<u>MINICURSO</u>: Explorando o Geoplano

Professora Rosa Maria Machado
e-mail: rmm@ime.unicamp.br

RESUMO

Apresentaremos neste evento algumas atividades sob a forma de minicurso a serem trabalhadas nas aulas de Matemática, fazendo uso do Geoplano, com ênfase em Teoria dos Números. Os participantes encontrarão uma variação no grau de dificuldade para a resolução dos exercícios, desde os mais simples até aqueles que merecerão maior atenção, abrindo assim uma discussão sobre alguns pontos que não estão inclusos numa abordagem tradicional do ensino de matemática. Espera-se que após esse minicurso e com os possíveis debates a respeito dos conteúdos, os participantes tenham outros subsídios de matemática para as suas aulas.

Público alvo: Professores do Ensino Médio e estudantes de Licenciatura em Matemática

INTRODUÇÃO

"Todas as coisas são números".
Pitágoras

Num ambiente de manipulação e investigação o aluno encontra condições para produzir o conceito, produzir conhecimento, experimentar combinações, expressar-se livremente, desenvolver a criatividade, resolver problemas, ampliar sua noção de mundo.

Serrazina(1990), ressalta a necessidade de cuidado especial com a utilização de material didático nas aulas de Matemática e também alerta sobre a dependência fundamental da competência do professor, e uma reflexão bem mais aprofundada a propósito de suas bases epistemológicas.

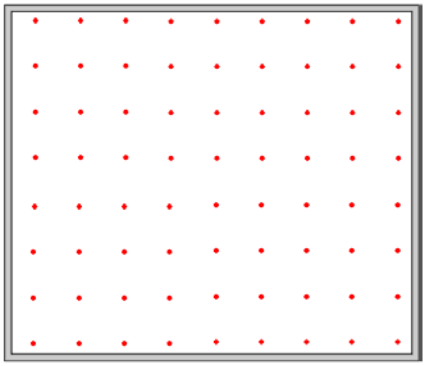
O papel do professor deve ser de condutor ou guia. Deve orientar o trabalho dos estudantes no geoplano e guiar as observações para que eles encontrem todas as possibilidades do caso, nos deslocamentos dos atilhos, chegando a descoberta de relações através de <u>*ações*</u>, <u>*percepções*</u> e <u>*abstrações*</u>. Sua mente deve estar sempre aberta para introduzir as possíveis variações que derivem do diálogo em classe com os estudantes. Esta flexibilidade do professor, proporcionará novas descobertas, e tornará o estudo mais atraente. As perguntas devem ser dinâmicas, mais do que formais. O diálogo com a classe deve ser ágil, sem impedir que cada estudante elabore o seu pensamento. Deve dar tempo para que o estudante <u>*observe*</u>, <u>*pense*</u> e <u>*expresse*</u> seu pensamento. A linguagem do professor deve ser concisa e cuidadosa, suficientemente rica para utilizar expressões equivalentes que tornem claras as idéias e facilitem a compreensão dos significados. Deve motivar o aluno que expresse suas idéias com clareza a fim de que seja interpretado corretamente. Após, o estudante ter encontrado as relações esperadas deve utilizar seu caderno para fazer os registros a fim de ir adquirindo a simbologia adequada.

GEOPLANO

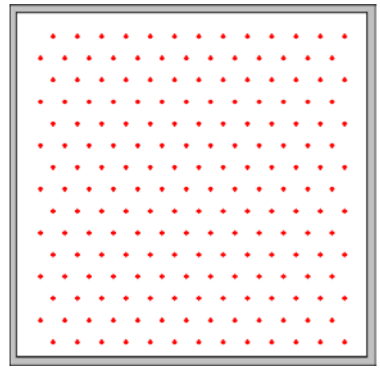
Geoplano: é um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo (construir, movimentar e desfazer). Contribui para explorar problemas geométricos e algébricos, possibilitando a aferição de conjecturas e podendo-se registrar o trabalho em papel ou reproduzi-lo em papel quadriculado. Além disto, o geoplano facilita o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial, comparação, relação, discriminação, seqüência, envolvendo conceitos de frações e suas operações, simetria, reflexão, rotação e translação, perímetro, área. O geoplano é um meio, uma ajuda didática, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes.

Modelos de Geoplanos

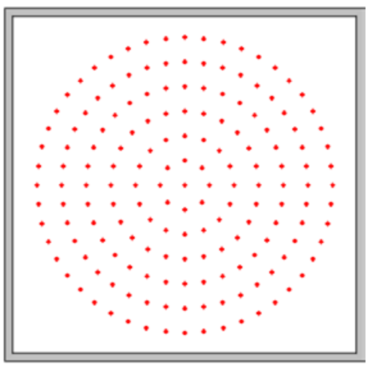
A seguir, apresentamos alguns tipos de geoplano. É importante observar que, no geoplano utilizam-se elásticos do tipo para amarrar dinheiro de preferência de cores variadas.



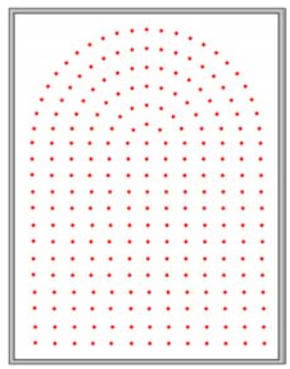
a) geoplano quadrado



b) geoplano trelissado



c) geoplano circular



d) geoplano oval

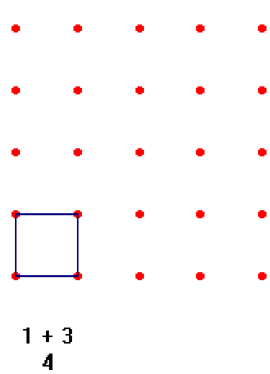
Representação geométrica dos números

O aparecimento dos números figurados está registrado na história da matemática e é atribuído o feito a conhecida Escola Pitagórica, cujo conceito teve muita influencia até o século XVII. A associação entre a geometria e a aritmética nesses números é intrigante; mostra um número de pontos distribuídos segundo uma configuração geométrica. Os Pitagóricos representavam cada unidade por um ponto e com os pontos formavam figuras que representavam números. De acordo com as figuras obtidas chamavam-lhes números triangulares, números quadrados, números pentagonais, etc.

A seguir, exploraremos algumas destas configurações utilizando vários tipos de geoplano.

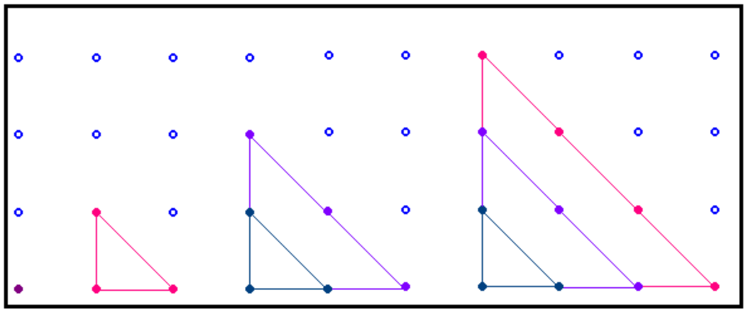
Números produtos

Ao se trabalhar a proporcionalidade é conveniente motivar a reflexão sobre a ruptura da linearidade. Uma atividade interessante de se apresentar é construir uma série de quadrados em que cada um tenha o perímetro o dobro do anterior, por exemplo, com perímetros 4, 8, 16, 25:



Números Triangulares: são os números naturais N que formam triângulos que representam geometricamente as somas dos números da série dos números naturais.

a) Assinalar no geoplano, com o auxílio dos elásticos, a seguinte seqüência:



b) Conte os pinos (que representam pontos, ou seja, unidades) e indicam os primeiros quatro termos da seqüência dos números triangulares.

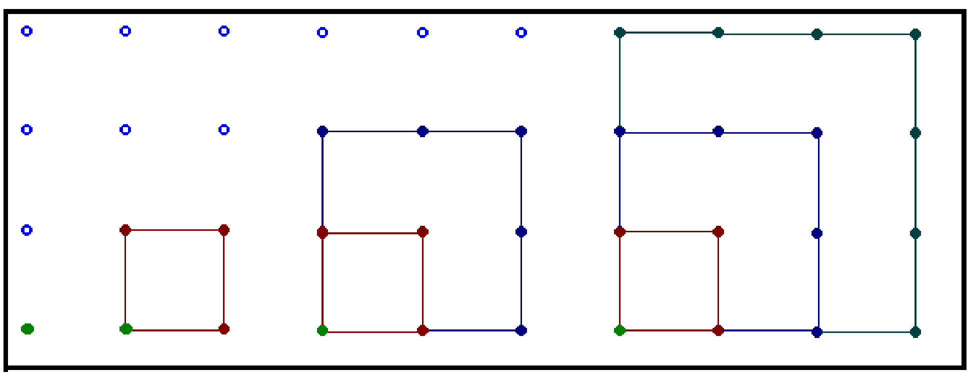
c) Qual será o próximo termo desta seqüência?

d) Explique qual é a regra que te permite obter um número a partir do anterior.

e) Procure descobrir o termo geral desta seqüência.

Números Quadrados: são os números naturais N que formam quadrados que representam geometricamente as somas dos números ímpares da série dos números naturais, assim:

A seqüência seguinte representa os números quadrados:



a) Assinalar no geoplano, com o auxílio dos elásticos, essa seqüência.

b) Contar os pinos e indicar os primeiros quatro termos da seqüência dos números quadrados.

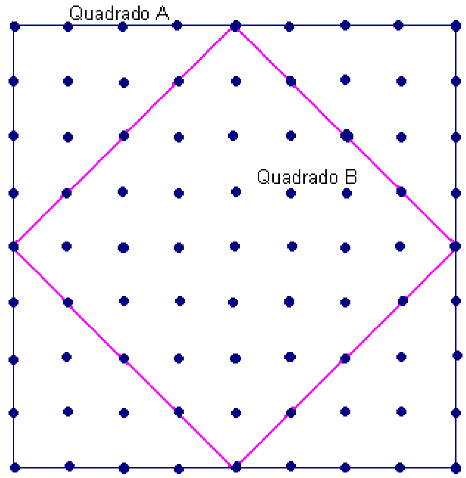
c) Qual será o próximo termo desta seqüência?

d) Explicar qual é a regra que te permite obter um número a partir do anterior.

e) Procura descobrir o termo geral desta seqüência.

3. a) Construir no geoplano, com o auxílio dos elásticos, um quadrado com "nove pinos" de lado. Tomemos como unidade o lado desse quadrado, que passará a medir 1 cm, e chamaremos **A** a este quadrado.

b) Construa outro quadrado unindo os pontos médios do quadrado anterior, tal como mostra a figura seguinte. Este quadrado será o **B**.



c) Repita este processo (unir os pontos médios de um quadrado), constrói no teu geoplano mais dois quadrados, o **C** e o **D**.

d) Constrói a seqüência das áreas dos quadrados **A**,**B**, **C** e **D**.

e) Procura descobrir o termo geral desta seqüência.

f) O que podes concluir acerca da área de um quadrado que se obtém de outro unindo os pontos médios dos seus lados?

Recursividade

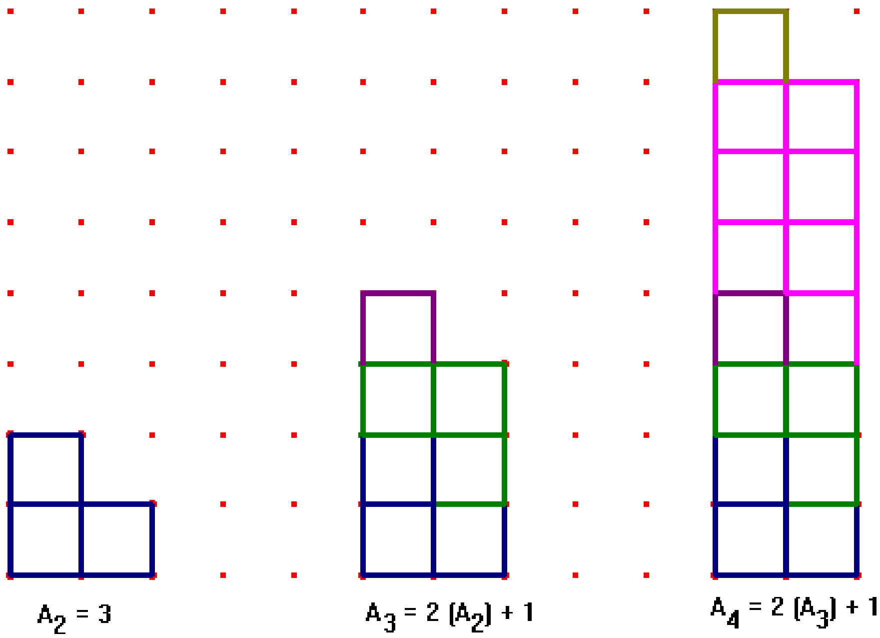
Uma função (ou um procedimento) é recursiva (o), quando possui uma ou mais chamadas a si mesma (o). Esta característica pode a princípio parecer estranha, mas o uso da recursividade muitas vezes é a única forma de resolver problemas complexos. Por exemplo: a função matemática fatorial pode ser definida do seguinte modo: $n! \;\; = \begin{cases} 1, \, se \; n = 0 \\ n(n-1)!, \, se \; n > 0. \end{cases}$

Nesta formulação o fatorial é definido à custa dele próprio, trata-se, então, de uma definição recursiva.
Por exemplo:

$$\begin{aligned} 3! \; &= 3x2! \,(pela\ segunda\ linha\ da\ definição) \\ &= 3x2x1! \,(pela\ segunda\ linha\ da\ definição) \\ &= 3x2x1x0! (pela\ segunda\ linha\ da\ definição) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Observe que o valor com que se invoca o fatorial vai diminuindo até chegar a zero, altura em que a recursividade termina.

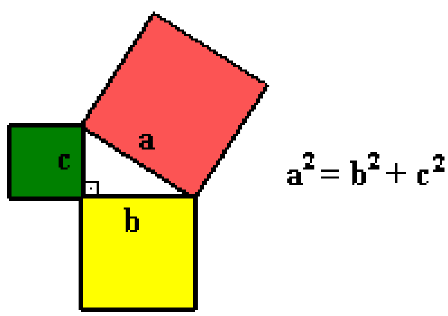
Atividade: Descubra a lei de formação das figuras abaixo:



Observe que há necessidade de se utilizar a recursividade, ou seja, a lei de formação: $A_n = 2\ A_{n-1} + 1$

TEOREMA DE PITÁGORAS:

"A área o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos."



Este teorema tem despertado a curiosidade de muitos matemáticos. Ao longo dos séculos foram apresentadas várias demonstrações do teorema de Pitágoras. Desta forma, possibilita aos estudantes o "contato" com diferentes tipos de raciocínios mostrando-lhes que não existe um único processo de demonstração.

Teorema de Pitágoras I (Autor desconhecido, cerca de 200 a. C.)

Pitágoras não só se satisfez com a generalização da propriedade a que chegou como também se preocupou com a sua demonstração. Ele considerou um triângulo retângulo cujos lados mediam uma dada unidade, a e b, e a hipotenusa, c.

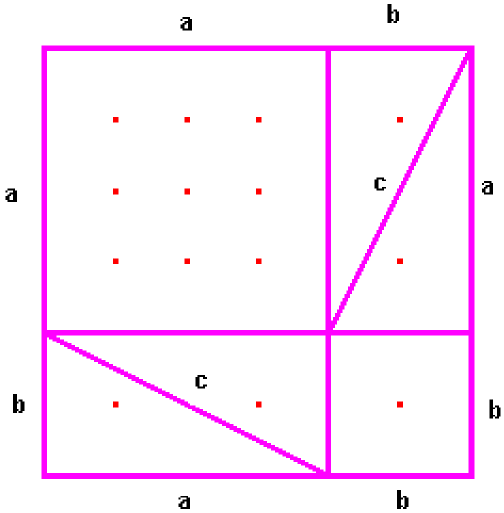


Figura 1

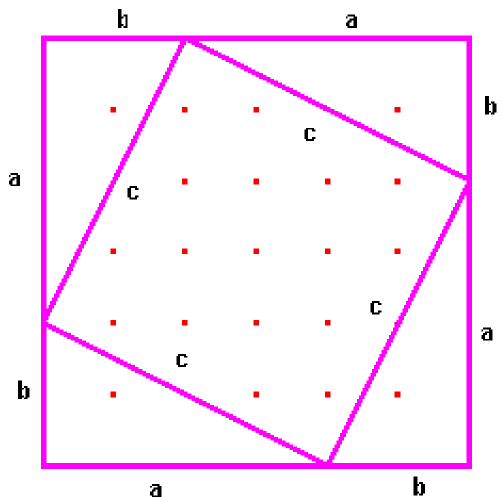


Figura 2

$$\mathbf{b^2 + c^2 + 4(ab/2) = a^2 + 4(ab/2)}$$

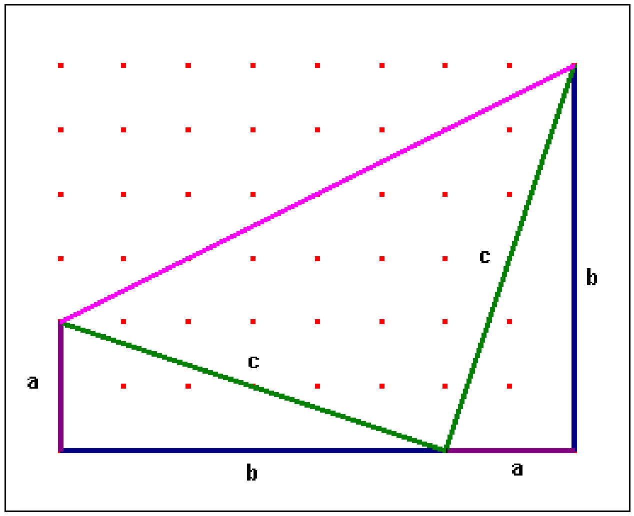
Cada figura é um quadrado de lado a + b. A figura 1 foi subdividida em quatro triângulos iguais ao inicial e num quadrado de lados iguais á hipotenusa c.
Na figura 1, os quatros triângulos retângulos são iguais.
Na figura 1 e na figura 2 estão quadrados iguais de lado **a + b**. Por outro lado **a** e **b** são os catetos do triângulo retângulo **c** é a sua hipotenusa.
Portanto, a área do quadrado a esquerda e igual a área do quadrado do lado direito.
Então: $\mathbf{4\cdot(bc/2) + a^2 + b^2 = \cdot 4\cdot(bc/2) + c^2}$
Logo: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Teorema de Pitágoras II (a demonstração do presidente)

O general James Abram Garfield (1831-1881), foi o vigésimo presidente dos Estados Unido por 4 meses, assassinado em 1881 e gostava de Matemática. Ele contribuiu com a Matemática demonstrando o Teorema de Pitágoras, segundo a figura abaixo. Observe que a área do trapézio com bases ***a***, ***b*** e altura ***a*** + ***b*** é igual à semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de 3 triângulos retângulos. A área do trapézio com bases a, b e altura a+b é igual à semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de 3 triângulos. Portanto:

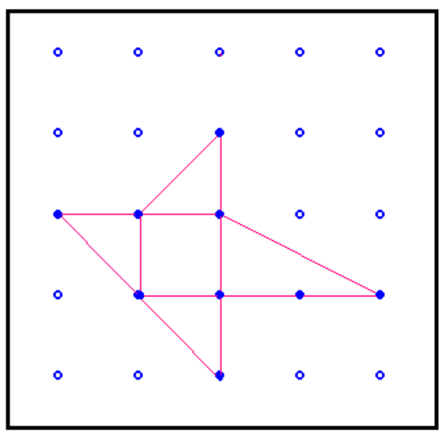
$$\left(\frac{a+b}{2}\right) x\,(a+b) \quad = \quad \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Simplificando, obtemos $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$.



Observação:
1) área do trapézio = ½ (soma das bases) * (altura)
2) decompor o trapézio em 3 triângulos retângulos e calcular a área desses triângulos.

Problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras
- Perímetros Pitagóricos
Um grande rancho australiano tem uma forma que pode ser visualizada como um quadrado, a cujos lados está justaposto um triângulo retângulo.



Todos os triângulos são diferentes em tamanho, mas têm a propriedade de os seus lados terem todos um número inteiro de quilômetros.
Qual é o menor perímetro possível do rancho?

- Números Irracionais

Represente no geoplano alguns triângulos retângulos. Responda:

a) Quanto mede a hipotenusa dos triângulos representados no geoplano?
b) Podemos colocar em ordem crescente essas medidas?

- Simplificação de radicais

Representar no geoplano segmentos que meçam: $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$.

Representar em outro geoplano, os segmentos que meçam: $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$.

O que podemos concluir?

$\sqrt{8} = \sqrt{4x2} \quad = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = \sqrt{9x2} \quad = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{32} =$ . . . . . . =. . . . .

$\sqrt{50} =$ . . . . . . =. . . . .

$\sqrt{72} =$ . . . . . . = ...

$\sqrt{98} =$ . . . . . . =. . . . .

$\sqrt{n^2 x2} =$ . . . . . . =. . . . .

Portanto:

Repita o exercício para os seguintes valores: $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{45}$.

O que podemos concluir com os seguintes valores:

- POLIGONO – Optimização

$\sqrt{20} =$ . . . . = ...

$\sqrt{45} =$ . . . . = ...

$\sqrt{80} =$ . . . . = ...

$\sqrt{125} =$ . . . . = ...

$\sqrt{245} =$ . . . . = ...

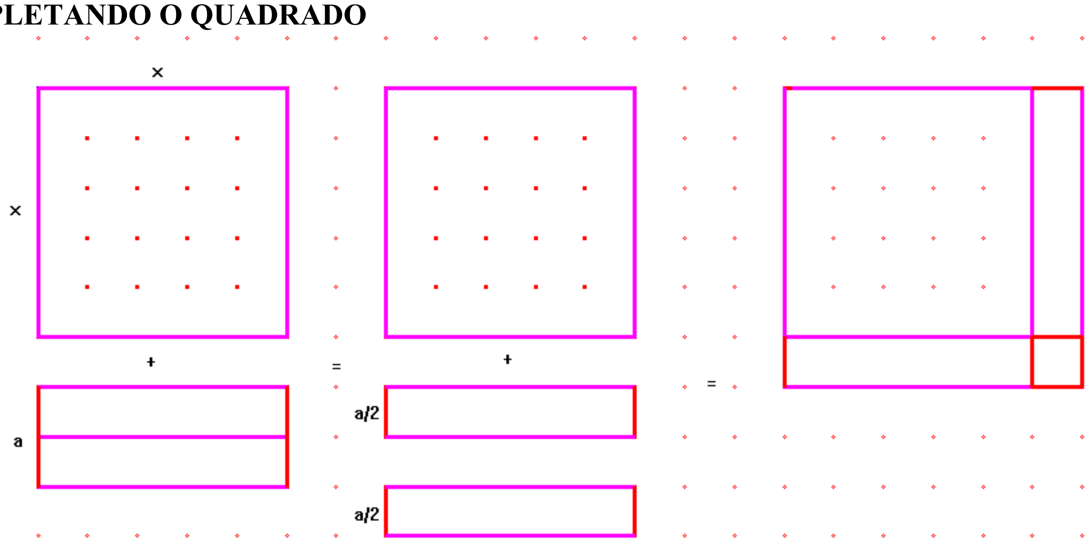
$\sqrt{98} =$ . . . . = ...

$\sqrt{n^2 x5} =$ . . . . = ...

1.Represente no geoplano os polígonos de perímetro 8u. Calcular a área de cada polígono. Qual dos polígonos que possui a maior área? Desenhe no seu caderno. Faça o mesmo exercício mas com perímetro igual a 10u.

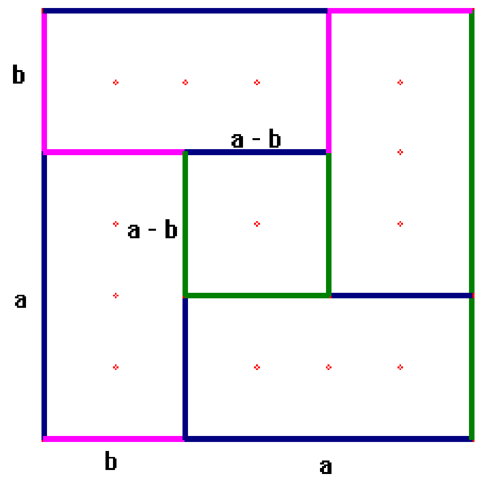
2. Represente no geoplano polígonos de perímetro iguais a $8\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, $4+2\sqrt{2}$, $7+\sqrt{5}$, $4+2\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}$....
3. Represente no geoplano os polígonos que tenha área igual à 4u.a. Qual deles tem a menor perímetro? Faça o mesmo exercício mas com áreas 6 e 8 e também com 5 e 7.

COMPLETANDO O QUADRADO



$$\mathbf{x^2 + a\,x \quad = \quad (x + a/2)^2 \quad - \quad (a/2)^2}$$

Comparando a média aritmética e a média geométrica



$$(a+b)^2 - (a - b)^2 = 4\,a\,b$$

$$\frac{(a+b)^2}{2} \geq \sqrt{ab}$$

GEORG ALEXANDER PICK

Este teorema foi descoberto pela primeira vez pelo matemático Georg Alexander Pick em 189. Pick nasceu em Viena de Áustria em 1859 e morreu durante a II Grande Guerra em 1943 no campo de concentração de Theresienstadt.

1. A FÓRMULA DE PICK PARA A ÁREA

Sabemos como determinar a área de polígonos particulares. Quando queremos determinar a área de uma região poligonal qualquer, nós a decompomos em regiões triangulares, calculamos a área de cada uma e somamos. Existe porém um outro modo de calcular a área de uma região poligonal.

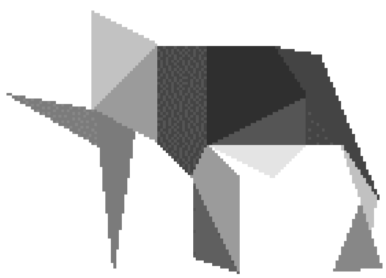
A fórmula de Pick é um teorema do final do século passado e dá um critério interessante para o cálculo de área de polígonos com vértices sobre uma malha.

Teorema (Fórmula de Pick-forma simples) -A área de uma região poligonal de vértices sobre o reticulado é dada por: A= i +(b/2)-1 onde b é o número de pontos do reticulado que estão sobre os lados da região poligonal e i é o número de pontos do reticulado que estão no interior da região poligonal.

ATIVIDADE
O Stomachion

A invenção de um dos mais antigos quebra-cabeças geométrico que se conhece é atribuída a Arquimedes, sábio grego que viveu em Siracusa, Sicília, no séc. III a.C.. Esse quebra-cabeça é chamado *Stomachion* embora não se saiba o significado preciso desta palavra (tem a mesma raiz que a palavra grega para *estômago*). A informação sobre este quebra-cabeças chegou-nos através de dois manuscritos muito incompletos mas que permitem construí-lo e observar algumas das suas características. Parece que Arquimedes fez um estudo bastante completo do quebra-cabeça, mas esse estudo não sobreviveu aos muitos séculos de guerras, pilhagens, destruições e incompreensão pelos estudos literários e científicos. O *Stomachion* é constituído por um conjunto de 14 peças planas (originalmente em marfim) de várias formas poligonais com duas características fundamentais: - podem unir-se de modo a formar um quadrado; - a área de cada peça é comensurável com a área do quadrado anterior. O que significa comensurável? Significa que o quociente entre a área de cada peça e a área do quadrado total é um número racional. É muito fácil construir o quebra-cabeça se partirmos de um quadrado de lado igual a 12

unidades. Começamos por traçar o quadrado sobre uma quadrícula de 12 por 12 (recomenda-se a utilização de papel quadriculado). Em seguida marcamos os pontos indicados na figura e unimos esses pontos. Obtivemos 14 figuras e essas são as figuras que constituem o *Stomachion*.A determinação da área de cada figura é fácil se atendermos ao seguinte resultado conhecido como Teorema de Pick: "A área de uma figura cujos vértices são vértices de uma quadrícula regular (geoplano) é igual ao número de vértices da quadrícula que se encontram no interior da figura mais metade do número de vértices que se encontram sobre a linha limite da figura a que se retira uma unidade".
O teorema de Pick só é válido para figuras simples, isto é para figuras em que os lados não se interceptam a não ser, eventualmente, nos vértices. O teorema é usado, por exemplo, na indústria florestal, para determinar a área de uma região em função do número de árvores (regularmente espaçadas). Usando este teorema é fácil provar que no *Stomachion* há 2 peças de área 3, 4 peças de área 6, 1 peça de área 9, 5 peças de área 12, 1 peça de área 21 e uma peça de área 24. Como a área do quadrado formado por todas as peças é 144, a razão entre a área de cada figura e a área do quadrado é, respectivamente, 1/48, 1/24, 1/16, 1/12, 7/48 e 1/6. Na literatura antiga aparecem várias referências ao *Stomachion;* como em Marius Victorinus (séc IV) e Atilius Fortunatus (séc VI) chamam-lhe *loculus Archimedius* (caixa de Arquimedes). Num manuscrito do poeta e estadista romano Ausonius (séc IV) o *Stomachion* é comparado a uma forma de poesia em que várias métricas são misturadas. Nesse manuscrito aparece a seguinte forma que se pode dar às peças do *Stomachion* e que aparenta ser um elefante:

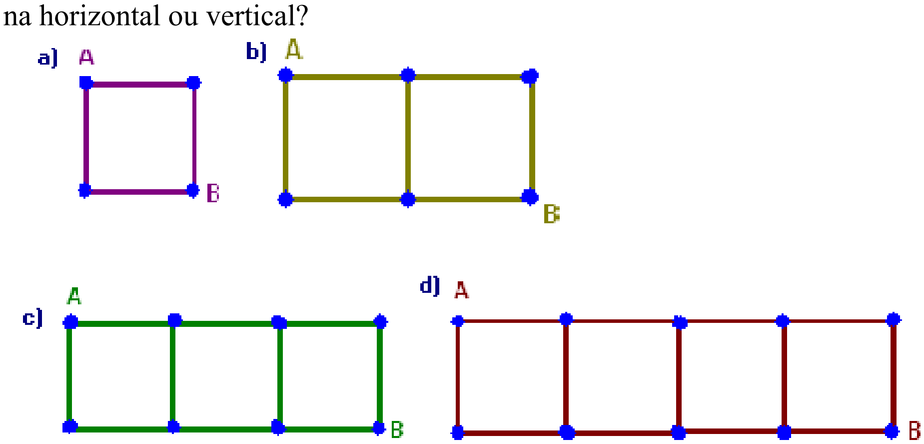


Vários problemas interessantes se podem associar às peças do *Stomachion*, além de procurar outras figuras sugestivas que se possam formar com as suas peças. Por exemplo: "Agrupar as peças do *Stomachion* de modo que as áreas (divididas pelo fator 3) dos novos fragmentos obtidos sejam representadas por:

1- três números inteiros iguais
2- três números inteiros consecutivos
3- pelos oito primeiros "números inteiros e pelo número 12."

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1.De quantas maneiras diferentes podemos sair do vértice A e ir até o vértice B, sem voltar e movimentar-se somente na horizontal ou vertical?



Observação:

Se representarmos por $\binom{2}{1}$, o número de caminhos encontrados em a); por $\binom{3}{2}$ o número de caminhos encontrados em b); por $\binom{4}{3}$ o número de caminhos encontrados em c) e por $\binom{5}{4}$ o número de caminhos encontrados em d) e assim sucessivamente.

O que significa $\binom{7}{6}, \binom{8}{7}, \binom{10}{9}\ e \binom{29}{28}$?

O que poderemos prever no m-ésimo passo?

2.Sabendo que $\binom{2}{1}$=2, determinar:

a) $\binom{3}{1}, \binom{4}{1}, \binom{5}{1}, \binom{7}{1}, \binom{8}{1}, \binom{10}{1}.\quad E \binom{29}{1}?\ E \binom{m}{1}?$

(gire o geoplano 90º)

Portanto: $\binom{3}{1} = \binom{3}{2},\quad \binom{4}{1} = \binom{4}{\ },\quad \binom{5}{1} = \binom{5}{\ }\quad \dots\quad \binom{m}{1} = \binom{m}{\ } = \quad m$

b) Representar no geoplano os seguintes números combinatórios:

$\binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{3}{3}, \binom{5}{5}, \binom{20}{20}, \binom{m}{m}.$

Então: $\binom{1}{1} = \binom{2}{2} = \binom{3}{3} = \binom{5}{5} = \binom{20}{20} = \binom{m}{m}. =$

- Determinar:

$a)\binom{5}{2}\quad e\quad \binom{5}{3}$

$b)\binom{6}{2}\quad e\quad \binom{6}{4}$

$c)\binom{7}{2}\quad e\quad \binom{7}{5}$

$d)\binom{7}{3}\quad e\quad \binom{7}{4}$

$e)\binom{m}{n}\quad e\quad \binom{m}{m-n}$

TRIÂNGULO DE PASCAL OU DE TARTAGLIA

$$\binom{2}{1} = 2 \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{1} = 3 \binom{3}{2} = 3 \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{1} = 4 \binom{4}{2} = 6 \binom{4}{3} = 4 \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5 \binom{5}{2} = 10 \binom{5}{3} = \binom{5}{4} = 5 \binom{5}{5} = 1$$

$$\binom{6}{1} = 6 \binom{6}{2} = 15 \binom{6}{3} = 20 \binom{6}{4} = \binom{6}{5} = \binom{6}{6} =$$

$$\binom{7}{1} = \binom{7}{2} = \binom{7}{3} = 35 \binom{7}{4} = \binom{7}{5} = 21 \binom{7}{6} = \binom{7}{7} =$$

$$\binom{8}{1} = \binom{8}{2} = \binom{8}{3} = \binom{8}{4} = \binom{8}{5} = \binom{8}{6} = \binom{8}{7} = \binom{8}{8} =$$

$$\binom{9}{1} = \binom{9}{2} = \binom{9}{3} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5} = \binom{9}{6} = \binom{9}{7} = \binom{9}{8} = \binom{9}{9} =$$

O que falta para este triângulo ser simétrico?

Definimos: $\binom{m}{0} = 1$, $m \in \mathbb{N}$., então complete o triângulo.

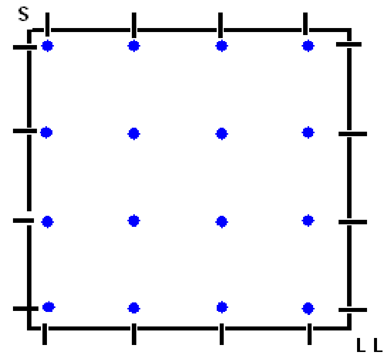
Observação: Visualização da relação de Stiffel

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \underline{\qquad} + \underline{\qquad} 1 \\ \downarrow \\ 1 \underline{\qquad} + \underline{\qquad} 2 \underline{\qquad} + \underline{\qquad} 1 \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \\ 1 \underline{\quad} + \underline{\quad} 3 \underline{\qquad} + \underline{\qquad} 3 \underline{\quad} + \underline{\quad} 1 \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ 1 \qquad\quad 4 \qquad\qquad 6 \qquad\qquad 4 \qquad\quad 1 \\ \vdots \end{array}$$

1.

a) Quantos caminhos diferentes tem-se de S para LL? (Não é permitido fazer o movimento de voltar)
b) E quantos caminhos são possíveis passando obrigatoriamente por b?
c) Escreva as três respostas sob a forma de números combinatórios.
d) Então: $\binom{5}{2} = \binom{\cdots}{2} + \binom{\cdots}{3}$

2.Representar no geoplano a figura correspondente a $\binom{6}{3}$

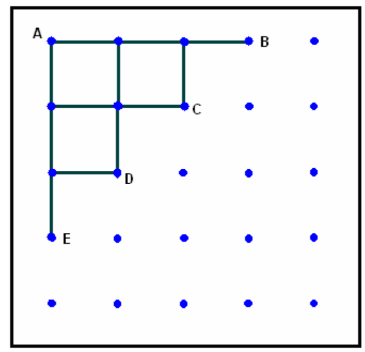


3.

a) Fixar o primeiro passo como obrigatório. Quantos caminhos existem para sair de S e chegar em L L?

b) Qual o significado de $\binom{6}{3} = \binom{\cdots}{2} + \binom{\cdots}{3}$?

4.



a) Quantos caminhos diferentes existe saindo de A e chegando em B?
b) E de A a C?
c) E de A a D?
d) E de A a E?
e) Escreva os números combinatórios correspondentes:
f) Então:

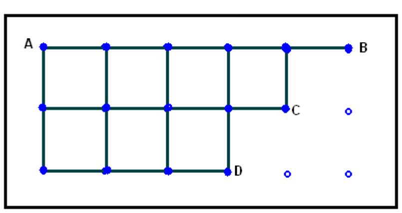
$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^{\cdots}$$

5.

a) Quantos caminhos diferentes existem saindo de A e chegando em B?
b) E de A a C?
c) E de A a D?
d) E de A a E? E de A a F?
e) Escreva os números combinatórios correspondentes:
f) Então:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^{\cdots}$$

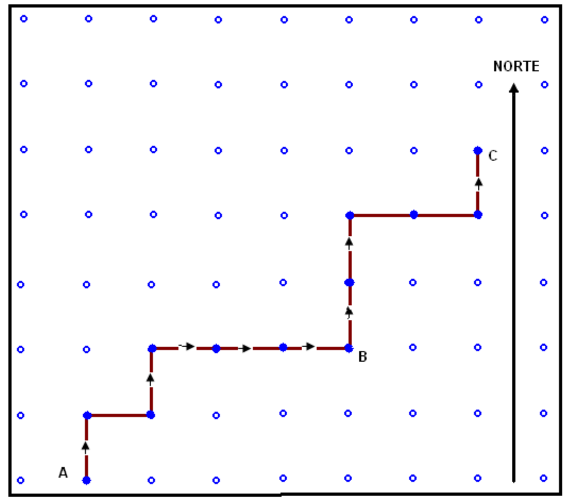
6.



a) Quantos caminhos diferentes existem saindo de A e chegando em B?
b) E de A a C?
c) E de A a D?
d) Escreva os números combinatórios correspondentes:
e) Então:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^{m}$$

7.
(Fuvest-SP) A figura a seguir representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João Paulo (A), de Maria Cristina (B), a escola (C) e um possível caminho que João Paulo percorre para, passando pela casa de Maria Cristina, chegar à escola. Qual é o número total de caminhos distintos que João Paulo poderá percorrer, caminhando somente para o Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria Cristina?

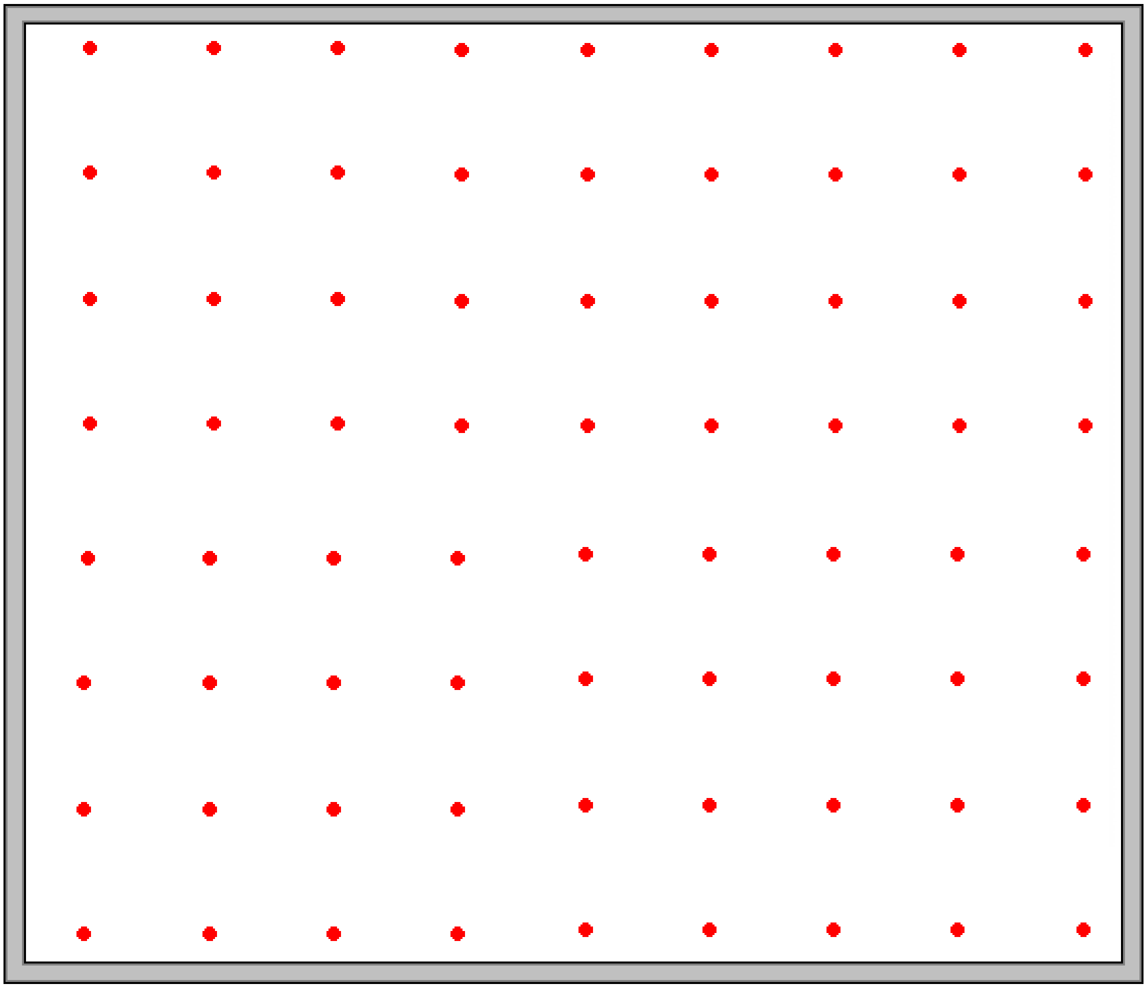


"Educai as crianças e não será preciso punir os homens".
Pitágoras

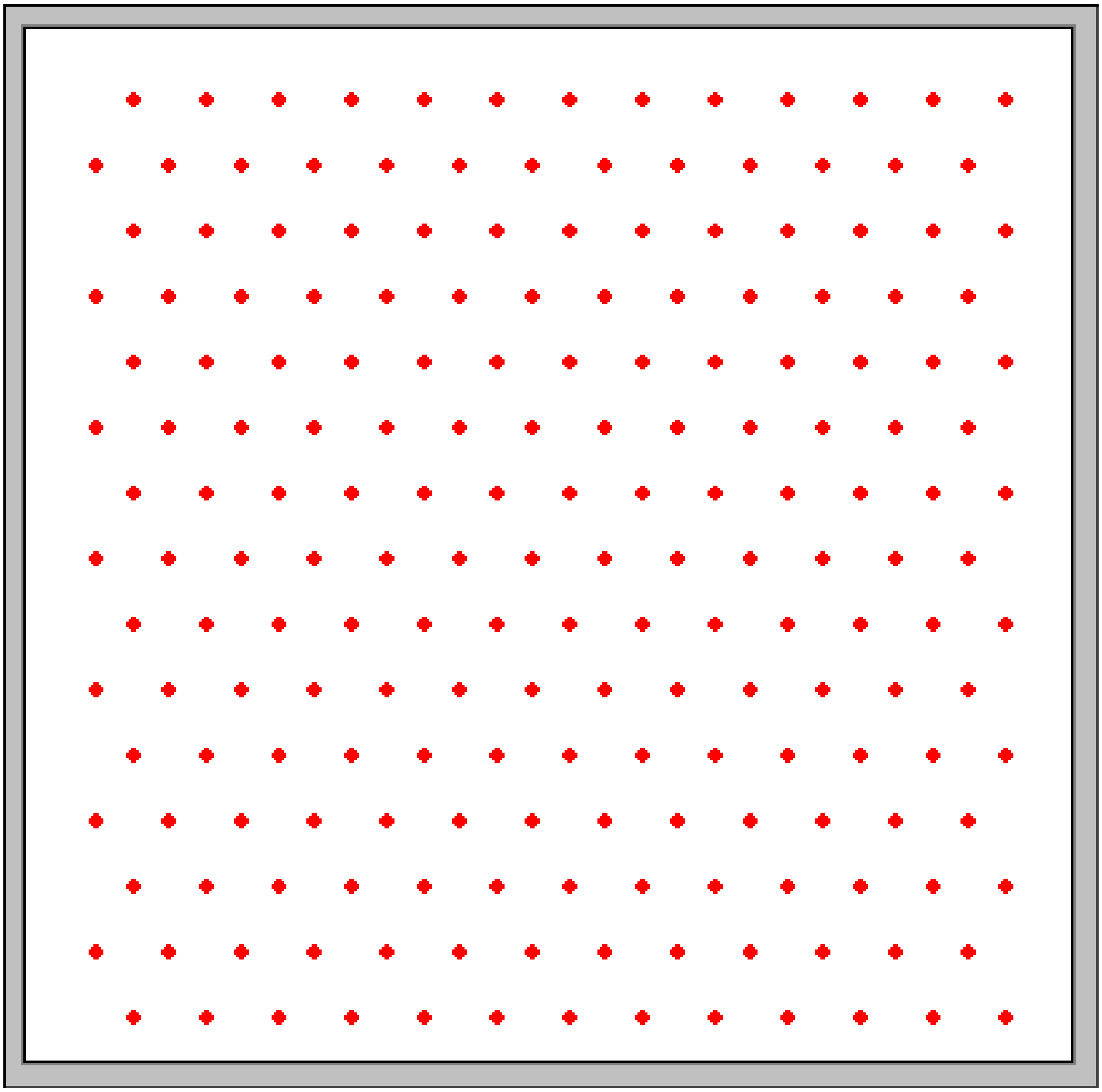
BIBLIOGRAFIA

BOLT, Brian. Divertimentos Matemáticos, Lisboa, 1990.
BOLT, Brian e HOBBS, David. 101 Problemas de Matemática, Lisboa, 1991.
RANCHAL, Carmen Jalón. El geoplano: actividades para el aula. VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática “Thales”, p. 473-486,1995.
MACHADO, Rosa Maria. Números: a filosofia dos gregos que ainda sobrevive. Dissertação de mestrado-FE-Unicamp,1993.

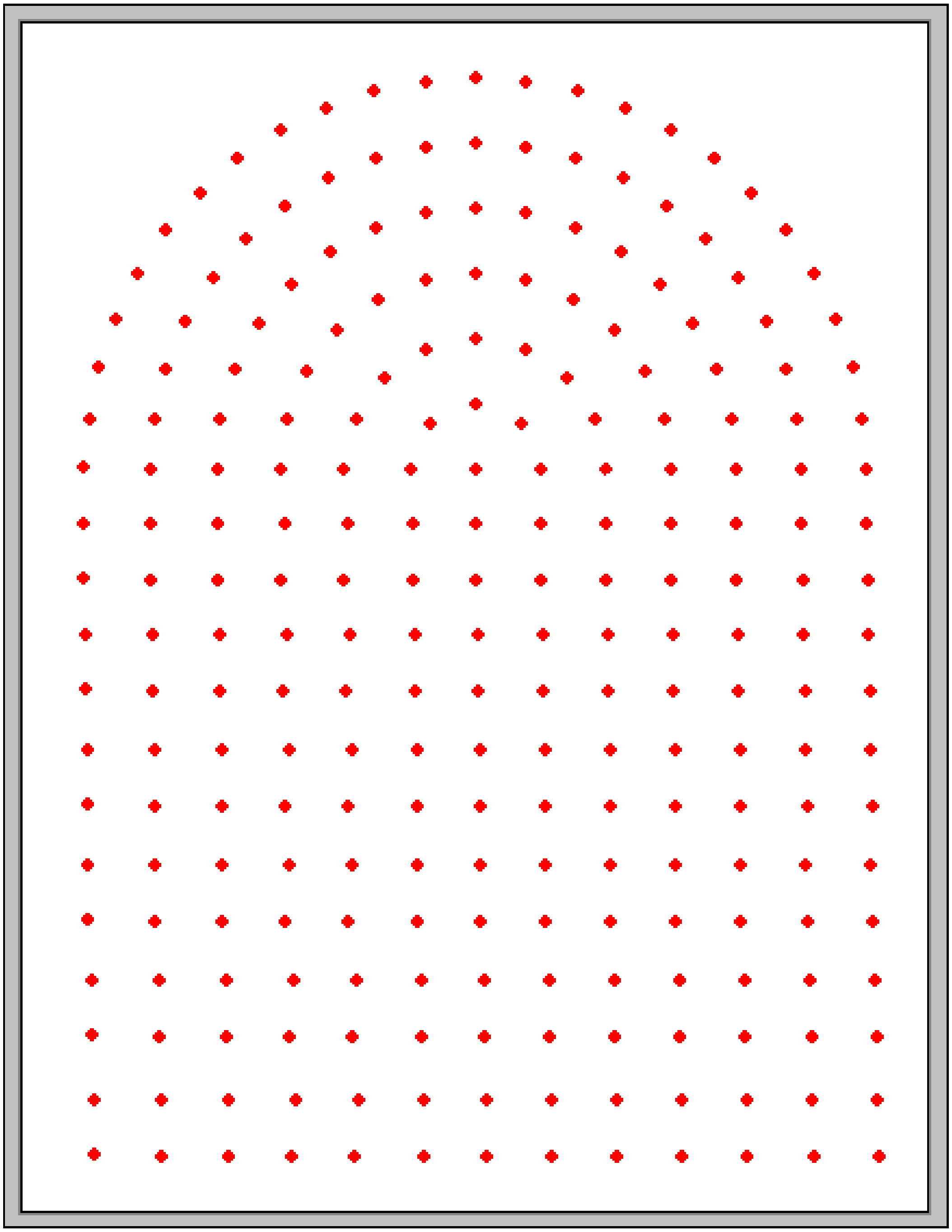
Geoplano Quadrado



Geoplano Trelissado



Geolplano oval



Geoplano Circular