{2}$, a mesma peça não preenchia corretamente a $\frac{1}{3}$.

P: - O que significa subtrair?

A: - É tirar.

P: - Então o que significa subtrair a peça $\frac{1}{3}$ da peça $\frac{1}{2}$?

A: - A mesma coisa. Tirar a peça $\frac{1}{3}$ da peça $\frac{1}{2}$.

P: - E como podemos fazer isso?

A: - Podemos ver quanto uma é maior do que a outra.

P: - E como podemos ver isso?

A*[7]: - Se a gente colocar uma em cima da outra vai ficar sobrando um pedaço, é como se tivéssemos cortado a peça menor da peça maior.

A: - E como vamos saber o tamanho do pedaço que sobrou?

A*: - É só fazer o que estávamos fazendo antes, que é completar com outra peça menor.

[7] As respostas nem sempre eram dadas pelo mesmo aluno. Quando isso aconteceu, no texto, este aluno será destacado. Neste caso foi utilizado um asterisco.

FIGURA 18- Subtração de frações.

Agora, tínhamos que descobrir que peça encaixava no "pedacinho", e aquela peça era a resposta de tirar $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$. Os colegas passaram a proceder conforme a idéia do colega, e não tiveram problemas nos próximos exercícios que propus no quadro, inclusive alguns destes exercícios envolviam adição e subtração concomitantemente.

Este último caso reforça minha idéia de que a utilização dos materiais manipulativos deve ser feita de maneira que os alunos possam realmente operar sobre os objetos e construir estratégias para a resolução dos problemas. Observo que para criarmos uma estratégia para podermos subtrair as frações, minha influência foi mínima. Apenas questionei sobre o significado da operação que estávamos realizando, e não simplesmente criei uma estratégia e apresentei-a aos estudantes. Até porque a utilização dos materiais desta forma torna-se apenas uma simples tradução do algoritmo para utilização de peças. Não permite ao aluno pensar sobre o que está fazendo, qual o significado da operação que está realizando. O aluno não é instigado a descobrir uma solução. Ao passo que, como observado, a reflexão sobre o que cada problema propõe, permite ao aluno criar estratégias próprias, o que desmistifica a idéia de que problemas matemáticos são insolúveis se não houver conhecimento da “regra” a ser obedecida, e propõe ao aluno o real fundamento da matemática, que é o raciocínio lógico.

Saliento que minha fala durante as aulas variava entre a linguagem utilizada pelos alunos, como “número de baixo”, e a linguagem matemática, “denominador”, por exemplo. Isso ocorria pois os alunos estão recém iniciando o trabalho com estes números, que são muito diferentes, e a utilização de uma linguagem totalmente nova poderia provocar confusão - o aluno não compreende ao que tu estás te referindo -, e até um certo receio gerado em função do distanciamento entre a linguagem matemática e a linguagem do cotidiano. Variando as palavras, o aluno não se sentirá tão distante do que está sendo dito, pois a linguagem permanece a mesma. Aos poucos ele conseguirá perceber que o “número de baixo”, matematicamente é chamado de “denominador”.

7.3.4 Representação Escrita (dia 23/10/09)

Nesta aula trabalhamos com a representação numérica do processo que estávamos desenvolvendo até então. Durante as aulas anteriores, buscava escrever no quadro as frações que solicitava, e também os cálculos, como maneira de familiarizar os estudantes a esta nova representação de um número.

No quadro, escrevi algumas adições e subtrações com frações que deveriam ser executadas pelos alunos com auxílio do material. Os alunos iniciaram a atividade, mas em pouquíssimo tempo alguns alunos trouxeram a atividade já pronta. Estranhei a rapidez e questionei como eles teriam feito tão depressa. Os alunos responderam que bastava fazer mmc. Perguntei se durante a aula regular eles já tinham trabalhado com mmc, os alunos responderam que sim, e então percebi que as turmas com as quais estava desenvolvendo a atividade não estavam estudando o mesmo conteúdo. Enquanto uma das turmas estava ainda trabalhando a idéias sobre o que é uma fração e equivalência, a outra já estava operando com aquelas.

Com isso, alguns alunos ficaram impacientes com o andamento da aula, porque terminaram a atividade muito rapidamente. Passamos então a trabalhar com estes alunos, depois dos exercícios já prontos, o significado concreto da operação que haviam exercitado. Os alunos, então, passaram a utilizar as peças do material, e ao contrário do que eu pretendia que os alunos chegassem ao algoritmo a partir do uso do material, estes alunos passaram a confirmar que o material realmente reproduzia a resposta correta obtida com o uso do algoritmo. Um dos alunos disse surpreso "*Olha "sora". Não é que dá a mesma resposta?!"*

Neste ponto, observei que o modo de introduzir o conceito de frações, e como se opera com estes números é determinante na compreensão e na contextualização deste tema por parte dos alunos, pois aqueles que haviam trabalhado antes com o algoritmo e não com as peças não conseguiam associar o algoritmo a contar e comparar peças. Já os alunos que trabalharam antes com as peças, e ainda não conheciam o algoritmo, apesar de levarem mais tempo para a realização das atividades, realizavam-nas compreendendo o que ocorria. Observei isto, pois os alunos que já conheciam o algoritmo da adição e da subtração de frações tentaram ensinar aos outros o "jeito mais rápido" de resolver os exercícios. No entanto, os alunos que trabalhavam com peças preferiram continuar fazendo os exercícios daquela maneira. Perguntei a uma aluna por que ela não passou a usar o método do colega já que, de fato, era mais rápido. A aluna respondeu que entendeu tudo o que o colega tinha feito, mas que não entendia como fatorar um número, multiplicar e dividir por outros números, e somar ou subtrair o resultado dava certo na prática. Por que fazer todo aquele esquema de operações funcionava quando usávamos as peças?

Ou seja, neste caso, a aluna recusou-se a usar o algoritmo, o esquema, porque segundo minha interpretação, para ela aquelas operações eram desconexas do que ela estava fazendo antes, que era observar o que acontecia quando juntávamos ou tirávamos uma fração de outra. Aquela aluna, assim como a maioria dos alunos, que receberam explicações de colegas sobre como fazer a conta do "jeito mais rápido", não percebiam como o algoritmo funcionava, por que aquelas contas produziam o resultado correto. Aquele monte de operações não fazia sentido ainda, e por isso recusaram-se a utilizar este método. Preferiram utilizar o que lhes fazia sentido, que era mexer com as peças, ver materialmente o que estava acontecendo.

Esta experiência me mostrou porque muitos alunos desgostam-se da matemática. A partir da reação da aluna que se recusou não só a utilizar o método apresentado pelo colega, mas também a ouvi-lo, pude confirmar minha suspeita de que a recusa dos alunos em aprender matemática parte muitas vezes da descontextualização dos conteúdos, das fórmulas, dos algoritmos.

Além disso, a falta de contato com situações reais e com materiais que permitam este contato, impossibilita o aluno de criar expectativas quanto a sua resposta. Apenas utilizar-se do algoritmo sem compreender o que significam aqueles números e operações, deixa margem para que o aluno possa encontrar qualquer resposta. Ou seja, se o aluno não analisa o resultado em que chegou, potencializa sua chance de não perceber um possível erro cometido.

7.3.5 O Mínimo Múltiplo Comum (mmc) (dia 30/10/09)

Devido ao fato de parte da turma estar trabalhando conceitos posteriores aos que estavam sendo discutidos no projeto de prática, como a adição e a subtração de frações com a utilização do algoritmo algébrico, alguns questionamentos sobre a função do mmc surgiram, e então achei conveniente interpretarmos o mínimo múltiplo comum entre dois números através do material que estávamos utilizando. Até porque os alunos que ainda não haviam sido apresentados ao método algorítmico de resolução acabarão em algum momento estudando-o, e a significação do mmc através das peças auxiliá-los-á na aprendizagem deste método de resolução.

Iniciamos o trabalho recordando que quando efetuávamos alguma adição ou subtração, muitas vezes encontrávamos mais de uma resposta para o mesmo problema, e que mesmo sendo diferentes, aquelas frações representavam a mesma quantidade (pois eram equivalentes), e desta forma todas estavam corretas.

Escrevi no quadro uma soma com a qual já havíamos trabalhado: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

P: - Há alguma outra fração que sirva como resposta deste cálculo?

A: - Uma fração equivalente a $\frac{5}{6}$.

P: - Vocês podem me dar alguns exemplos?

Os alunos passaram a organizar as peças na busca de uma fração equivalente a $\frac{5}{6}$. Este fato mostra que mesmo já tendo chegado à conclusão de que para encontrarmos frações equivalentes basta multiplicar numerador e denominador por um mesmo número, o raciocínio que permaneceu foi a prática de comparar as peças. Com isso os alunos citaram diversas frações equivalentes, como $\frac{10}{12}$, $\frac{15}{18}$ e $\frac{25}{30}$.

FIGURA 19- Na busca por frações equivalentes.

P: - Se precisássemos escolher uma delas para utilizar, qual escolheríamos?

A: - A mais fácil, a menor.

Aqui, quando os alunos se referem à menor, referem-se à comparação entre os numeradores e denominadores das frações. Esta expressão foi apenas uma maneira que encontraram para fazer referência às frações irredutíveis, que ainda não estudaram. Não se trata da comparação entre o valor numérico das frações, pois como evidente no diálogo anterior, os estudantes reconhecem que aquela fração é equivalente a qualquer uma das outras.

P: - E qual destas frações parece ser a mais fácil?

A: - A $\frac{5}{6}$.

P: - E se estivéssemos fazendo esta conta com o material, como saberíamos que a melhor fração que poderíamos encontrar era $\frac{5}{6}$ e não outra equivalente?

A: - É só usarmos as peças laranja.

Aqui os alunos fizeram referência à utilização das peças laranja, pois se utilizaram da propriedade das cores das peças do material. Como a peça 2 é vermelha, a peça 3 é amarela, e a mistura entre vermelho e amarelo é laranja, a peça que completa corretamente o tamanho proveniente na união destas duas frações é laranja.

P: - Mas a peça 18 também é laranja, e não nos forneceu a fração que gostaríamos.

A: - Então temos que fazer todas e decidir depois qual é a melhor.

P: - Isso não parece muito trabalhoso? Será que não há uma maneira de descobrirmos "de primeira" qual peça nos fornece a melhor fração?

Os alunos ficaram em silêncio, buscando alguma resposta para a minha pergunta. Neste momento introduzi a idéia da utilização do mmc para orientar-nos quanto à melhor peça a ser utilizada.

Professora: - O que é um múltiplo?

Alunos: - É um número que está na tabuada.

Professora: - Vocês podem me dar um exemplo?

Alunos: - 6 é múltiplo de 3 porque está na tabuada do 3.

Professora: - E o que significa ser mínimo?

Aluno: - Ser pequeno, ser menor.

Professora: - Então o que é um mínimo múltiplo?

A: - É o menor múltiplo?

P: - Então mínimo múltiplo comum é o menor múltiplo das duas frações, certo? É o que vai nos dizer qual o menor denominador possível, no nosso caso, qual é a maior peça que completa o espaço determinado por outras peças na soma ou subtração.

Os alunos, inclusive os que ainda não haviam trabalhado operações com frações, já sabiam calcular o mmc entre dois números. Desta forma, escrevi algumas somas e subtrações no quadro, e pedi que os alunos descobrissem que peça nos servia para aquele cálculo a partir do mmc. Por exemplo, na soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, o mmc entre 2 e 3 é 6. Então a maior peça (ou o menor denominador) que completa o espaço formado pelas barras $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ é o conjunto de peças $\frac{1}{6}$. Sabendo isso os alunos buscavam estas peças no material, e realizavam o mesmo processo de até então: preenchiam o espaço das barras amarela e vermelha, e contavam quantas peças foram necessárias.

Quando conferimos os resultados dos exercícios, alguns alunos se surpreenderam com o fato de que desta vez não havia aparecido nenhuma fração equivalente. As respostas tinham sido todas iguais.

Assim, apesar de já estarmos trabalhando com conceitos bem mais abstratos, os alunos ainda tinham uma aplicação para o que estavam calculando, não se distanciando completamente das práticas que faziam até então, e mantendo o ponto de referência, o material.

8 Curso de Formação para Professores das séries iniciais

8.1 O Curso

O Instituto Estadual Rio Branco (RB), no primeiro semestre deste ano de 2009 manifestou o interesse em montar um Laboratório de Matemática na Escola. Trabalhando há dois anos na instituição através da Ação de Extensão Assessorias de Matemática, Interação Virtual e Robótica para a Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática e também da disciplina de Estágio em Educação Matemática III, e conhecendo meu interesse no uso de materiais manipulativos para o ensino-aprendizagem de matemática, fui convidada a participar deste projeto.

Com a aquisição dos materiais, a direção solicitou ao grupo que trabalhava na Escola através da Ação de Extensão que ministrasse um curso sobre a utilização de materiais manipulativos para trabalhar os conteúdos de sala de aula, de modo que os professores se sentissem encorajados a utilizá-los. Observo que mesmo que os materiais estejam disponíveis nas escolas, muitos professores não os utilizam por falta de conhecimento de como fazê-lo.

> (...) o professor em sua prática de sala de aula, na maioria das vezes, contando apenas com o livro didático como suporte para o seu trabalho depara, cada vez mais, com livros repletos de desenhos de materiais manipuláveis – a maioria deles não disponíveis nas escolas ou quando existentes, não são utilizados ou por desconhecimento em como lidar com eles (...) (NACARATO, 2005, p. 2).

Desenvolvemos um curso voltado principalmente aos professores das séries iniciais, pois os primeiros conhecimentos matemáticos são formados durante esta fase da vida escolar, e estas primeiras noções de matemática são muito importantes no desenvolvimento posterior do aluno na disciplina.

O curso teve um total de 13 encontros de duas horas e trinta minutos cada. Foram sugeridos textos para leitura e discussão, e a cada encontro tratamos de um tema matemático diferente, mas que estabelecia alguma ligação com os demais. Dentre os assuntos que achamos convenientes e os que foram pedidos pela direção da escola para serem abordados, organizamos o curso sob os seguintes tópicos: O “pensar matemático”, Grandezas e Medidas, Números e Operações, Tratamento da Informação, Espaço e Forma, Avaliação e Jogos.

A dinâmica das aulas foi quase uma mesa de discussões: colocávamos um assunto em pauta e os professores discutiam entre eles, conosco, davam opiniões, sugestões, contavam experiências e resolviam exercícios. A resolução de exercícios e a participação dos professores nas atividades não visava colocá-los em prova testando seus conhecimentos. Nossa intenção era colocar os professores no papel de alunos, e fazê-los participar era uma maneira de tornar factíveis as idéias de atividades e exercícios que levávamos para as aulas.

8.2 APRESENTAÇÃO DO MATERIAL

Em uma das aulas relativas ao tema "Números e Operações", levei jogos de Frac-Soma 235 em madeira, e também o material que havia sido confeccionado pelos alunos, e que agora estava disponível na Escola para que fizessem uso. Apresentei o material aos professores dizendo apenas que servia muito bem para o trabalho com frações, mas não contei todas as propriedades, algumas deixei para que descobrissem mais tarde, com o desenvolvimento das atividades.

Disse-lhes que o material se chamava Frac-Soma 235, pois os divisores primos da barra branca com 60 centímetros, a unidade, eram os números 2, 3 e 5. Contei-lhes uma das propriedades curiosas do material: as barras têm 60 cm de comprimento não só porque 60 têm vários divisores, a saber, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60, mas também porque 60 cm é menor ou igual à medida das classes escolares, de modo que na manipulação do material pelos alunos, as peças não caiam das mesas.

Cada grupo de professoras recebeu um jogo de madeira, emprestado pelo Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CAp). Levei também um dos jogos confeccionado pelos alunos da 5ª série, para mostrar-lhes como foi o trabalho realizado, e também porque aquele era o material que estaria disponível na Escola. Assim que receberam o material, logo trataram de pô-lo em ordem, mesmo sem saber que ordem seguir, mas a informação dada no início de que a barra branca era a unidade, e o fato de as demais peças serem menores do que a branca provocou-as a estabelecer um padrão, de modo a conseguir organizar as peças do jogo.

FIGURA 20- Organização das peças.

Contei a elas a propriedade das cores do material, que cada divisor primo tem uma cor prima, e cada divisor composto é a mistura de cada cor correspondente em sua fatoração em números primos. Assim, questionei qual era a primeira peça do jogo a ser dividida: a vermelha dividida em duas partes (2 é número primo, então vermelho é a primeira cor prima que aparece na ordem crescente do número de peças). Disse que a segunda cor era amarela. Questionei às professoras se amarelo era cor prima. Como a resposta era "sim", logo aquele divisor também deveria ser primo. Analisando o material, disseram que aquela cor era relativa ao número 3, que também é primo. Uma das professoras logo deduziu que o divisor seguinte era 4. Questionei se 4 era número primo. Como não é, partimos a deduzir de que cor deveria ser a peça que representa a fração $\frac{1}{4}$ da barra branca: a fatoração de $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, já que a fatoração de 4 é 2×2. Como a peça que representa $\frac{1}{2}$ é vermelha, e a mistura de vermelho com vermelho é vermelho, a peça $\frac{1}{4}$ só poderia ser vermelha. A próxima peça era a $\frac{1}{5}$. Logo disseram que 5 era primo, e olhando para as cores disponíveis no material, concluíram que a peça $\frac{1}{5}$ era azul.

Passei então a questionar a cor das peças, dado o divisor. Por exemplo: que cor é a peça $\frac{1}{6}$? Como $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, a peça $\frac{1}{2}$ é vermelha e a $\frac{1}{3}$ é amarela, a peça $\frac{1}{6}$ só poderia ser laranja. De que cor é a peça $\frac{1}{10}$? $\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$. A peça $\frac{1}{2}$ é vermelha e a $\frac{1}{5}$ é azul, então a peça $\frac{1}{10}$ é roxa.

Destaquei a vantagem que a distribuição das cores tem quando se trabalha com alunos do ensino básico, pois a noção de cores é trabalhada nas séries iniciais, e a ligação entre esse conhecimento e a fatoração numérica é uma maneira de facilitar a aprendizagem, e uma motivação quando o aluno consegue relacionar conteúdos que já domina com os que está aprendendo.

FIGURA 21- A relação das cores.

Partimos então para a equivalência entre as frações. Questionei quais as outras frações que correspondiam ao mesmo tamanho que a peça $\frac{1}{2}$. Os professores observaram o material e logo notaram que todas as divisões das peças vermelhas fechavam no tamanho da peça $\frac{1}{2}$. Uma das professoras argumentou que aquilo era lógico, pois todas as peças vermelhas eram a vermelha maior, a peça $\frac{1}{2}$, subdividida. Seguindo o mesmo raciocínio da colega, outra professora concluiu que também era possível montar a peça $\frac{1}{2}$ com peças laranja, pois o denominador das peças laranjas tinham o número 2 em sua fatoração. Logo, outra professora percebeu que as peças roxas também podiam montar a fração equivalente a $\frac{1}{2}$. Pedi que as professoras montassem algumas destas frações equivalentes, e então uma das professoras, com todo o jogo organizado sobre a classe, respondeu que já tinha montado todas as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, observando a linha que se formava exatamente por entre as barras vermelhas, laranjas e roxas.

FIGURA 22- Equivalência entre frações.

Uma constatação que as professoras não fizeram foi que com as peças pretas também é possível montar uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$. Atribuo este acontecimento ao fato das professoras não perceberem que naquele jogo a peça preta representava a peça que era múltipla de 2, de 3 e de 5, e como preto não é a cor que resulta da mistura das três cores correspondentes a cada um destes números, a peça preta foi “esquecida”. Creio que esta tenha sido a única razão para que as professoras não tenham percebido as peças pretas como uma possibilidade já que, como mostrado anteriormente, nas outras cores, onde a presença do vermelho era evidente, as professoras se saíram muito bem na dedução das peças candidatas a formarem uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$. Possivelmente as professoras atentaram muito mais ao fato das cores das peças do que a própria fatoração única do denominador. Sabendo que uma peça preta representa $\frac{1}{30}$ da barra branca, se tivessem se baseado pela fatoração do número 30, certamente perceberiam que 30 é divisível por 2, logo era possível equivaler uma fração montada com peças pretas à fração $\frac{1}{2}$.

Partimos para a adição das frações. Como com os alunos da 5ª série, pedi que as professoras calculassem com a utilização do material o resultado de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Sem dificuldades as professoras responderam que o resultado daquela soma era 1, pois ao colocar uma barra vermelha grande ao lado de outra de mesmo tamanho, estas formavam uma barra do mesmo tamanho da barra unidade.

Pedi então que calculassem quanto resultava $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. As professoras colocaram as barras amarelas uma ao lado da outra. Algumas apresentaram alguma dificuldade em responder quanto aquela quantidade valia em relação à peça branca, respondendo que valia 1 menos $\frac{1}{3}$. Pedi então que observassem em quantas partes a peça branca havia sido dividida, e quantas havíamos tomado. Dividimos em 3 e tomamos 2, logo a soma de duas peças $\frac{1}{3}$ era igual a $\frac{2}{3}$.

A nova adição referia-se a duas peças de tamanhos diferentes: as peças $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. As professoras dispuseram as peças lado a lado e, depois de algum tempo de observação uma delas começou a preencher o tamanho das duas peças com peças laranjas. Perguntei o que ela estava fazendo, e a professora respondeu que como os denominadores das peças eram diferentes deveríamos encontrar a peça relativa ao mínimo múltiplo comum (mmc) entre 2 e 3, que era 6. E, com a peça $\frac{1}{6}$, que era laranja, preencher o tamanho das peças $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ juntas e contar quantas delas foram necessárias. As demais colegas concordaram com o método adotado pela professora, e a partir disso não tiveram problemas em responder quanto valia $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$.

Partimos para a subtração entre frações. Pedi que as professoras calculassem a diferença entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Inicialmente as professoras não encontraram um método para calcular subtrações. Para que concluíssem como proceder, disse-lhes que queria que calculassem a diferença, ressaltando bem esta palavra. Então logo perceberam que deveriam calcular o tamanho que sobrava da peça vermelha em relação à peça amarela. Pelo mesmo método utilizado para a soma, encontraram bem rapidamente o resultado $\frac{1}{6}$.

Vale ressaltar que o fato de as professoras terem conseguido operar frações com as peças do jogo, mesmo sem conhecê-lo, pode ser atribuído ao fato de que todas elas já tinham algum conhecimento matemático sobre este tema. Desta forma, à elas foi necessário apenas transportar as “regras” que conheciam para as novas “regras” da utilização do material, não sendo necessária a construção de nenhum conceito novo. Por este motivo, foi trabalhado no mesmo encontro a equivalência, a adição e a subtração de frações sem grandes problemas. Nas atividades de sala de aula, mesmo com o uso do material, os estudantes levam algum tempo para trabalhar bem com todos estes conceitos, e mais algum tempo para traduzi-los para a escrita, tempo este que ultrapassa um ano letivo.

As professoras mostraram-se muito receptivas ao uso do material em sala de aula, principalmente quando foi citada a relação entre as cores e os fatores primos que compunham as peças. Segundo elas, por serem professoras das séries iniciais, seria muito complicado trabalhar com frações se não fosse através de algum tipo de jogo. No entanto, os outros materiais que conheciam até tinham peças coloridas, mas não estabeleciam esta relação com os números primos, *“importantíssimos para o cálculo do mínimo múltiplo comum na 5ª série, que é quando realmente se trabalha frações”*, conforme observou uma das professoras.

Sobre o uso do material com as professoras, pude perceber que o peso dos algoritmos e métodos convencionais de operar racionais na forma fracionária permaneceu muito arraigada durante suas práticas. Mesmo tendo disponíveis as peças, as professoras muitas vezes recorriam aos algoritmos da adição e da subtração com a utilização do mmc, como fica evidente da descrição da atividade assim como na fala da professora. Ainda sobre o comentário da professora fica nítida a importância dada ao algoritmo para os processos de adição e subtração, da mesma forma em que é confirmada a idéia já citada, de que o estudo das frações é unicamente conteúdo do sexto ano. Para uma discussão mais ampla, seriam necessários mais encontros, atividades e discussões sobre o assunto não somente com as professoras das séries iniciais, mas também, e principalmente, as professoras que trabalham com as quintas séries. Fica a idéia para uma nova atividade na Escola durante o próximo ano.

9 OPINIÕES

Com o intuito de saber o que as professoras titulares das 5ªs séries, as professoras participantes do Curso de Formação e, principalmente os alunos tinham a dizer sobre o trabalho realizado em torno do FRAC-SOMA 235, seguem algumas de suas opiniões.

9.1 DOS ALUNOS

No último encontro que tivemos para trabalhar com o FRAC-SOMA 235, pedi aos alunos que respondessem a seguinte pergunta: “As pecinhas te ajudaram a compreender as frações?Por quê?”

Analisando as respostas dos alunos pode-se dizer que, de um modo geral, eles gostaram do trabalho que foi desenvolvido, gostaram das atividades e, de fato, as peças os ajudam a compreender alguns conceitos sobre frações. Muitos alunos ressaltaram o fato de que com as peças é mais fácil de calcular, e que elas auxiliam em suas aprendizagens.

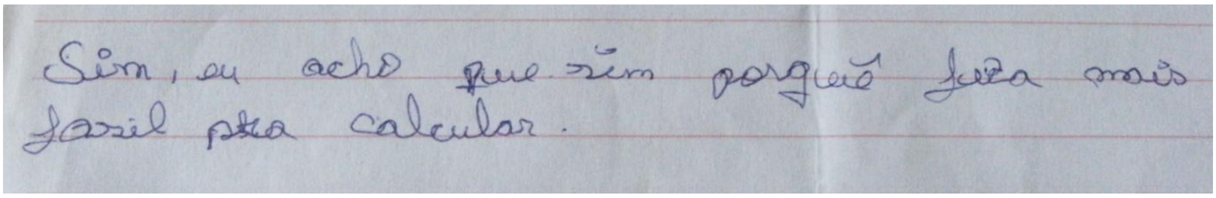

Sim, eu acho que sim porquê fica mais fasil pra calcular.

FIGURA 23- Resposta 8: As pecinhas te ajudaram a compreender as frações?

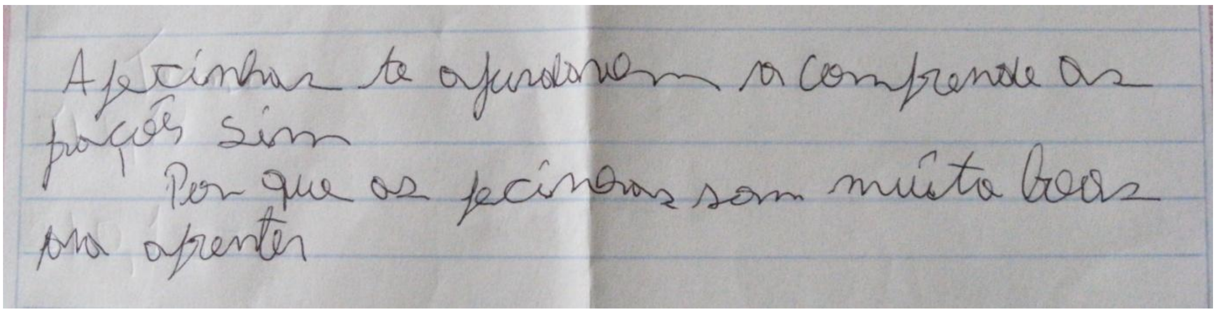

A pecinhas te ajudaram a compreende as frações sim
Por que os pecinhas som muita boas pra aprenter

FIGURA 24- Resposta 9: As pecinhas te ajudaram a compreender as frações?

Alguns alunos ressaltaram que a utilização das peças é proveitosa, mas que os trabalhos de sala de aula não contemplam estas práticas. Então, apesar de o material ter acrescentado no conhecimento sobre frações dos alunos, estes não conseguem estabelecer uma relação entre o que é trabalhado na aula regular e o que foi desenvolvido no projeto. Para eles, me parece, são diferentes as frações que são trabalhadas durante a aula regular, abstratamente, e as que estudamos nas Assessorias, com a utilização do material concreto.

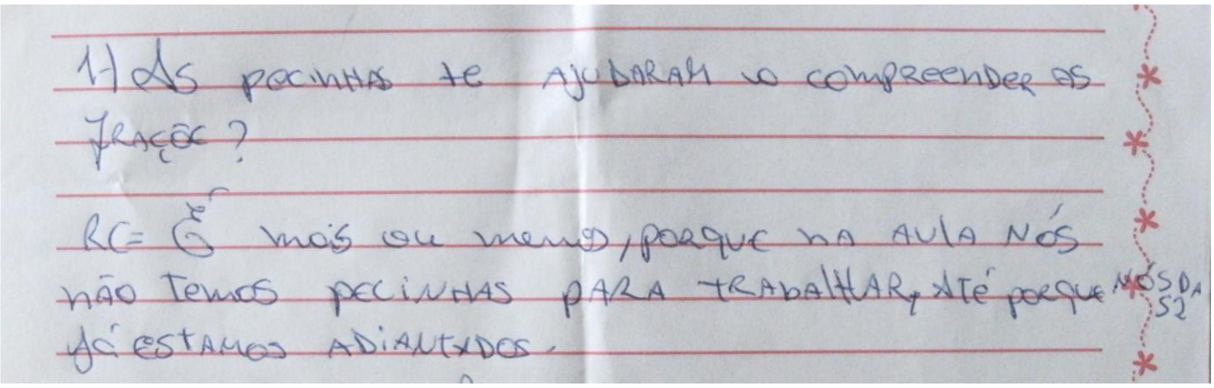


FIGURA 25- Resposta 10: As pecinhas te ajudaram a compreender as frações?

Este desligamento poderia ser solucionado se fosse feito algum trabalho de parceria entre as professoras titulares e o projeto, como a participação delas nas aulas, e o planejamento de alguma atividade que contemplasse as duas abordagens, assim estreitando a relação entre a fração “abstrata” e a fração “concreta”. No entanto, devido à carga horária das professoras não foi possível programar nada nesse sentido. Deixamos salientada a necessidade desta prática para um novo projeto.

9.2 DAS PROFESSORAS PARTICIPANTES DO CURSO

Para estas professoras foi aplicado um questionário com as seguintes perguntas:

- Tu acreditas que a utilização de materiais concretos auxilia no ensino-aprendizagem de matemática? Por quê?

- Tu utilizas algum tipo de material concreto ou manipulativo nas tuas aulas? Qual? Para trabalhar que conteúdo?

- Já conhecias o FRAC-SOMA 235 antes do trabalho realizado nos encontros das quintas-feiras à noite? Se sim, como conheceu?

- Tu consideras o FRAC-SOMA 235 um bom material para o trabalho com frações? Por quê?

- Tu achas possível implantar a utilização deste material nas tuas próximas aulas sobre frações? Caso consideres que não é possível ou viável, por favor, indique possíveis razões.

- Tu pretendes utilizar os materiais que ficarão disponíveis no Laboratório de Matemática da Escola? Caso consideres que não é possível ou viável, por favor, indique possíveis razões.

- Tu conheces algum outro material que trabalhe frações? Qual?

As professoras concordaram que a utilização de materiais manipulativos contribui para a aprendizagem em matemática na medida em que, segundo elas, a criança durante esta fase precisa interagir com objetos, estabelecer relações de visão, tato e raciocínio para que possa aprender. As professoras disseram também que utilizam muitos materiais manipulativos, recortes de revistas, brinquedos, jogos, mas principalmente materiais de contagem como tampinhas, palitos, lápis e sementes.

Nenhuma das professoras conhecia o FRAC-SOMA 235 antes da apresentação realizada, mas todas acharam que o material oportuniza muitas discussões acerca do conceito de fração, o que é importante para a aprendizagem. Além disso, dispõe ao aluno inúmeras tentativas, que podem dar certo, mas se falharem há a possibilidade de tentar novamente. E sobre os outros materiais que ficarão disponíveis no laboratório as professoras mostraram interesse em utilizá-los.

Sobre outros materiais que abordem frações, as professoras apontaram a velha divisão de pizzas e barras de chocolates, em que as crianças coloriam partes no caso de uma representação, ou comiam os pedaços se o material além de manipulativo fosse consumível.

9.3 Das Professoras titulares das 5ªs séries

Para as professoras titulares dos alunos que participaram do projeto também foi aplicado um questionário com as seguintes questões:

- Tu acreditas que a utilização de materiais concretos auxilia no ensino-aprendizagem de matemática? Por quê?

- Já conhecias o material FRAC-SOMA 235 antes do trabalho realizado nas Assessorias de Matemática? Se sim, como conheceu?

- Tu consideras o FRAC-SOMA 235 um bom material para o trabalho com frações? Por quê?

- Tu observaste algum avanço em relação aos conhecimentos sobre frações dos teus alunos?

- Tu achas possível implantar a utilização deste material nas tuas próximas aulas sobre frações? Caso consideres que não é possível ou viável, por favor, indique possíveis razões.

- Tu pretendes utilizar os materiais que ficarão disponíveis no Laboratório de Matemática da Escola? Caso consideres que não é possível ou viável, por favor, indique possíveis razões.

- Tu utilizas algum tipo de material concreto ou manipulativo para o estudo de frações nas tuas aulas? Qual?

Neste caso as professoras também disseram acreditar na eficiência dos materiais manipulativos no ensino-aprendizagem de matemática porque apenas aulas expositivas no quadro podem se tornar monótonas e muito abstratas. O material torna as aulas mais dinâmicas e então o aluno consegue "enxergar" a matemática.

Apenas uma das duas professoras já conhecia o FRAC-SOMA 235, e o conheceu durante sua graduação, mas ainda não o tinha utilizado em aulas, apesar de achar o material muito interessante. A mesma professora cita ainda que o material se trata de um bom material porque possibilita ao aluno a construção da relação parte-todo, e não apenas da representação dos números fracionários.

Sobre os avanços nos conhecimentos sobre frações dos alunos, segundo uma das professoras *"houve um avanço porque as frações passaram a ser mais reais para os estudantes"*.

As professoras pretendem utilizar o FRAC-SOMA 235 em suas próximas aulas, mas ressaltaram o fato de que são muitos os alunos em sala, e por isso se torna difícil dar atenção a todos para a realização de um bom trabalho. Mostraram interesse na utilização dos materiais que ficarão disponíveis no Laboratório de Matemática. Uma delas inclusive disse que já utilizou os Discos de Frações[8], e cita este mesmo material além de recortes de figuras quando questionada se utilizava algum outro material para o estudo das frações.

De modo geral posso dizer que as respostas das professoras não sanaram todas as minhas dúvidas sobre pontos como sua formação (se foram incentivadas a utilizar materiais manipulativos), como os avanços dos alunos se manifestaram, e discutir sobre um projeto que permitisse que graduandos do curso de Licenciatura em Matemática auxiliassem as aulas regulares em que fossem utilizados os materiais, para que as professoras se sentissem mais seguras e os alunos fossem melhor atendidos.

[8] Os Discos de Frações são materiais para o estudo das frações, assim como o FRAC-SOMA 235. O diferencial entre eles é que no Disco de Frações o inteiro é uma circunferência dividida em partes radiais com mesma área.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Parece-me, ao fim desta pesquisa, que a utilização de materiais manipulativos durante o ensino básico não se trata apenas da manipulação de peças como um atrativo à atenção dos estudantes. O trabalho com materiais possibilita a interação, o teste, a suposição de relações e a investigação de sua veracidade, criando um campo onde a tentativa e o erro são fundamentais no processo de aprendizagem como motivadores da criação de estratégias de raciocínio.

Sim, o material concreto desperta a atenção dos estudantes, mas isso não se deve apenas ao fato de haver peças coloridas e tudo parecer um jogo. A utilização dos materiais atrai o interesse e a curiosidade dos educandos na medida em que a manipulação de objetos torna real toda a abstração da matemática. Sob o real é possível analisar, testar, mexer, criar, desenvolver matemática, ao passo que sob a abstração da álgebra e da aritmética ao estudante do ensino básico resta apenas seguir regras.

A formação dos professores neste caso é fundamental na medida em que são eles os orientadores do processo de aprendizagem, principalmente quando são utilizados materiais concretos. As propostas de trabalho, as perguntas a serem feitas, o incentivo à criação de estratégias de trabalho pelos próprios alunos direcionam as atividades a um resultado positivo. Já a utilização das peças sem qualquer motivação, instigação, ou apenas como comprovação do resultado obtido com algoritmos, de pouco ou nada adianta para o estudante.

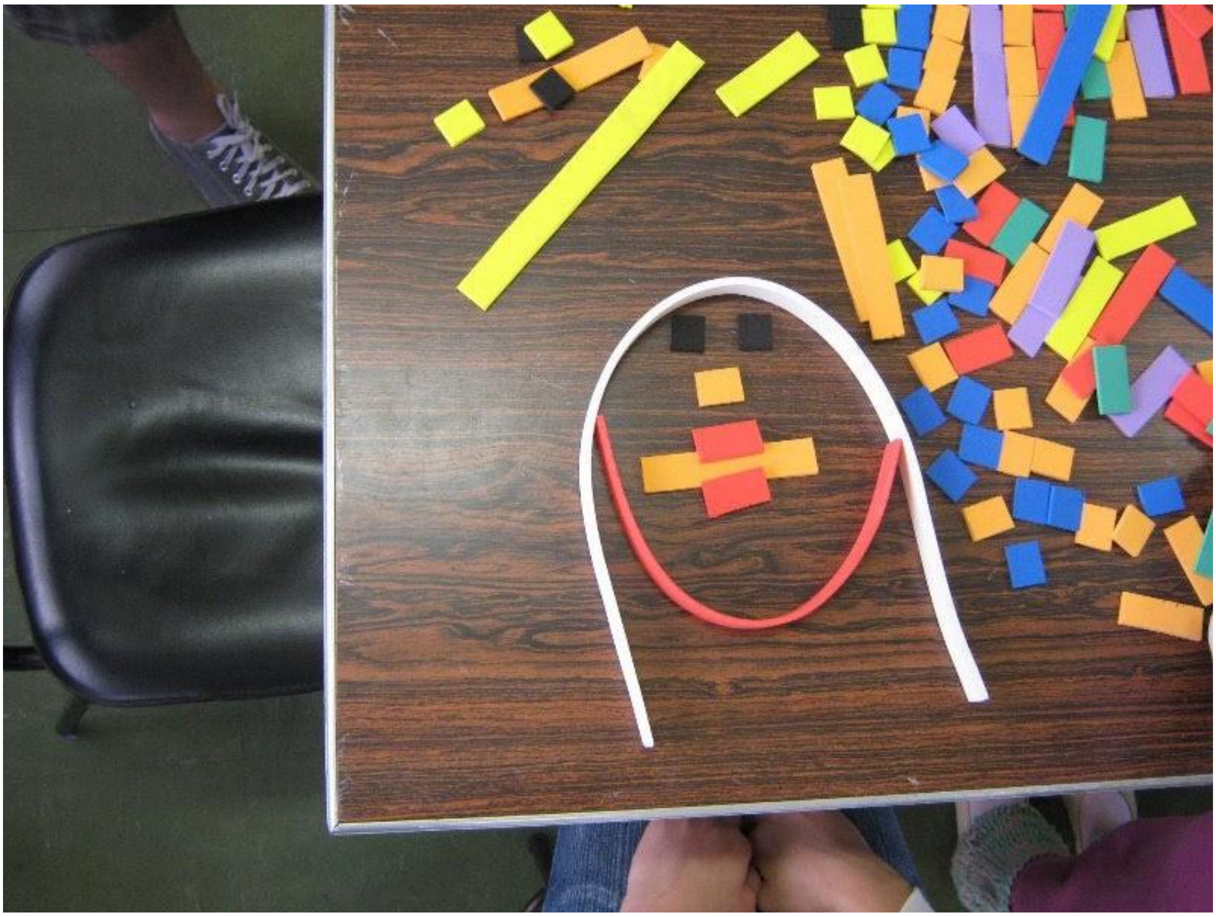


FIGURA 26- Outra utilidade às peças.

O diferencial na utilização dos materiais manipulativos é que o educando se torna capaz de criar suas próprias estratégias de resolução, manipulando, testando, e criando uma nova estratégia caso a anterior não funcione. Desta forma a matemática adquire algum significado que não "fazer contas". Pensar sobre os problemas, buscar nos conhecimentos que já se tem alguma maneira de solução é sob meu ponto de vista um dos aspectos mais importantes da matemática na vida escolar e social dos alunos. Isso é matemática, e não um monte de regras e fórmulas que são determinantes na resolução de um exercício. Despertar nos estudantes o interesse pela investigação e pelo questionamento é uma maneira de torná-lo ativo não só na construção de seus conhecimentos, mas também na sociedade onde vive.

Sobre o FRAC-SOMA 235 posso dizer que a cada nova experiência de trabalho, surgem novas comprovações de que este material realmente tem ótimos resultados no trabalho com frações. As reações dos alunos e suas respostas, quando questionados sobre a eficácia do uso deste material, mostram que ele atende às solicitações dos estudantes, os instiga a criar atalhos de resolução até que possam compreender o funcionamento dos algoritmos, e não simplesmente reproduzi-los.

Por fim, destaco que a execução deste projeto acrescentou muito na minha formação como professora da disciplina de matemática, pois buscar novos métodos que possam auxiliar os estudantes no processo de ensino-aprendizagem e incorporá-los a sua prática pedagógica pode ser um grande passo na melhora dos índices de aproveitamento dos conhecimentos matemáticos.

No entanto, creio que a relevância maior deste projeto trata-se do real impacto que ele causou. Tanto no Curso de Formação para Docentes das Séries Iniciais, quanto nas aulas com os alunos das 5ªs séries, pude dizer na prática muito do que penso poder ser feito para tornar a matemática mais interessante, mais importante. E muito do que acredito ser o papel do professor e do aluno no seu processo de formação. Meu Trabalho de Conclusão de Curso não se restringiu a pesquisar o que práticas de outras pessoas têm a dizer sobre os materiais manipulativos, ou sobre as pedagogias adotadas em sala de aula. Meu projeto buscou ser real, e realmente trazer algum efeito para aquele grupo de professores e alunos.

FIGURA 27- Parte do grupo de alunos e professores envolvidos no Projeto.

REFERÊNCIAS

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Um novo paradigma no Ensino e Aprendizagem das Frações.** Universidade de Brasília, 2004. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA01.pdf> Acesso em: 1 nov. 2009.

BONAFÉ, Marytta. **Zoltan Dienes e o Movimento da Matemática Moderna no Ensino Primário,** São Paulo: Pontifícia Universidade Católica. Disponínel em <http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/05-03.pdf>>. Acesso em: 8 nov. 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília :MEC/SEF, 1997.142p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 15 out. 2009.

CARRAHER, T., Carraher, D. E. Schliemann, A. – **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo, Cortez Editora, 1989.

CISCAR, Salvador Linares; GARCÍA, Maria Victoria Sánchez. **Fracciones: La relacion parte-todo**. Madrid: Sintesis, c1988. 168 p. : il.

DIENES, Z. P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática** [tradução: Maria Pia Brito de Macedo Charlier e René François Joseph Charlier] São Paulo, EPU. 1975, 1886. 72 p. ilust.

DRUCK, Suely. O Ensino da matemática tem solução? **Ciência Hoje**, v. 38, n. 225, p. 6-10, abr. 2006.

FAGUNDES, Léa da Cruz. **Materiais Manipulativos no Ensino de Matemática a crianças de 7 a 14 anos: Período das operações concretas.** Seminário nacional sobre Recursos audiovisuais no Ensino de 1º grau. Departamento de Ensino fundamental. MEC. Brasília, jun. 1977.

FERRARI, Márcio. **Maria Montessori**. 2008. Disponível em <http://educarparacrescer.abril.com.br/aprendizagem/maria-montessori-307444.shtml?page=page2> Acesso em: 1 nov. 2009.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática.** Faculdade de Educação da UNICAMP. Publicado no Boletim SBEM-SP, Ano 4 - nº 7.

HAMZE, Amélia. UNIFEB/CETEC e FISO. Barretos, São Paulo. Disponível em <http://www.educador.brasilescola.com/gestao-educacional/escola-nova.htm> Acesso em: 1 nov. 2009.

IMENES, L. M; LELLIS, M. **Matemática para todos**: 5ª série, 3° ciclo. São Paulo: Scipione, 2002.

LOPES, A. J. **Reflexões sobre o ensino de frações no currículo de matemática**. 2004. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos/artigos_view.asp?cod=27>. Acesso em: 1 nov. 2009.

NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no concreto**. Revista de Educação Matemática. Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo. SBEM-SP. 2005.

PESTALOZZI. O teórico que incorporou o afeto à sala de aula. **Nova Escola**, 22. ed. out. 2008, Formação. Disponível em <http://revistaescola.abril.com.br/formacao/formacao-inicial/teorico-incorporou-afeto-sala-aula-423096.shtml>. Acesso em: 1 nov. 2009.

ZACHARIAS, Vera Lúcia Camara. **Comenius. Leves Pinceladas biográficas.** 2007(a). Disponível em <http://www.centrorefeducacional.com.br/comenius.htm>. Acesso em: 1 nov. 2009.

ZACHARIAS, Vera Lúcia Camara. **Rousseau**. 2007(b). Disponível em <http://www.centrorefeducacional.com.br/rousseau.html>. Acesso em: 1 nov. 2009.