

Aula

9

O GEOPLANO

META

Apresentar o geoplano como um material didático que pode ser utilizado nas aulas de Matemática

OBJETIVOS

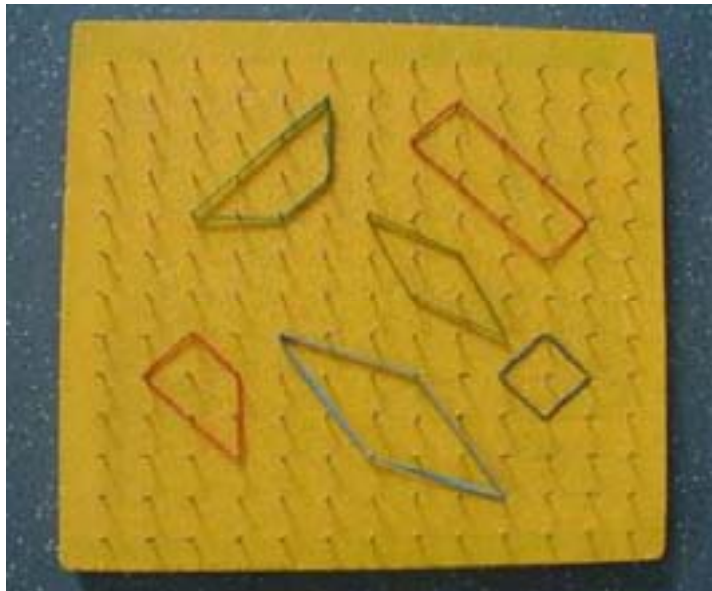
Ao final desta aula, o aluno deverá:

reconhecer as características do geoplano;

realizar e elaborar atividades com o auxílio do geoplano e com a resolução de problemas ou modelagem-modelação matemática como metodologias de ensino.

PRÉ-REQUISITOS

Temas tratados nas aulas sobre as tendências metodológicas da Educação Matemática, bem como na aula sobre os materiais didáticos.



(Fontes: <http://www.diadia.pr.gov.br>).

INTRODUÇÃO

Nesta aula vamos analisar as características do geoplano como um material didático que pode auxiliar o professor nas aulas de Matemática, principalmente ao tratar de temas relacionados ao bloco de conteúdos Espaço e Forma e Grandezas e Medidas (BRASIL, 1998). Para abordar tais conteúdos, com apoio do geoplano, pode-se entrelaçar caminhos diferenciados de acordo com as tendências metodológicas da Educação Matemática, tais como: resolução de problemas, modelagem-modelação matemática e tecnologias.

Deste modo, a partir de questões iniciais que objetivam promover o reconhecimento do material didático, desenvolveremos uma atividade de modelagem-modelação matemática para explorar ideias relacionadas com o cálculo da área de polígonos simples no geoplano, isto é, polígonos cujo bordo é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice.

O objetivo nesta primeira experiência é que você reúna elementos para expandir as formas de utilização deste recurso como um meio auxiliar para promover o ensino e a aprendizagem da Matemática no ensino fundamental ou no ensino médio.

Mas, você já conhece um geoplano? Se você respondeu negativamente a indagação tem a oportunidade de avaliar este material didático. Se respondeu sim, quais são as malhas do geoplano que você conhece? Você sabia que existem diferentes tipos de malha? Vamos identificar estes tipos de malha e outras características do geoplano?



Nascido na Alexandria, Egito, é mais conhecido pelas propostas inovadoras do ensino e aprendizagem de matemática. Foi o responsável pela criação do geoplano, um recurso didático que permite uma maior compreensão de termos abstratos e introdução de muitos conceitos geométricos.

(Fonte: <http://www.atm.org.uk>)

O GEOPLANO

A etimologia da palavra geoplano vem do inglês “geoboards” ou do francês “geoplans” e é composta pela junção de “geo” e “plano”. “Geo” origina de geometria e “plano” tábua ou tabuleiro, ou, ainda, superfície plana.

O geoplano foi originalmente desenvolvido por Caleb Gattegno, no Institute of Education, London University e em seu artigo *L’enseignement des Mathematiques*, publicado em 1961, após descrever sobre os diferentes tipos de geoplano que podem ser construídos, enfatiza que:

"Todos os geoplanos têm indubitável atrativo estético e foram adotados por aqueles professores que os viram ser utilizados. Podem proporcionar experiências geométricas a crianças desde cinco anos, propondo problemas de forma, dimensão, de simetria, de semelhança. De teoria dos grupos, de geometria projetiva e métrica, que servem como fecundo instrumentos de trabalho, qualquer que seja o nível". (GATTEGNO, 1961, apud KNIJNIK; BASSO; KLÜSENER, 1996, p. 5-6).

Para Machado (2009), o geoplano é “um meio, uma ajuda didática, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa ao caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes” (p. 1).

O geoplano é um tabuleiro de madeira com pinos (pregos) regularmente espaçados segundo uma distribuição quadrangular, circular, hexagonal, triangular, oval, sendo que, a depender do modo como são dispostos os pregos, é denominado o modelo do geoplano (Figura 1), como destaca Machado (2009):

- geoplano quadrado: é uma rede de pinos (pregos) dispostos sob a forma de vértices de um quadrado. Este modelo pode ser fabricado em diversos tamanhos conforme o nível desejado de trabalho. Temos de 9 pregos ou 3 x 3; 16 pregos ou 4 x 4, 25 pregos ou 5 x 5 e assim por diante;
- geoplano circular: é uma rede com pinos dispostos em círculo, com um determinado número de círculos concêntricos;
- geoplano treliçado ou triangular isométrico: é uma rede que apresenta os pinos que determinam triângulos equiláteros;
- geoplano oval.

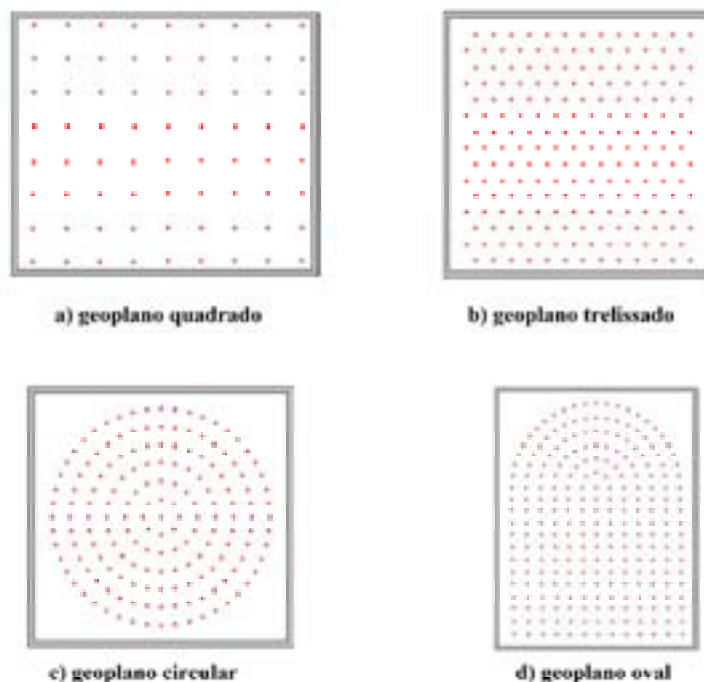


FIGURA 1: Modelos de Geoplano
Fonte: Machado (2009, p. 2)

É pertinente ressaltar que existem algumas variações nos modelos de geoplano circular, tais como uma única marca que é a da circunferência com um prego no centro em uma tábua quadrada ou circular.

Neste momento você deve estar um tanto quanto surpreso, pois, independentemente do formato da rede que compõe o geoplano, ele é uma tábua de madeira com pregos!!! Mas, para que servem os pregos?

Os pregos (pinos) são utilizados para prender os atilhos de borracha (ligas, elásticos, barbantes), de preferência coloridos, que permitem “desenhar” figuras geométricas planas. A partir dessas informações iniciais, proponho um desafio inicial que, depois, você pode sugerir aos seus alunos.

ATIVIDADES

É possível confeccionar um geoplano a partir de um quadrado de 32 cm de lado, com oito pontos (pregos) em cada linha e em cada coluna e dispor estes pontos de forma que as distâncias entre eles, tanto na horizontal quanto na vertical, sejam as mesmas?

Para executar a atividade você pode orientar seus alunos a utilizarem uma base de madeira conforme foi mencionado anteriormente ou então outros tipos de materiais como isopor, por exemplo. Se eles optarem pelo



isopor como base, lembre-se de que o isopor não é tão resistente quanto a madeira e os pregos ou pinos deverão ser substituídos por palitos de madeira ou alfinetes.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

E então, foi fácil refletir sobre a construção de um geoplano com tais dimensões e com aquela quantidade de pregos?

O importante nesta atividade é que você experimente o processo de construção para depois realizá-lo com seus alunos, pois, como afirma Lorenzato (2006, p. 28), “Talvez a melhor das potencialidades do MD seja revelada no momento da construção do MD pelos próprios alunos, pois é durante esta que surgem imprevistos e desafios, os quais conduzem os alunos a fazer conjecturas e descobrir caminhos e soluções”.

Como sugestão, apresento um modo de confeccionar um geoplano com os seguintes materiais: um bloco de madeira de aproximadamente 15 mm de espessura medindo: 36cm x 36cm de base e altura (acrescentei 2cm em cada lado do quadrado para termos uma borda); 64 pregos; martelo; papel milimetrado e fita adesiva.

Para construí-lo, inicialmente é necessário lixar e prender o papel milimetrado no bloco de madeira com a fita adesiva. A seguir, marque os pontos onde deverão ser fixados os pregos, de modo que fiquem igualmente espaçados na horizontal e vertical (sugestão: 4cm x 4cm). Depois crave os pregos a meia altura nos pontos marcados anteriormente e retire o papel milimetrado. Para finalizar e deixar o geoplano mais apresentável use a criatividade, pintando-o da forma que desejar. A atividade de personalizar o geoplano é muito bem aceita pelos alunos.

Como ressaltou Lorenzato (2006), no momento de construção podem ser formuladas e aperfeiçoadas algumas conjecturas em relação às potencialidades e aos limites do material. Durante a construção do geoplano, quais foram as evidências que o conduziram a comprovar ou rejeitar as suas conjecturas iniciais?

Provavelmente você pensou em alguns conteúdos matemáticos que pudessem ser desenvolvidos com apoio deste recurso. Que conteúdos seriam esses?

O formato do material com os pregos regularmente distribuídos como uma malha quadriculada e a possibilidade de cercar uma determinada região com os aílhos remetem, quase que imediatamente, ao conceito de perímetro e área. Você concorda com estas possibilidades?

Você pensou em outros temas? Quais? Compartilhe suas sugestões apresentando-as no fórum de discussão da plataforma.

ALGUMAS POSSIBILIDADES DO USO DO GEOPLANO EM UMA AULA DE MATEMÁTICA

A partir de agora você pode utilizar o seu geoplano quadrado, 8x8, para desenvolver algumas atividades didáticas que foram adaptadas das sugestões apresentadas por Knijnik, Basso e Klüsener (1996). Como mencionei anteriormente, o intuito de realizar tais atividades é que você reúna elementos para ampliar os modos de emprego do geoplano, como um meio auxiliar para promover o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Momento 1: Explorando a noção de perímetro

- Você poderia utilizar o geoplano para trabalhar com o conceito de perímetro? De que forma?
- Acredita que, independentemente do ano escolar em que o aluno se encontra, o geoplano é um recurso adequado para auxiliar na apreensão do conceito de perímetro? Por quê?
- Como você pode definir o perímetro de um polígono?

Seguramente, pensou na ideia de soma das medidas de todos os lados da figura. Então, se seu aluno representasse os polígonos C e D no geoplano (figura 2), como você poderia determinar o perímetro dos referidos polígonos?

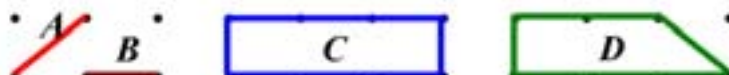


Figura 2:
Fonte: Adaptação de LEIVAS (2009, p. 4)

Um caminho seria, inicialmente, explorar a ideia de comprimento, por meio da comparação entre os comprimentos das linhas A e B. Para tanto, é necessário considerar a distância entre dois pregos na horizontal ou na vertical, ou seja, de 4 cm entre um prego e outro, como uma unidade de comprimento (1 u.c.) e explorar a relação de ordem entre os números reais. Além disso, de acordo com os encaminhamentos propostos o aluno pode relacionar que π não é um número racional, a depender do ano escolar que ele se encontra. Deste modo, por meio da análise de polígonos construídos no geoplano é possível determinar que existem polígonos que possuem perímetro inteiro, como o da figura C, cujo resultado é um número inteiro

de unidades de comprimento do geoplano, ou polígonos que possuem um perímetro não-inteiro, como o da figura D.

[

Momento 2: Explorando a noção de área para polígonos com perímetro inteiro e perímetro não inteiro.

- É possível calcular a área de polígonos que possuem perímetro inteiro no geoplano, sem utilizar fórmulas e algoritmos? De que modo? Utilize o seu geoplano e verifique as alternativas.

Neste momento, você, provavelmente, pensou em determinar uma unidade de área e “contar” quantas unidades de área possui cada polígono.

- Mas, como é possível definir uma unidade de área com o geoplano?

A partir do entendimento de unidade de comprimento (u.c.), pode-se atribuir ao quadrado de lado 4 cm a área de 1(uma) unidade de área (1 u. a.).

- No entanto, você já percebeu que nem sempre os lados dos polígonos representados no geoplano correspondem a números inteiros de unidade de comprimento. Então, como se calcula a área de um polígono que não possui perímetro inteiro sem utilizar fórmulas de cálculo de área das figuras geométricas? Quais seriam as estratégias? Investigue sobre este problema!

Então, quais são as possibilidades?

Neste momento, pode-se recorrer a duas estratégias: partir a figura ou completar a figura, como descrevo a seguir:

-Partir a figura de modo que seja decomposta em quadrados, retângulos ou triângulos, sendo que os quadrados e os retângulos tenham perímetro inteiro.

Mas, e no caso do triângulo? Como decompor uma região poligonal em um triângulo pode contribuir para o cálculo da área do polígono sem utilizar fórmulas das áreas das figuras geométricas?

Fique atento ao fato de que a área de um triângulo retângulo isósceles que possui catetos com 1 u.c. corresponde à metade da área do quadrado de lado 1 u.c., assim, ao partir a figura em triângulos, como o citado anteriormente, é possível determinar a área sem utilizar fórmulas.

-Completar a figura de modo que sejam formados quadrados ou retângulos.

Você concorda com essas estratégias? Com tais estratégias, poderia, por exemplo, determinar a área da seguinte região (figura 3) partindo-a ou completando-a?

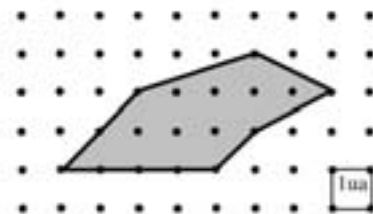


Figura 3

Fonte: <http://www.opm.mat.br>

Nº de pregos tocados pelo elástico (pregos de fronteira)	Nº de pregos no interior	Área Total (unidade de área é o menor quadrado do geoplano)

- Será que existe alguma regularidade entre os pregos da fronteira, os pregos do interior e a área da respectiva figura geométrica?
- É possível determinarmos um modelo matemático para esta regularidade?
- Qual é a expressão algébrica deste modelo?

Esta expressão algébrica é denominada fórmula de Pick, pois é um teorema do matemático tcheco Georg Alexander Pick (1859-1942) de 1899 e determina um critério interessante para o cálculo de área de regiões poligonais simples num reticulado plano, como, por exemplo, o geoplano.

Por meio da interpretação da fórmula identifica-se que a área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dado pela expressão

$$A = \left(\frac{f}{2}\right) + i - 1$$

onde f é o número de pontos da rede situados sobre a fronteira (bordo) do polígono e i é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

Retome o problema proposto no momento 2 (figura 3) e realize novamente o cálculo utilizando a Fórmula de Pick. Foi mais fácil determinar a área da região?

Então, você gostou da experiência com o geoplano?

Observou que, por meio de alguns encaminhamentos iniciais, a partir de questionamentos, utilizou-se das orientações da modelagem-modelação matemática (BIEMBENGUT; HEIN, 2000) para compor esta sequência de atividades?

Tal sequência poderia, ainda, ser embasada na resolução de problemas ou nas tecnologias, pois existem softwares livres que permitem a repre-

sentação das figuras em diferentes malhas simulando um geoplano. Dentre os disponíveis na rede sugiro os sítios: <http://www.mattimath.com/> ou http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_127_g_2_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html.

No entanto, é importante que, se optar pela utilização das tecnologias, o aluno tenha tido um contato com o geoplano como objeto concreto. Assim ele estará preparado para o nível de abstração que é necessário no trabalho com o software.

ATIVIDADES

1. Elabore uma atividade didática que tenha como um dos recursos o geoplano. Esta atividade didática deve enfatizar o teorema de Pitágoras e ter duração de aproximadamente 2 horas-aula, seguindo as orientações anteriores, contendo título, conteúdo(s) explorado(s), ano/série, objetivo(s), recurso(s), procedimento(s) e referências bibliográficas, tendo que perpassar pela resolução de problemas ou a modelagem-modelação matemática como metodologias de ensino.



COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Qual o objetivo de sua atividade didática que vai enfatizar o Teorema de Pitágoras? Você pretende introduzir ou fixar um conteúdo matemático? Estou curiosa e aguardando sua proposta na plataforma. Bom trabalho!

2. Você conhece o “geoespaço” ou geoplano espacial? Realize uma pesquisa sobre este recurso didático e elabore uma produção textual apresentando as suas características e possibilidades de uso como um material didático que apoia o desenvolvimento de conteúdos matemáticos no ensino médio.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

E então, qual foi a sua impressão sobre o geoplano espacial? Você o considera um bom recurso para ser empregado nas aulas de Matemática? Para realizar atividades relacionadas ao tema estruturador dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999; BRASIL, 2002)? De que forma? Orientado por que metodologia de ensino?

CONCLUSÃO

Nesta aula busquei caracterizar o geoplano como um recurso didático e expandir as possibilidades de emprego do referido material por meio de uma experiência que, a partir de questões iniciais, assumiu as orientações da modelagem-modelação matemática como princípio metodológico.

De acordo com (BIEMBENGUT; HEIN, 2000), este tipo de abordagem contribui para o desenvolvimento de habilidades relacionadas a resolução de problemas e estimula a criatividade do aluno, tornando-se uma possibilidade de romper com a rotina da aula expositiva.

Ao desenvolver a modelagem-modelação matemática com apoio do geoplano são mobilizadas muitas representações matemáticas. Isto porque a representação figural no próprio material didático pode ser registrada no caderno e posteriormente representada por meio de tabelas, gráficos, símbolos matemáticos para, por meio das análises, ser representada por uma expressão algébrica que é o modelo matemático do fenômeno analisado.

Mas é imprescindível destacar que um modelo é proveniente de aproximações realizadas para entender melhor um fenômeno específico. Deste modo, dependendo do nível/ano escolar em que se encontram os alunos podem ser propostas atividades que visam comprovar a validade da fórmula de Pick.

Para tanto, é necessário recorrer à demonstração matemática do Teorema de Pick. Na plataforma estão disponíveis alguns textos que tratam da demonstração do referido teorema, mas você pode, e deve, buscar outras informações.

RESUMO

O geoplano é um material didático, composto por uma base em formato geométrico com pinos, formando uma malha. A malha mais comum utilizada é a quadriculada, porém, também há malhas treliçadas, circulares, ovais, entre outras. Além da versão em material físico, já existe o geoplano virtual, podendo-se fazer as atividades on-line. Com o apoio deste recurso desenvolvem-se atividades didáticas relacionadas aos conceitos matemáticos em diferentes níveis de ensino, pois permitem experiências geométricas de teoria dos grupos, de geometria projetiva e métrica. Optei por uma abordagem que explorou questões iniciais sobre a noção de perímetro e área para determinar uma expressão algébrica que permite calcular a área de um polígono simples representado no geoplano quadrado, denominada fórmula de Pick, por meio da modelagem-modelação matemática, visto que esta metodologia permite que o aluno participe ativamente das atividades propostas, por meio da pesquisa, da experiência, da mobilização dos conhecimentos prévios e do envolvimento em atividades matemáticas complexas, tornando-se co-responsável por sua aprendizagem.



PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos utilizar o Tangram para abordar conteúdos matemáticos dos blocos Espaço e Forma e Grandezas e Medidas (BRASIL, 1998).



AUTOAVALIAÇÃO

Será que vou conseguir empregar o geoplano como um material didático que possibilita abordar outros conteúdos matemáticos, aliando-o à modelagem matemática como metodologia de ensino?



REFERÊNCIAS

- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. Blumenau/SC: Contexto, 2000.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 1999.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- KNIJINIK, G.; BASSO, M.V.; KLÜSENER R. **Aprendendo e ensinando matemática com o geoplano**. Editora UNIJUI, 1996.
- LEIVAS, J. C. P. **Geoplano**. Fundação Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Disponível em <<http://mathematikos.psico.ufrgs.br/textos/geoplan.pdf>>. Acesso em: 21 set. 2009.
- LORENZATO, S. (org). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006.
- MACHADO, R. M. **Mini-curso - explorando o geoplano**. In: Anais da II Bient da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf>>. Acesso em: 10 set. 2009.
- XXXII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA SÃO PAULO. Prova da Primeira fase. Nível α . Disponível em <http://www.opm.mat.br/provas/opm_2008_1.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2009.