Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
PPGM - Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

A Probabilidade Aplicada aos Jogos de Azar

por

Rafael Thé Bonifácio de Andrade

sob orientação do

Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Janeiro/2017
João Pessoa - PB

A553p Andrade, Rafael Thé Bonifácio de.
A probabilidade aplicada aos jogos de azar / Rafael Thé Bonifácio de Andrade.- João Pessoa, 2017.
69f. : il.
Orientador: Alexandre de Bustamante Simas
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Teoria dos jogos. 3. Probabilidade. 4. Jogos de azar.

UFPB/BC CDU: 51(043)

A Probabilidade Aplicada aos Jogos de Azar

por

Rafael Thé Bonifácio de Andrade

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: probabilidade

Aprovada por:

Alexandre de B. Simas

Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas - UFPB (Orientador)

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitório - UFPE

Janeiro/2017

Agradecimentos

Neste momento gostaria de agradecer imensamente a várias pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para esse importante passo, mas primeiramente a Deus pela vida e saúde física e mental para percorrer este longo caminho até aqui.

Gostaria de agradecer a meus avós Dinarte e Oneida pelo incentivo dado ao pontapé inicial e segurarem a barra em vários momentos de fraqueza e precisão.

Aos meus pais Ana Tereza e Nelson Ricardo (*in memorian*) pela formação pessoal e intelectual desde meu nascimento até hoje, os quais foram exemplo de caráter, profissionalismo e luta pela sobrevivência.

Aos meus padrinhos Maria de Fátima Andrade Melo e Ilson de Melo Filho pelo acompanhamento e cobranças da minha educação e meu lado profissional.

A todos os meus amigos da turma 2015 do PROFMAT que estiveram comigo desde o início, me apoiando e me aconselhando, os quais eu nunca esquecerei, em especial a pessoa de Mailson Alves que se tornou um dos melhores amigos que Deus colocou no meu caminho.

Ainda no âmbito do PROFMAT, gostaria de agradecer ao prof. Dr. Bruno Ribeiro por toda paciência e orientações ao longo do programa, e ao prof. Dr. Alexandre de Bustamantes Simas, o qual me orientou mesmo frente a situações pessoais adversas.

E especialmente a minha esposa Thaísa Andrade por toda força, compreensão, amor, ajuda e tantas outras virtudes que demonstrou ter comigo durante todo tempo que nos conhecemos, e principalmente nesta época, ficando ao meu lado para o que quer que acontecesse, a qual não teria como expressar nem mensurar o tamanho do meu agradecimento e o que sinto por ela.

Dedicatória

A Deus. A Thaísa. Aos meus familiares. Àqueles que direta ou indiretamente estiveram presentes nesta etapa da minha vida. A todos os que se alegram com minha vitória.

Resumo

Os jogos são presentes em todas as fases da vida do ser humano e alguns deles são considerados Jogos de Azar. A teoria dos jogos é o ramo da matemática que estuda modelos de decisão onde o objetivo é ter ganhos, e é aplicável a diversos estudos comportamentais incluindo economia, ciências políticas, psicologia e lógica. Os jogos estudados nesta teoria possuem elementos bem definidos como jogadores, informações e ações. Neste trabalho veremos que os Jogos de Azar são aqueles que tem a maior probabilidade de derrota do que de vitória, trataremos de alguns jogos bastante conhecidos e comuns como: Pôquer, Blackjack, Craps, Roleta e Loteria como a Mega-Sena. Mostrar o funcionamento desses jogos, um pouco das suas histórias e as probabilidades de um jogador obter sucesso ao jogar, a fim de demonstrar matematicamente as reais chances de se ganhar ao jogar os famosos jogos de azar.

Palavras-chave: teoria dos jogos; probabilidade; jogos de azar.

Abstract

Games are present in all phases of human life and some of them are considered game of chance. Game theory is a branch of mathematics concerned in decision models where the goal is to gain, and is applicable to several behavioral studies including economics, political science, psychology, and logic. The games studied in this theory have well defined elements such as players, information and actions. In this work we will see that games of chance are games that are more likely to be defeated than win, we will deal with some well known and common games such as: Poker, Blackjack, Craps, Roulette and Lottery as the Mega-Sena. Show how these games work, their stories and the odds of a player to be successful in playing, in order to show mathematically the real chances of winning when playing these famous games.

Key words: games theory ; probability ; gambling.

Sumário

Introdução

Os Jogos de Azar sempre intrigaram as civilizações, independente da época ou da localização geográfica de tal civilização. Uma vez que os primeiros jogos surgiram desde a época dos Impérios Romanos e continuam chamando a atenção de pessoas até hoje por lazer, esporte ou até fonte de renda, os Jogos de Azar são intrigantes por diversos aspectos.

Atualmente existem vários tipos de Jogos de Azar, mas no Brasil a grande maioria é proibida desde 1946, durante o Governo Dutra, proibição essa relatada no livro "A Noite do Meu Bem"(Ruy Gaspar), ficando somente liberada a exploração desse tipo de jogos através da Loteria Federal. Os demais Jogos de Azar são facilmente encontrados em cassinos, espalhados pelas mais diversas localidades de muitos países em todos os continentes.

A legalização dos Jogos de Azar vem levantando várias discussões políticas e sociais no Brasil, principalmente pela quantidade de dinheiro que deixa de ser arrecadada com impostos e a clandestinidade dos Jogos de Azar ser relacionada a crimes como falsidade ideológica, lavagem de dinheiro, tráfico de influência, tráfico de drogas e prostituição. Uma vez que os jogos com apostas podem movimentar muito dinheiro, vários jogadores dependem deles como meio de sustento. Em contrapartida, jogadores que se tornam viciados, adquirindo uma patologia, colocam em risco sua saúde e patrimônio próprio e de pessoas próximas.

A escolha desse tema partiu de uma conversa com o orientador prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas, que na oportunidade falávamos do fato da população ser enganada constantemente em vários aspectos, inclusive educacionais. E algumas pessoas, mesmo sabendo de certos riscos e de poucas chances de vitória, preferiam arriscar até mesmo o que não tinham. Fato esse que nos levou a refletir o comportamento dos jogadores de certos tipos de jogos, inclusive os Jogos de Azar.

Mas, a quantidade de jogos são imensos. Então, decidi focar esse trabalho em alguns jogos historicamente muito populares no mundo e o mais popular deles (legalizado) no Brasil.

Esse trabalho versará, portanto, sobre os seguintes Jogos de Azar: jogos de cartas (Pôquer e Blackjack), jogo de dados (Craps), jogo de Roleta e jogo de loteria (Mega-Sena). Para cada um desses jogos, será contada uma breve história e a forma como se deve jogar, bem como as regras.

Logo após explicados os procedimentos para jogar tais Jogos de Azar, serão mostradas as formas de apostas e as probabilidades de se obter sucesso (ou vitória) para cada tipo de aposta feita pelo jogador.

O objetivo desse trabalho não é ensinar a jogar, mas sim analisar e mostrar que os Jogos de Azar foram criados para fazer com que os jogadores percam, independente de suas habilidades ou experiências no jogo, mas de probabilidades e estatísticas baseadas na lógica da teoria dos jogos.

Capítulo 1

Revisando conceitos

Este capítulo tratará de revisar os conceitos fundamentais da análise combinatória e da probabilidade, bem como de propriedades que possam ser úteis ao longo desse trabalho.

1.1 Análise Combinatória

A análise combinatória é o ramo de matemática que possibilita, através de determinadas operações, a contagem de elementos para formação de conjuntos distintos, sob as mais diversas circunstâncias.

Podemos destacar, na análise combinatória:

- Princípio fundamental da contagem
- Fatorial
- Permutação simples
- Permutação com repetição
- Arranjo simples
- Combinação simples
- Combinação com repetição

1.1.1 Princípio fundamental da contagem

Princípio multiplicativo

Quando um evento ocorre de **n** maneiras sucessivas e independentes, onde na i-ésima etapa o evento pode ocorrer de m_i modos diferentes, temos que o total de maneiras do evento ocorrer é o produto todas as etapas, da primeira até a n-ésima: $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_n$.

Exemplo. Quantos números ímpares de três algarismos distintos existem, sendo que lidos de trás para frente formam números pares?

Solução. Se o número contém 3 algarismos, vamos chamar o algarismo da centena de m_1, o algarismo da dezena de m_2 e o algarismo da unidade de m_3. Se o número é ímpar, o algarismo da unidade só pode ser composto por um dos algarismos: 1, 3, 5, 7 ou 9. Logo, $m_3 = 5$. Como o número em questão, quando lido de trás para frente forma um número par, o algarismo da centena deve ser representado por um algarismo par escolhido entre: 2, 4, 6 ou 8 (pois nenhum número começa com o algarismo 0). Logo, $m_1 = 4$. O algarismo da dezena deve ser representado por um algarismo do sistema decimal e, ainda, deve ser diferente do algarismo escolhido para as posições m_3 e m_1. Logo, $m_2 = 8$. Portanto, a quantidade de números ímpares de 3 algarismos, que quando lidos de trás para frente formam um número par é igual ao produto $m_1.m_2.m_3 = 4.8.5 = 160$ números.

Exemplo. Quantos divisores naturais tem o número 5400? Quantos deles são ímpares? Algum deles é quadrado perfeito?

Solução. Para resolver esse problema, precisamos fatorar o 5400, e logo encontramos que $5400 = 2^3.3^3.5^2$, e todos os divisores de 5400 são, portanto, da forma $2^x.3^y.5^z$, onde $x \in 0,1,2,3, y \in 0,1,2,3 \ e \ z \in 0,1,2$.

$*$ Logo, há 4.4.3 = 48 escolhas diferentes de expoentes , portanto o número de divisores de 5400 é 48.

$*$ Para o divisor ser ímpar, ele deve ser da forma $2^0.3^y.5^z$. Temos então: 1.4.3 = 12 divisores de 5400 que são ímpares.

$*$ Para o divisor ser quadrado perfeito, x,y e z têm que ser números pares. Então, 2.2.2 = 8 divisores de 5400 são quadrados perfeitos.

Princípio aditivo

Suponha que um evento possa ocorrer em k situações. Suponha, ainda, ue na i-ésima situação, o o evento pode ocorrer de n_i formas. Finalmente, suponha ue eventos de situações distintas não podem ocorrer simultaneamente. Então, o número de formas do evento ocorrer em alguma das situações é $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Exemplo. Uma lanchonete oferece, em seu cardápio, 3 opções de sanduíches (carne, frango ou hot dog), 3 opções de bebidas (água, suco ou refrigerante) e 2 opções de sobremesa (sorvete ou pavê). De quantas maneiras um cliente pode consumir um lache completo (sanduíche, bebida e sobremesa), de tal forma que ele coma pavê ou não tome refrigerante?

Solução. Para essa situação, vamos calcular as possibilidades de cada opção separadamente: na primeira, o cliente come pavê e, na segunda, o cliente não toma refrigerante.

$*$ As maneiras do cliente pedir um lanche completo, comendo pavê, são de 3.3.1 = 9 modos diferentes.

$*$ As maneiras do cliente pedir um lanche completo, sem tomar refrigerante, são de 3.2.2 = 12 modos diferentes.

Logo, há 9 + 12 = 21 maneiras diferentes do cliente pedir um lanche comendo pavê ou sem tomar refrigerante.

1.1.2 Fatorial

Representado pelo símbolo !, o fatorial de um número **n** é o produto de todos os números inteiros de 1 até n. Ou ainda:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como consequências dessa definição, temos que:

- 1! = 1
- (n+1)! = (n+1).n!
- Por convenção, 0! = 1

É conveniente salientar que os fatoriais podem ser estendidos para números complexos não-naturais, desde que não sejam inteiros negativos. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$, considere a função gama:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt$$

onde, se n é natural, $\Gamma(n+1) = n!$.

Já para fatoriais de números grandes, digamos n, pode-se usar a aproximação de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

É interessante observar que, para os fatoriais, não são válidas as operações aritméticas de adição: n! + m! $\neq$ (n+m)!, e multiplicação: n!.m! $\neq$ (n.m)!. Apenas conseguimos simplificar os fatoriais, se atentarmos para as suas expansões:

Exemplo. Simplifique a fração $\frac{9!}{6!}$.

Solução. Ao contrário da simplificação aritmética, essa simplificação não é igual a $(\frac{3}{2})!$. Ao expandir o 9! e o 6!, temos: $\frac{9!}{6!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6} = 7.8.9 = 504$.

Exemplo. Resolva a equação $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 56$.

Solução. Para resolver esse tipo de equação, devemos observar o maior dos fatoriais (n+3)!, bem como sua expensão: (n+3)! = (n+3).(n+2).(n+1).n.$\cdots$.3.2.1, ou ainda: (n+3)! = (n+3).(n+2).(n+1)!. Então,

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3).(n+2).(n+1)!}{(n+1)!} = 56 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (n+3).(n+2) = 56 \Rightarrow n^2 + 5n + 6 = 56 \Rightarrow n^2 + 5n - 50 = 0$$

Logo, n = -10 ou n = 5. Mas $n \in \mathbb{N}$, então a única solução para essa equação é n=5.

Há diversas aplicações para os fatoriais, dentre elas as permutações, os arranjos e as combinações.

1.1.3 Permutações

Permutação simples

A palavra Permutação significa troca de posições. Para permutar n elementos, em que não há repetição de nenhum deles (daí a expressão "Permutação simples"), devemos utilizar:

$$P_n = n!$$

Uma vez que dispomos de n elementos para ocupar n posições, para a primeira posição x_1 temos n possibilidades de escolha, para a segunda posição x_2 temos n-1 possibilidades de escolha, para a terceira posição x_3 temos n-2 elementos possíveis de escolha, e assim sucessivamente até a última posição x_n, a qual só terá restado um único elemento possível de escolha para essa posição. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo,

$$P_n = n.(n-1).(n-2).\cdots.2.1 = n!$$

Exemplo. Uma família (pai, mãe e três filhos) querem tirar uma foto para o álbum de recordações. Para isso, o fotógrafo sugeriu que o pai ficasse ao lado da mãe sentados e os três filhos ficassem juntos em pé, ou os pais em pé e os filhos sentados. De quantas maneiras essa foto pode ser tirada?

Solução. O pai e a mãe devem ficar juntos, então eles podem livremente trocar de lugar, logo $2! = 2$. Já os três filhos devem ficar juntos, mas também podem trocar de lugar, logo $3! = 6$. E, também, há a possibilidade dos que estão sentados trocarem de lugar com os que estão em pé, ou seja, $2! = 2$. Portanto, pelo princípio multiplicativo, há $2.6.2 = 24$ maneiras diferentes da família tirar essa foto.

Exemplo. Quantos anagramas tem a palavra BERMUDA? Quantos desses anagramas começam por vogal e terminam com consoante?

Solução. Anagramas são novas estruturas de uma palavra (não precisam fazer sentido a nível de linguística), mudando apenas de posição suas letras. Dessa forma, essa mudança de posição nos remete a ideia de permutações. Então, para saber o total de anagramas da palavra BERMUDA, precisamos permutar suas 7 letras, logo: $P_7 = 7! = 5040$ anagramas. Já para o 2^o questionamento, devemos observar que a primeira letra deve ser uma vogal, ou seja, $m_1 \in \{A, E, U\}$, a última letra deve ser uma consoante, ou seja, $m_7 \in \{B, D, MR\}$, e as letras do meio podem permutar livremente dentre as letras que ficaram "disponíveis". Então, pelo princípio fundamental da contagem, o total de anagramas da palavra bermuda que começam com vogal e terminam com consoante é igual a: $3.P_5.4 = 3.5!.4 = 1440$ anagramas.

Permutação com repetição

Algumas situações, exigem que pensemos além das permutações simples, pois existem pequenos entraves. É o caso (por exemplo) de palavras que possuem letras repetidas, pois ao trocarmos essas letras repetidas de posição, não formaremos uma nova estrutura com essa configuração de letras.

Para obter o total de permutações de n objetos, sendo que estes possuem repetições de $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ objetos, utilizamos:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!.\gamma!.\cdots}$$

Para provarmos a fórmula acima, observe que dada uma palavra onde uma certa letra, denote-a por x, repete-se α vezes, temos $\alpha!$ formas de trocar a letra x de lugar sem mudar a palavra (trocando-as de posição entre si). Logo, para cada uma das $n!$ permutações da palavra original, temos $\alpha!$ palavras repetidas (apenas levando em consideração as mudanças feitas com relação à letra x). Repetindo-se o raciocínio para cada uma das letras que se repetem, e aplicando o princípio multiplicativo, obtemos que cada palavra das $n!$ permutações da palavra original, repete-se $\alpha!\beta!\gamma!\cdots$ vezes. Portanto, o número de palavras distintas é:

$$\frac{n!}{\alpha!.\beta!.\gamma!.\cdots}.$$

Exemplo. Possuo 5 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 2 bolas verdes para arrumá-las em um mural, formando apenas uma coluna de bolas. Quantos murais diferentes posso formar?

Solução. Nesse caso, queremos permutar 10 bolas, das quais as cores de 5, 3 e 2 delas se repetem. Aplicando a definição das permutações com repetições:

$$P_{10}^{5,3,2} = \tfrac{10!}{5!.3!.2!} = \tfrac{10.9.8.7.6}{3.2.1.2.1} = 2520 \text{ murais diferentes.}$$

Exemplo. Dois amigos decidiram jogar xadrez de uma forma diferente: cada um deles, em suas duas primeiras linhas (16 casas) podem dispor da arrumação que quiserem de suas peças. Quantas arrumações cada um dos amigos pode fazer para começar o jogo?

Solução. Cada amigo dispõe de 16 peças, sendo elas 8 peões, 2 torres, 2 cavalos, 2 bispos, 1 rainha e 1 rei. Dessa forma, ao trocarmos peças iguais, não formamos uma nova arrumação do tabuleiro. Então:

$$P_{16}^{8,2,2,2} = \tfrac{16!}{8!.2!.2!.2!} = 64864800 \text{ arrumações distintas.}$$

1.1.4 Agrupamentos

Ao escolher vários elementos de um grupo, estamos agrupando esses elementos, de tal forma que o modo como fazemos tais escolhas pode interferir no resultado desejado. Desta forma, vamos considerar um total de n elementos, dos quais escolheremos p elementos.

Arranjo simples

Quando escolhemos p elementos de um total de n elementos (com $n \geq p$), de tal forma que a ordem de cada elemento escolhido influencia no grupo formado, estamos diante de um Arranjo simples. Para determinar a quantidade de grupos, em que a ordem faz diferença, podemos usar:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Os arranjos simples também podem ser entendidos como o princípio multiplicativo do princípio fundamental da contagem, pois cada elemento tem sua posição (e única, uma vez que a variação de posição modifica o agrupamento).

Quando temos n elementos (todos distintos entre si) e queremos agrupá-los em p formações distintas, para o primeira posição (x_1) temos n elementos disponíveis, para a posição x_2 temos n-1 elementos disponíveis, e assim sucessivamente, até a posição x_p, a qual teremos (n - (p - 1)) elementos disponíveis para tal posição. Pelo princípio multiplicativo:

$A_{n,p} = n.(n-1).\cdots.(n-(p-1))$ e, ao multiplicar essa expressão por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, teremos:

$A_{n,p} = n.(n-1).\cdots.(n-p+1).\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemplo. Em uma prova de natação, competem 8 atletas de países diferentes. De quantas maneiras o pódio pode ser formado?

Solução. A formação do pódio é composto de 3 atletas, dos quais estarão presentes no grupo de 8 competidores. Observe que a ordem dos nadadores no pódio faz diferença, pois um mesmo atleta ao tirar em primeiro ou terceiro lugar, receberá medalha diferente e subirá num andar diferente na premiação. Dessa forma, temos um arranjo de 8 atletas, dos quais 3 formarão o pódio. Assim,

$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6 = 336$ pódios diferentes.

Exemplo. Na biblioteca de uma escola, os livros são registrados com um código composto de duas letras distintas e uma sequência de três algarismos distintos. Pode-se usar qualquer uma das 26 letras do alfabeto e qualquer algarismo de 0 a 9. Dessa forma, calcule o número de livros que podem ser catalogados.

Solução. Como as letras devem ser distintas, os códigos AB e BA (por exemplo) são referências a livros distintos. Da mesma forma para os números, a sequência 012 é diferente da sequência 201, o que corresponde a livros diferentes. Então, para as letras temos um arranjo de 26 letras para escolher duas e para os números temos 10 algarismos para escolher três. Pelo princípio multiplicativo do princípio fundamental da contagem, os arranjos devem ser multiplicados.

$A_{26,2}.A_{10,3} = \frac{26!}{(26-2)!}.\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{26!}{24!}.\frac{10!}{7!} = \frac{26.25.24!}{24!}.\frac{10.9.8.7!}{7!} = 468000$

Podem ser catalogados, então, 468000 livros.

Combinação simples

Quando queremos formar um grupo com p elementos, escolhidos em um universo de n elementos, de tal forma que a ordem dessa escolha não influencie no resultado, dizemos que esse grupo é uma combinação. Para esse tipo de combinação (simples), cada elemento só pode ser escolhido uma única vez. Podemos associar também a combinação de p elementos a um conjunto, pois a ordem dos elementos em qualquer conjunto não faz diferença. Para determinar a quantidade total de combinações da escolha de p elementos dentre os n elementos disponíveis, podemos utilizar:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

Também conhecido pela forma $\binom{n}{p}$, as combinações também podem ser consideradas como todos os arranjos (resultados ordenados) nos quais só nos interessam

aqueles que os elementos são diferentes, e não a ordem. Dessa forma:
$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n.(n-1).(n.2).\cdots.(n-p+1)}{p!} = \frac{n.(n-1).(n.2).\cdots.(n-p+1)}{p!}.\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$.

De fato, para cada conjunto de p elementos, temos $p!$ formas de reordená-los. Assim, em um arranjo, cada conjunto aparece $p!$ vezes. Logo, o número de conjunto de p elementos (ou seja, a ordem não importa) é

$$\frac{A_{n,p}}{p!}.$$

Exemplo. Um hospital dispõe de 8 médicos e 15 enfermeiros. Cada equipe de plantão é composta por 2 médicos e 5 enfermeiros. Quantas equipes de plantão podem ser formadas com os funcionários disponíveis?

Solução. Para a formação da equipe, a ordem da escolha dos funcionários (dentro de uma mesma categoria) não importa, uma vez que a equipe formada com os médicos A e B será a mesma equipe formada com os médicos B e A. O mesmo vale para os enfermeiros. Dessa forma, a quantidade de equipes com médicos pode ser representada por uma combinação de 8 elementos para escolher 2 deles, e a quantidade de equipes com enfermeiros pode ser representada por uma combinação de 15 elementos para escolher 5 deles. O princípio multiplicativo une as duas categorias numa mesma equipe plantonista, de tal forma que:
$C_{8,2}.C_{15,5} = \frac{8!}{2!.(8-2)!}.\frac{15!}{5!.(15-5)!} = \frac{8.7.6!}{2.1.6!}.\frac{15.14.13.12.11.10!}{5.4.3.2.1.10!} = 84084$

Logo, o hospital pode montar 84 084 equipes diferentes para seu plantão.

Exemplo. Uma escola tem, em seu corpo docente, 20 professores dos quais serão escolhidos 5 membros para o conselho escolar. A escolha será através de uma eleição para presidente e vice-presidente do conselho em que os dois mais votados assumem os cargos (nessa ordem) e, após o resultado, uma nova eleição para escolher três secretários. De quantas maneiras o conselho escolar pode ser montado?

Solução. O conselho escolar será montado em duas etapas: a primeira escolhe-se um presidente e um vice-presidente, trata-se portanto de um arranjo, uma vez que a ordem desses membros importa, pois depende da quantidade de votos; a segunda escolhe 3 secretários dentre os docentes que sobraram, nessa eleição não importa a ordem, o terceiro lugar e o quinto lugar terão o mesmo cargo. Dessa forma, temos um arranjo de 20 docentes que serão escolhidos 2 e uma combinação de 18 docentes para serem escolhidos 3. Assim, pelo princípio multiplicativo:
$A_{20,2}.C_{18,3} = \frac{20!}{(20-2)!}.\frac{18!}{3!.(18-3!)} = \frac{20.19.18!}{18!}.\frac{18.17.16.15!}{3.2.1.15!} = 310080$

A escola tem 310080 modos de escolher seu conselho escolar.

Combinação com repetição

Também chamada de combinação completa, esse tipo de combinação é utilizada quando queremos calcular o número de maneiras escolher p elementos distintos ou não, entre n elementos distintos dados.

Para entendermos como calcular o número de combinações com repetições, podemos associar cada um dos n elementos a uma variável x_i, $i = 1, \ldots, n$, de tal forma que x_i denota o número de vezes que o i-ésimo elemento foi escolhido. Como queremos escolher p elementos, estamos procurando pela quantidade de soluções não-negativas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p.$$

Podemos então resolver este problema colocando p símbolos $\bullet$, representando o total de elementos a serem escolhidos, e, em seguida posicionar $n-1$ símbolos $|$ entre as bolas $\bullet$ para indicar as quantidades de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mais precisamente, o número de bolas $\bullet$ antes do primeiro símbolo $|$ (contando da esquerda para a direita) é igual a x_1, o número de bolas entre o primeiro símbolo $|$ e o segundo símbolo $|$ é igual a x_2, e assim sucessivamente. Lembrando, que como procuramos soluções não-negativas é possível não termos nenhuma bola entre o $i-1$-ésimo símbolo $|$ e o i-ésimo símbolo $|$, indicando neste caso que $x_i = 0$.

Assim, existe uma correspondência biunívoca entre as soluções possíveis e as sequências de $\bullet$ e $|$ de comprimento $n-1+p$, com $n-1$ símbolos $|$ e p símbolos $\bullet$. O total de tais sequências é o número de permutações de $n-1+p$ elementos com p e $n-1$ repetições:

$$\frac{(n-1+p)!}{p!(n-1)!}.$$

Portanto, podemos calcular o total de combinações completas através da relação:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!.(n-1)!}$$

Exemplo. Quantas soluções naturais (inteiras não-negativas) tem a equação x + y + z = 8 ?

Solução. Por se tratar de soluções naturais, o menor resultado possível é o 0 e o maior resultado possível é o 8. Porém, em todo esse intervalo de 9 números, devemos escolher 3 deles de tal forma que a solução seja satisfeita e, lembrando, que alguma incógnita pode ter o mesmo valor de outra. Para isso, vamos chamar cada unidade do resultado que queremos de um símbolo (aqui representaremos com um $\bullet$), e cada operador que separa as soluções individuais de outro símbolo (aqui usaremos $|$). Assim, podemos escrever as soluções, através dos símbolos, como por exemplo: $\bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet$ se trata da solução (3;2;3) e a solução $\bullet \mid\mid \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ trata-se da terna (1;0;7). Então, como podemos repetir os resultados em mais de uma variável,

$CR_8^3 = C_{8+3-1}^3 = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!.(8-1)!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!} = 120$

Há 120 soluções naturais para a equação x+y+z = 8.

Exemplo. Um buffet tem 7 opções de saladas, dos quais o cliente pode escolher 4 porções para seu almoço. De quantas maneiras o cliente pode montar seu prato de salada?

Solução. Nada impede o fato de que o cliente pode escolher 1 porção de um tipo de 3 porções de outro tipo. Então, vamos associar cada tipo de salada a uma variável a_n, sabendo que o total de porções de cada tipo deve ser igual a 4. Assim, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 = 4$. Utilizando símbolos, podemos escrever exemplos de solução como $\bullet \mid\mid\mid \bullet \mid\mid \bullet\bullet \mid$ que forma a solução (1,0,0,1,0,2,0) que indica que o cliente está querendo 1 porção da salada 1, 1 porção da salada 4 e 2 porções da salada 6. Então, usando as combinações que podem ter elementos repetidos,

$CR_7^4 = C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!.(10-4)!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!} = 210$

Logo, o cliente terá 210 modos de montar seu prato de saladas.

1.2 Probabilidade

1.2.1 Aspectos Históricos

A primeira obra que trata de probabilidade chama-se De Ludo Aleae, de Giolarmo Cardano (1501-1576), que trata de jogos de azar; porém esta só foi publicada em 1663. Um famoso problema proposto por Cardano foi o "problema dos pontos", que logo foi proposto a Pascal (1623-1662), que o levou para Fermat (1601-1665). A partir daí, houve uma importante interação entre ambos, que fez com que cada um deles resolvesse a sua maneira, Pascal utilizando o triângulo aritmético (que ficou famoso como Triângulo de Pascal) e essa correspondência deu fundamentos à teoria das probabilidades moderna. Christiaan Huygens foi o primeiro a dar um tratamento científico, mas foi Jakob Bernoulli (com a Arte da Conjectura) e Abraham de Moivre (com a Doutrina da Probabilidade) que realmente se referiram à Probabilidade como sendo um ramo da matemática.

1.2.2 Calculando Probabilidades

Para entender o que é probabilidade, vamos definir alguns conceitos que serão muito importantes a partir de agora:

· **Experimento aleatório** é todo experimento (ou fenômeno) que produz resultados imprevisíveis, dentre os possíveis, mesmo quando repetido em semelhantes condições, dependendo somente do acaso.

· **Espaço amostral** (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

· **Evento** é todo subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Considere agora um evento A de um espaço amostral Ω finito e equiprovável. Definimos **Probabilidade** do evento A (P(A)) como sendo a razão entre a quantidade de elementos de A (n(A)) e a quantidade de elementos de Ω (n(Ω)).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Note que, se A é um evento qualquer de Ω, ao considerarmos os conjuntos $\varnothing$, A e Ω, temos que:

$\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(\Omega) \Rightarrow \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$.

Se A é um evento impossível, temos P(A) = 0, pois: $A = \varnothing \Rightarrow P(A) = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = 0$.

Se A é um evento certo, temos P(A) = 1, pois: $A = \Omega \Rightarrow P(A) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$.

Exemplo. Um dado é lançado duas vezes consecutivas e o resultado de sua face voltada para cima é anotado. Qual a probabilidade da soma dos valores anotados ser maior que 9?

Solução. Para esse tipo de problema, vamos calcular (inicialmente) o espaço amostral Ω. Em dois lançamentos consecutivos, podemos ter como resultados:

(1;1),(1;2), (1;3), ..., (6;5), (6;6) que, pelo princípio multiplicativo, temos 6 possibilidades de resultado para o primeiro dado e 6 possibilidades de resultado para o segundo dado, então 6.6 = 36 possíveis resultados. Logo n(Ω) = 36. Para o evento, deve ser observado que a soma das faces deve ser maior que 9, ou seja, 10, 11 ou 12. Temos portanto os seguintes resultados: (4;6), (5;5), (5;6), (6;4), (6;5), (6;6). Logo n(A) = 6. Calculando então a probabilidade,

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Logo, a probabilidade das faces anotadas gerarem uma soma maior que 9 é de $\frac{1}{6}$.

Exemplo. Ao escolher um dos anagramas da palavra PROBLEMATICA, qual a probabilidade do anagrama começar e terminar com uma consoante?

Solução. Para o espaço amostral, devemos saber quantos anagramas existem (no total) dessa palavra. Observando a palavra PROBLEMATICA, podemos concluir que trata-se de uma permutação de 12 letras com repetição apenas da letra A duas vezes.

$n(\Omega) = \frac{12!}{2!} = \frac{12.11!}{2.1} = 6.11!$

Para os anagramas que queremos (começam e terminam com consoante), pelo princípio multiplicativo, $x_1 = 7$ e $x_{12} = 6$, e de x_2 até x_{11} teremos uma permutação de 10 letras, das quais o A se repete duas vezes. Então,

$n(A) = 7.P_{10}^{2}.6 = 7.\frac{10!}{2!}.6 = 7.\frac{10.9!}{2.1}.6 = 7.5.9!.6 = 210.9!$

Por fim, aplicando a definição de probabilidade,

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{210.9!}{6.11!} = \frac{7}{22}$

Probabilidade complementar

Indica-se por A^c o complementar do evento A, tal que $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \varnothing$. Utilizamos o evento A^c sempre que queremos nos referir a todo(s) evento que faz parte do espaço amostral e não é o evento A. Por exemplo, no lançamento de uma moeda o evento A é a face cara estar voltada para cima, então o evento A^c será o evento da face coroa estar voltada para cima. É fácil ver que:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Exemplo. Um grupo de 10 professores, do qual Pedro faz parte, vai representar a escola numa feira de educação. Qual a probabilidade de ser montado um grupo de 3 pessoas em que Pedro não faz parte?

Solução. Vamos calcular, inicialmente, a quantidade de grupos possíveis. Uma vez que dispomos de 10 professores e a ordem que for escolhidos os 3 não importa, estamos diante de uma combinação.

$n(\Omega) = C_{10,3} = \frac{10!}{3!.7!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!} = 120$ grupos possíveis.

Em seguida, vamos calcular em quantos grupos, desses 120, Pedro está incluso. Levando em conta que ele já está escolhido, sobram 9 professores para serem escolhidos apenas 2.

$n(A) = C_{9,2} = \frac{9!}{2!.7!} = \frac{9.8.7!}{2.1.7!} = 36$ grupos.

Portanto, a probabilidade de Pedro estar num grupo que representará a escola é:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

Logo, a probabilidade de Pedro NÃO fazer parte desse grupo será:

$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Exemplo. Uma empresa de televisão por assinatura oferece 100 canais por assinatura (numerados do 001 ao 100). Por um defeito no controle remoto, o botão 9 não funciona, o que torna inútil o cliente apertar essa tecla. Qual a probabilidade de um cliente não conseguir assistir um programa que queira pelo defeito do controle remoto?

Solução. O espaço amostral desse problema está explícito (100 canais). O que é preciso agora, é saber quantos canais serão prejudicados pelo defeito do controle remoto. Os canais com problemas são os que possuem o dígito 9, ou seja: 009, 019, ..., 089, 090, 091, 092, ..., 099, totalizando 19 canais. A probabilidade de se escolher um desses canais é de:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{19}{100}$.

Logo, a probabilidade do cliente não conseguir assistir o programa que quer será de:

$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{19}{100} = \frac{81}{100}$ ou 81%.

Probabilidade da união de dois ou mais eventos

Como nem todos os eventos são disjuntos, quando queremos calcular a probabilidade de um evento A ou um evento B acontecerem, pode acontecer de A e B ocorrerem simultaneamente. Para calcular a probabilidade neste caso, devemos lembrar das propriedades do número de elementos dos conjuntos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

De forma análoga, para três eventos:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Exemplo. Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Qual a probabilidade de se retirar uma bola que o número seja múltiplo de 2 ou de 5?

Solução. Para o evento A, vamos considerar as bolas cujos números são múltiplos de 2. Dessa forma, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $P(A) = \frac{5}{10}$. Já para o evento B, vamos considerar as bolas que possuem números múltiplos de 5. Assim, $B = \{5, 10\}$ e, portanto, $P(B) = \frac{2}{10}$. Ao observar atentamente, o elemento 10 pertence ao evento A e ao evento B ao mesmo tempo e, por sua vez, não pode ser contada duas vezes pois tem a mesma probabilidade de ser sorteado em relação aos demais números. Dizemos então que $(A \cap B) = \{10\}$ e então $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Agora,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Exemplo. Um urna contém 20 bolas sorteadas de 1 a 20. Qual a probabilidade de sortear uma bola que contenha um número menor do que 6, ímpar ou que seja divisor de 30?

Solução. Vamos dividir essa situação em 3 eventos, todos com o espaço amostral $\Omega = \{1, 2 \cdots, 20\}$. o evento A será o número menor que 6. Logo, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{20}$. O evento B será composto pelos números ímpares, dessa forma, $B = \{1, 3, 5, \cdots, 19\} \Rightarrow P(B) = \frac{10}{20}$. E o evento C conterá os divisores de 30, então $C = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\} \Rightarrow P(C) = \frac{7}{20}$. Porém, há elementos que se repetem em mais de um evento, então calculando as interseções com suas probabilidades,

$(A \cap B) = \{1,3,5\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{20}$; $(A \cap C) = \{1,2,3,5\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{4}{20}$; $(B \cap C) = \{1,3,5,15\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{4}{20}$; $(A \cap B \cap C) = \{1,5\} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{20}$. Então,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{20} + \frac{10}{20} + \frac{7}{20} - \frac{3}{20} - \frac{4}{20} - \frac{4}{20} + \frac{2}{20} = \frac{13}{20}$.

Probabilidade condicional

Quando ocorre um primeiro evento que reduz (ou restringe) o espaço amostral para um evento seguinte, chamamos essa segunda probabilidade de condicional, pois ela é condicionada ao espaço amostral restrito após o primeiro evento. Denotamos por $P(A|B)$ a probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo que ocorreu o evento B. Por exemplo, a probabilidade de um aluno conseguir um financiamento estudantil, sabendo que tirou boas notas no ENEM (P(financiamento|boas notas)). Podemos calcular a probabilidade do evento A com o espaço amostral restrito pelo evento B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Mas se $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$. Da mesma forma, se $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$. Assim,

$$P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

Exemplo. Ao lançar um dado duas vezes e anotar os resultados, qual a probabilidade da soma dos resultados da face voltada para cima ser maior que 9, sabendo que o primeiro resultado foi par?

Solução. Vamos denotar o evento A como sendo a soma dos resultados sendo maior que 9 e o evento B todos os resultados em que o primeiro número obtido é par. Assim, pelo princípio multiplicativo, $\Omega = 6.6 = 36$ possíveis resultados, e B tem $3.6 = 18$ possíveis resultados e, com isso, $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Para o evento A temos: (4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6); mas desses 6 resultados, apenas 4 deles tem o primeiro número par. Então $P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Assim,

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}.\frac{2}{1} = \frac{2}{9}$.

Exemplo. Qual a probabilidade de, em um baralho, se sortear um Ás, sabendo que a carta sorteada é de copas?

Solução. Novamente, vamos chamar de evento A as cartas Ás de um baralho e de evento B as cartas de copas desse mesmo baralho. Assim, como há 13 cartas de cada naipe, $P(B) = \frac{13}{52}$. Como há 4 ás no baralho, mas só um deles é de copas, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$. Assim,

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{52}.\frac{52}{13} = \frac{1}{13}$.

Probabilidade de eventos independentes

Eventos independentes, ou disjuntos, são aqueles que um não depende do outro para acontecer. Dessa forma, a probabilidade de um evento ocorrer não interfere na probabilidade do outro. Para a definição a seguir, iremos supor que $P(A), P(B) > 0$.

Assim, dizemos que o evento A é independente do evento B se $P(A|B) = P(A)$. Ou seja, se a probabilidade da ocorrência de A, dado que o evento B aconteceu, é a mesma probabilidade obtida, se essa informação não existisse. Desta definição decorre que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Assim, se A é independente de B, temos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Observe que, reciprocamente, se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, então segue que A é independente de B e que B é independente de A. Portanto, conclui-se que, A é independente de B se, e somente se, B é independente de A. Assim, neste caso, dizemos simplesmente que A e B são eventos independentes.

Vale ainda destacar que a fórmula anterior, envolvendo a probabilidade da interseção de eventos independentes é análoga à fórmula para calcular a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, em que A e B são disjuntos (ou seja, $P(A \cap B) = 0$), pois temos, neste caso:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo. No lançamento de um dado duas vezes sucessivas, qual a probabilidade de sair um número ímpar e um número maior que 4 na face voltada para cima?

Solução. Para esse problema, tem-se que $n(\Omega) = 6$. Para o primeiro lançamento (evento A), a probabilidade de sair um número ímpar na face voltada para cima será $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, pois $A = \{1, 3, 5\}$. Já para o segundo lançamento (evento B), a probabilidade de se obter um número maior que 4 será: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, uma vez que $B = \{5, 6\}$. Para acontecer o evento A e o evento B,

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Exemplo. No lançamento de um dado, qual a probabilidade de sair um número maior que 4 ou menor que 3 na face voltada para cima?

Solução. Para o primeiro evento, $A = \{5, 6\}$ e, portanto, sua probabilidade será de $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Para o segundo evento, $B = \{1, 2\}$ e, portanto, sua probabilidade será de $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Como pode ocorrer o evento A ou B, então a probabilidade será:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Capítulo 2

O que é um jogo de azar

Os jogos de azar são aqueles em que a probabilidade de vitória é menor que a probabilidade de derrota. Esses tipos de jogos não dependem de sorte ou azar e nem somente das habilidades do jogador, mas de uma realidade que foi produzida baseada em probabilidade matemática. As perdas dos jogadores que são derrotados financiam e sustentam os jogos dos jogadores vitoriosos. Considera-se também como jogos de azar aqueles que envolvem apostas e dinheiro, pois a probabilidade inferior de vitória leva o jogador ao prejuízo, diferentemente de um "Pedra-Papel-Tesoura". A maioria dos jogos de azar são proibidos no Brasil, sendo legalizado somente os jogos da Loteria Federal. Mas há diversas partes do mundo onde se encontram grandes cassinos, onde há uma movimentação muito grande de dinheiro. Os cassinos mais famosos do mundo encontram-se em Las Vegas, Nevada - Estados Unidos. Próximo do Brasil (e bem frequentado por brasileiros) se encontra em Montevidéu - Uruguai, o mais próximo dentre as capitais, embora exista diversos cassinos menores próximo das fronteiras brasileiras.

Os jogos de dados tiveram origem no Império Romano, apesar de não estarem bem claras as regras adotadas naquele período. Mas algo parecido com os dados foram encontrados na tumba de Tutankamon e na civilização de Ur.

Há quem diga que os jogos de cartas surgiram na Europa no século XIV ou na China no século IX, local também do surgimento da primeira loteria, sendo esta bem mais antiga, datada de a.C..

Os cassinos que conhecemos surgiram no século XIX em Mônaco, quando eram apenas salas grandiosas, usadas para jogar Pôquer, BlackJack e Roleta. Mais tarde com a informatização, foram sendo incluídas Slot Machines e outros jogos. Há também os cassinos virtuais, que trazem a comodidade ao jogador de não precisar viajar nem sair de casa para poder jogar.

2.1 Os jogos de azar no Brasil

Ultimamente, vários tipos de jogos estão em discussão constante, tanto na Câmara dos deputados quanto no Senado. Vários tipos de jogos já conseguiram sua legalização, formas de fiscalização e auditorias. Outros ainda aguardam leis ou medidas que os autorizem.

2.1.1 Jogos permitidos por lei

A Loteria teve seu primeiro registro na história do Brasil em 1784, quando foi feita a primeira extração de bilhetes para arrecadação de fundos para a construção do prédio da Câmara de Vila Rica (que hoje se chama Ouro Preto), em Minas Gerais. Além de beneficiar os apostadores vencedores, a Loteria também ajuda bastante o governo, uma vez que são descontados partes do prêmio para o pagamento de impostos.

A Loteria Federal começou em 1962, e hoje funciona com 2 sorteios semanais, além de sorteios em datas especiais (como na Páscoa, Independência e Ano Novo por exemplo). Fazem parte da Loteria Federal do Brasil a Quina, Loto Fácil, Loto Mania, Dupla Sena, Loteca, e a tão cobiçada Mega Sena.

A Loteria Esportiva Federal começou em 1970, e atualmente faz um sorteio semanal e conta com a Time Mania e a Loto Gol.

Por último, existe a Loteria Federal Instantânea, que não precisa de sorteios. As pessoas podem ganhar alguma premiação na hora da compra. São as famosas "raspadinhas".

Apesar de se assimilar a sorteios de loteria (pois apresentam sorteios semanais), existem os títulos de capitalização, considerados pelas leis como investimentos futuros, pois há um resgate de parte do valor investido, corrigido pela taxa específica daquele título. Um exemplo bastante conhecido desse tipo de título é a Tele Sena.

2.1.2 Jogos ilícitos

Entre os jogos ilícitos no Brasil, estão o jogo do Bicho e os jogos de Cassino. Os jogos de azar são proibidos desde 1941, quando Getúlio Vargas assinou o Decreto-Lei n^o 3.688 por, basicamente, dois motivos:

1 - Este tipo de atividade é altamente viciante, e por isso há grande risco de abuso de apostas. Políticos que defendem a não legalização de jogos como o Jogo do Bicho dizem que as pessoas acabam viciadas e isso pode endividar famílias e destruir patrimônios.

2 - O dinheiro movimentado pelos jogos não é controlável pelo Estado, e por isso não pagam impostos. Com exceção das Loterias da Caixa, que não só é regulada como também pertence ao Estado, o dinheiro arrecadado com qualquer outro tipo de jogos e apostas não terá retorno algum à sociedade, já que não são taxados.

O jogo do Bicho não considerado crime, somente uma contravenção penal (um crime minúsculo). Se fosse considerado crime, quem lucra poderia ser recluso ou detido, e poderiam ser penalizados aqueles com simples envolvimento como uma aposta singular. Por ser uma contravenção penal, a punição de quem lucra é de 3 meses a 1 ano de prisão, e o simples envolvimento não é punível. Mas, no Brasil, a exploração desse tipo de jogo na "surdina"é alta. O jogo do Bicho é facilmente encontrado e, até mesmo, tolerado por autoridades, pois envolvem políticos de alto escalão e até mesmo dirigentes de escolas de samba (como denunciado recentemente pelo Ministério Público por estar ligado a crimes como lavagem de dinheiro, corrupção, tráfico de influência e o narcotráfico). Para a destruição de toda atividade ilegal por trás do jogo do Bicho, alguns políticos e advogados defendem a legalização desse jogo, e também aumentar a arrecadação de impostos para o tesouro nacional.

Atualmente, o Brasil deixa de arrecadar 15 bilhões por ano em impostos com o jogo do Bicho (diz a deputada federal Magda Mofatto - GO).

Os cassinos são locais onde se pode jogar apostando dinheiro. Neles, pode-se encontrar vários tipos de jogos, como as *slot machine* (máquinas caça níqueis), roletas, pôker, blackjack e outros jogos de fortuna e azar. Os jogos de cassino são estudados matematicamente pelos seus donos, pois os mesmos querem que as probabilidades de cada jogo favoreçam o cassino. Os cassinos já foram legalizados, em 1938, por Getúlio Vargas, e posteriormente proibidos pelo Decreto-Lei n^o 9.215 em 1946 pelo presidente Dutra. Porém muitos navios partem com jogadores e, em alto mar (águas internacionais), realizam jogos de cassino.

A Lei Zico (8.672/93) autorizou as casas de Bingo e as máquinas caça-níqueis a funcionarem no Brasil. Essa lei foi reafirmada pela Lei Pelé (9.615/98). A proibição veio com o presidente Lula através de uma medida provisória (MP 168/04) após um escândalo que ficou conhecido como "Escândalo dos Bingos", onde empresários e ministros do governo estavam ligados a bicheiros, extorquindo empresários e destinando esse dinheiro a fundos partidários.

2.2 Aspectos psicológicos dos jogos de azar

Jogar sempre foi uma prática do ser humano desde a infância. Vários tipos de jogos estimulam o crescimento intelectual do indivíduo em formação. Groos (1968) afirma que existem três fatos que estimulam as pessoas a jogar: o lucro das apostas, o desafio e as emoções. Mesmo que pessoas estejam perdendo altas quantias, o que derruba o primeiro fato, ela continua jogando pelo desafio e as emoções, apesar do lucro ser a meta principal daqueles que iniciam partidas. Testes já foram feitos utilizando máquinas de ressonância magnética e os jogos de azar tem efeito similar no cérebro ao do uso da cocaína, concluindo-se então que os jogos de azar viciam tanto quanto as drogas podem causar dependência química.

Há certos momentos em que as pessoas começam a se descontrolar. Nesse ponto, o jogo deixa de ser social e saudável e passa a ser patológico. A falta de controle do impulso e um mal comportamento recorrente são sintomas de quando o jogo pode trazer riscos a saúde. Quando o jogador adquire tal patologia, chega a comprometer a renda familiar, objetos de valor e até mesmo seu emprego, como trata a lei: "*1) A expressão, para os efeitos penais, é definida como sendo o jogo em que o ganho e a perda dependem exclusivamente ou principalmente da sorte. É contravenção penal determinada pelo Decreto-lei 3.698/41, Lei das Contravenções Penais, no artigo 50, parágrafo 3º. Consideram-se jogos de azar: a) o jogo dependente de sorte; b) apostas em qualquer outra competição. 2) Constitui justa causa para rescisão do contrato de trabalho pelo empregador a prática de jogo de azar.*"

Há diferenças também entre homens e mulheres no mundo dos jogos. Segundo Hermano Tavares, coordenador do Ambulatório do jogo patológico do Instituto de Pesquisa da Universidade de São Paulo: "*os homens começaram a jogar no final da adolescência ou no início da vida adulta e o envolvimento foi progressivo, mimetizando o que acontece com o usuário de drogas. Já a maioria das mulheres começa a jogar com 40 ou 45 anos, após os filhos saírem de casa e as preocupações diminuírem*". Fato é que, ao atingir o nível patológico, independente de homem ou mulher, deve procurar ajuda médica antes que a doença progrida e acabe afetando outras pessoas do convívio do jogador.

Capítulo 3

Pôquer

O pôquer (ou *poker* no inglês) é o jogo de cartas mais jogado do mundo atualmente. Para jogar pôquer são necessários 2 ou mais jogadores e um baralho simples (52 cartas divididas em 4 naipes com 13 cartas cada naipe). Nesse jogo, os jogadores fazem suas apostas ao centro da mesa e vence o jogador com a melhor combinação de cartas. Para jogar esse jogo, é necessário que o jogador saiba as regras do jogo (e essas podem variar dependendo do tipo de pôquer que se está jogando), bem como o valor das combinações de cartas e as regras que limitam as apostas.

Desde 2010 o pôquer foi reconhecido como esporte de habilidade mental. Isso coloca o pôquer no mesmo patamar de jogos como o xadrez, dama e o gamão.

3.1 A história do Pôquer

Há várias linhas históricas de pesquisa sobre a origem do pôquer. Cronologicamente, a primeira teoria sugere que o pôquer foi criado na China, durante a dinastia Sung, no século X. Outra teoria sugere uma origem persa durante o século XVI, quando era chamado de **As Nas**. Alguns historiadores defendem a origem do jogo proveniente da França (chamado lá de **poque**) e trazido para a América no século XVIII e XIX por um grupo de colonizadores que o difundiu ao longo da rota do rio Mississippi, daí o pôquer estar fortemente associado às histórias do velho-oeste.

Data de 1934 uma das mais antigas referências noticiadas, de autoria de Jonathan H. Green, que detalha as regras do jogo e traz pela primeira vez o nome **pôquer** para o que, inicialmente, foi chamado de **jogo de trapaças**.

3.2 Os vários tipos de pôquer

Apesar de ser o jogo de cartas mais jogado do mundo, não há somente um tipo de pôquer. Dessa forma, a maneira de jogar muda de acordo com a variação do jogo que se está jogando.

O mais jogado é o Texas Hold'em, comum em campeonatos de televisão e na maioria dos jogos on-line. Nele, cada jogador tem duas cartas e são postas cinco cartas na mesa, com as quais cada participante deve usá-las (unindo-as as suas) para formar sua combinação e pontuar. Esse estilo de jogo será mais aprofundado mais à frente.

No pôquer aberto com cinco cartas, cada participante recebe uma carta fechada (só o jogador pode vê-la) e uma aberta (todos os outros participantes podem ver essa carta). O primeiro a fazer sua aposta será aquele com a maior carta aberta (caso haja empate será aquele jogador mais próximo ao carteador, ou a sua esquerda caso haja novo empate), e a ordem das apostas seguirá o sentido horário. As apostas dos jogadores se baseiam nas combinações de cartas que cada jogador pode formar com as cartas que eles possuem e que ainda podem receber. Após a primeira rodada de apostas, cada jogador recebe mais uma carta (a terceira de cada um) aberta e é feita mais uma rodada de apostas. O rito se repete para a quarta carta, quando é chegada a hora dos participantes declararem suas possibilidades de pontuação. É nessa hora que entra a estratégia de jogo para fazer combinações e a tentativa de desestruturar o lado emocional dos demais jogadores, pois a quinta e última carta que cada um receberá será fechada. Após encerradas as apostas, as cartas fechadas são desviradas e o carteador verifica o jogador que fez a maior pontuação.

O pôquer com sete cartas é um pouco diferente daquele com cinco cartas. O jogador recebe, inicialmente, três cartas: duas fechadas e uma aberta. Iniciam-se as apostas. Cada jogador recebe a quarta e a quinta carta, intercalando-as com as apostas. Após essa quinta carta, cada jogador pode decidir se quer trocar uma de suas cartas ou não. Caso queira, ele receberá outra carta de acordo com a carta que foi trocada (uma carta aberta é trocada por outra carta aberta, e vice-versa). A sexta carta é aberta, que precede mais uma rodada de apostas, e a última carta é fechada, que dá origem a mais uma rodada de possíveis trocas e uma última rodada de apostas. Após encerradas as apostas, desviram-se as cartas fechadas e vence o jogador com maior pontuação. O fato de cada jogador ter muitas cartas faz com que a quantidade de possibilidades de jogos aumente muito em relação ao pôquer aberto de cinco cartas e, consequentemente, aumenta também o ritmo das apostas e o risco do carteador perder o controle sobre o valor das apostas. Para isso, a mesa limita o valor das apostas iniciais.

O pôquer high-low é uma variação do pôquer em que o jogador que recebe as fichas no final não é somente aquele que tem a maior pontuação, mas também o que tem a menor pontuação. As fichas são divididas igualmente (em ordem crescente de valor) e, caso sobre alguma ficha, ela ficará com o jogador com maior pontuação. Nessa modalidade, cada jogador recebe quatro cartas (que só ele pode ver), e são colocadas cinco cartas abertas na mesa. Cada jogador deve usar duas de suas cartas, unindo-as com três cartas da mesa para formar seu jogo.

No pôquer fechado cada jogador tem cinco cartas, todas fechadas. Antes de iniciar o jogo, os jogadores definem o cacife (montante para apostas que decorrerão no jogo). Após receber as cartas, o jogador poderá tomar três atitudes: sair da rodada (colocando suas cartas viradas sobre a mesa); dizer "mesa"e esperar os demais tomarem suas atitudes; ou apostar na sua mão. Essa atitude vai depender do fato do jogador gostar ou não de sua mão. Quando as apostas acabam, os jogadores podem trocar de cartas uma única vez. Normalmente se troca uma, duas ou três cartas. Porém, em alguns lugares, é permitido a troca até de quatro cartas, atitude que não é muito utilizada e nem bem vista entre os jogadores, pois diminui bastante as chances do jogador formar um bom jogo. Com as novas cartas, uma nova rodada de apostas é feita e, então, as mãos de todos os jogares são reveladas e ganha o jogador com maior pontuação (apesar de existirem algumas variações do pôquer fechado fundido ao high-low).

3.3 O Texas hold'em

É um tipo de pôquer aberto, em que cada jogador recebe duas cartas fechadas e são colocadas cinco cartas abertas na mesa. Não é permitida a troca de cartas e vence o jogador com maior pontuação com 5 cartas.

O Texas hold'em tem quatro rodadas de apostas. A primeira quando os jogadores recebem suas duas cartas. A segunda quando são colocadas três cartas abertas na mesa (essas três cartas abertas de uma vez são chamadas de *flop*). Uma nova rodada quando é aberta uma quarta carta na mesa (chamada *turn*) e última rodada quando for aberta a quinta carta na mesa (chamada *river*). Após cada rodada de apostas, cada jogador pode sair do jogo, cobrir a aposta ou aumentá-la.

Antes das cartas serem distribuídas, dois jogadores imediatamente à esquerda do carteador devem fazer as suas apostas, que podem ser do tipo *big blind* ou *small blind* (normalmente o small blind é a metade do big blind). Um marcador chamado "botão"ou "botão de dealer"(*dealer* é como pode chamado o primeiro jogador a fazer a aposta) é colocado na mesa, em frente ao dealer. A vantagem de ser o dealer é poder apostar por último (sentindo o "clima"das apostas dos outros jogadores). Antes da mão começar, o jogador imediatamente a esquerda do botão coloca o small blind, a primeira aposta obrigatória. O jogador imediatamente a esquerda do small blind coloca o big blind, mas os blinds podem variar dependendo dos valores e da estrutura de apostas em jogo.

3.3.1 Aprendendo a jogar

Como jogar o pôquer Texas hold'em? Em resumo, algumas regras básicas:

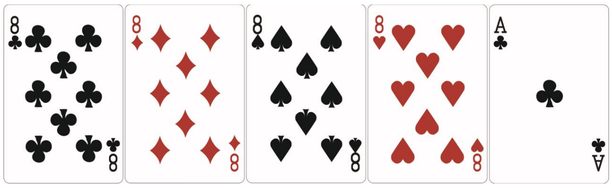
Aprenda a pontuação das cartas

Há apenas nove modos (ou jogos) para pontuar no pôquer. Em ordem decrescente de pontuação temos:

Straight Flush É uma sequência de cartas, todas do mesmo naipe. Se mais de um jogador tiver um straight flush, valerá a maior sequência. Por exemplo, a sequência $K\clubsuit - Q\clubsuit - J\clubsuit - 10\clubsuit - 9\clubsuit$ ganha da sequência $7\heartsuit - 8\heartsuit - 9\heartsuit - 10\heartsuit - J\heartsuit$. A maior combinação possível é chamada de Royal Straight Flush ($A\diamondsuit - K\diamondsuit - Q\diamondsuit - J\diamondsuit - 10\diamondsuit$). Não há desempate entre sequências com mesmas cartas (mudando somente o naipe). Em algumas ocasiões, considera-se a sequência de Copas como a maior (mas é pre-definido pelos jogadores ou pelos organizadores dos campeonatos antes das partidas começarem).

Royal Straight Flush. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Quadra Consiste em quatro cartas iguais. Caso haja empate (dois jogadores com quadras), ganha o jogador com o maior valor da carta que forma a quadra. Por exemplo, a sequência $9\clubsuit - 9\spadesuit - 9\diamondsuit - 9\heartsuit - 4\diamondsuit$ ganha da sequência $6\clubsuit - 6\spadesuit - 6\diamondsuit - 6\heartsuit - K\heartsuit$. Caso haja empate, não há critérios para desempate.

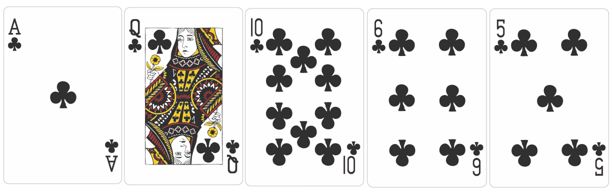


Quadra. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Full House (ou Full Hand) É formado por uma trinca e um par. Caso haja empates entre full houses, desempata a maior trinca. Por exemplo, a mão $Q\heartsuit - Q\diamondsuit - Q\spadesuit - 8\spadesuit - 8\heartsuit$ ganha da trinca $8\spadesuit - 8\clubsuit - 8\clubsuit - K\spadesuit - K\clubsuit$. Caso haja empate entre as trincas, desempata o maior par ($J\diamondsuit - J\spadesuit - J\heartsuit - 9\heartsuit - 9\diamondsuit$ ganha de $J\heartsuit - J\spadesuit - J\clubsuit - 4\clubsuit - 4\heartsuit$). Caso haja novo empate, não há critério de desempate.

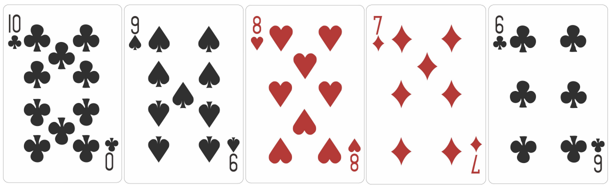
Full House. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Flush Um flush acontece quando o jogador tem todas as cartas do mesmo naipe (por exemplo $9\diamondsuit - 5\diamondsuit - 10\diamondsuit - Q\diamondsuit - A\diamondsuit$). O desempate entre flushes ocorre comparando as maiores cartas de cada jogador e, havendo novo empate, uma nova comparação entre as "maiores seguintes"até se esgotarem as cinco cartas. Caso haja empate entre todas as cartas dos flushes, sendo diferenciados apenas por seus naipes, é declarado empate, pois não critério de desempate.



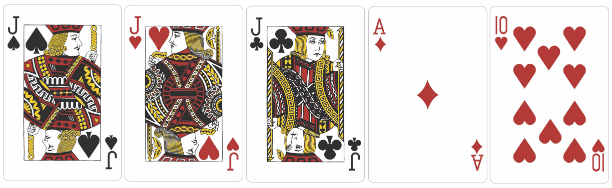
Flush. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Straight Sequência de cartas em que o naipe não importa. O desempate entre os straights é pelo valor das cartas da sequência (semelhante ao straight flush). Caso haja empate, mudando apenas os naipes dos straights, é considerado empate por não haver critérios para desempatar.



Straight. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Trinca É uma sequência com três cartas iguais. Caso haja empate entre trincas, ganha aquela com maior valor das cartas (assim como as quadras, mencionadas anteriormente). Se a diferença for somente nos naipes das trincas, não há desempate.

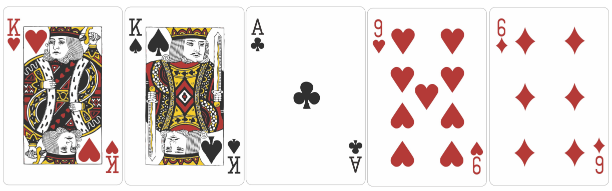


Trinca. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Dois pares Como o próprio nome sugere, essa pontuação é dada por dois pares de cartas iguais. Caso mais de um jogador tenha essa pontuação, compara-se os maiores pares de cada jogador e, havendo novo empate, faz a comparação entre os menores pares. Em um novo empate, não há outro critério para desfazê-lo.

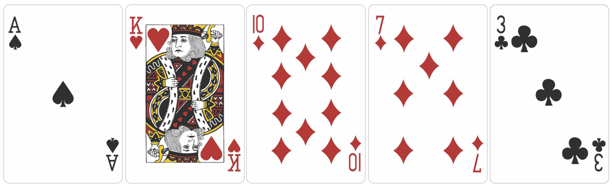
Dois Pares. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Par Dupla de cartas iguais. Caso haja empate de pontuação, ganha o jogador com maior valor de cartas que formam o par. Novo empate não há critérios que desempate o desfecho da partida.



Par. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Maior carta Se nenhum dos jogadores que permanecerem até a última rodada de apostas fizer nenhuma das pontuações citadas acima, ganhará aquele com a maior carta. Caso a maior carta de outro jogador coincidir, é declarado empate na rodada.



Nenhuma combinação. (*Fonte: Acervo do Autor*)

Conheça sua posição na mesa

Na rodada inicial, no sentido horário, após o carteador, temos primeiro o dealer. Esse poderá apostar po último, como já citado anteriormente.

Ao lado esquerdo do dealer temos o small blind. O primeiro obrigado a apostar. Sua aposta normalmente é a metade do próximo jogador, o big blind. Os demais jogadores não tem nomes específicos.

A cada rodada que se sucede, o botão do dealer muda para o próximo jogador (à sua esquerda), bem como as posição de small e big blind.

Antes do Flop

Todos os jogadores recebem suas duas cartas fechadas antes do flop (fase que são abertas três cartas comuns a todos). O small blind e o big blind fazem suas apostas e os próximos jogadores (um de cada vez) decidirão se vão cobrir a aposta dos blinds, aumentar as apostas ou desistir da rodada. Sempre no sentido horário, quando o dealer fizer a sua aposta, começará o flop.

Depois do Flop

Após as três cartas comuns a todos forem reveladas, as ações dos jogadores e ordem das apostas continua, semelhante ao pré-flop. Após todos encerrarem suas apostas, a quarta carta será revelada (chamada de turn).

Ações depois do Turn

Quando a carta turn é aberta, mais uma rodada de apostas é aberta. Não há mudança de regras e nem de ordem para essa rodada de apostas. Normalmente, esse é o momento do jogador decidir se sua mão é boa ou ruim. Dificilmente os jogadores esperam a quinta e última carta da mesa (chamada de river) para formarem seus jogos.

Ações depois do River

Aberta a última carta da mesa, o jogador não tem mais a possibilidade de melhorar a sua pontuação, pois não é permitida a troca de cartas e nenhum jogador receberá mais cartas. Novamente é aberta uma rodada de apostas para que os jogadores decidam se desistem, pagam a aposta ou aumentam-a.

Showdown

O showdown é o momento em que todos os participantes, na ordem, revelam seus jogos. Também chamado de "hora da verdade"é um dos momentos mais entusiasmantes do jogo. Caso um jogador veja que vai perder, ele não é obrigado a desvirar suas cartas, simplesmente entrega-as viradas à mesa. Essa atitude gera muita curiosidade entre os demais jogadores e o público que assiste as partidas. Vence o jogador que tiver a melhor pontuação nas suas combinações (as pontuações já foram descritas anteriormente).

3.3.2 As probabilidades de pontuação

Para o espaço amostral, devemos considerar todas as 52 cartas do baralho, das quais a pontuação do jogador será dada escolhendo cinco entre as sete cartas disponíveis, independente de sua ordem. Assim, o espaço amostral consiste das possibilidades de escolher sete cartas entre as 52 disponíveis. Logo:

$$n(\Omega) = C_{52,7} = \frac{52!}{7!.45!} = 133784560.$$

Logo, existem 133784560 possíveis combinações de jogos (que pontuam no ranking, ou não). A seguir, vamos calcular a probabilidade de um jogador ganhar com cada uma das pontuações do ranking do Texas hold'em.

1 - Para o Royal Straight Flush (RSF), há 4 possíveis jogos com cinco cartas, sendo eles $A - K - Q - J - 10$ de cada um dos naipes $\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$. As duas cartas restantes, para formar as sete cartas disponíveis, podem ser escolhidas entre as 47 restantes, ou seja, para cada um dos 4 jogos possíveis, existem $C_{47,2}$ pares de cartas para completar o jogo de 7 cartas. Assim, as chances de um jogador obter um RSF é de:

$$P(RSF) = \frac{n(RSF)}{n(\Omega)} = \frac{4 \cdot C_{47,2}}{133784560} = \frac{4324}{133784560} \approx 0,00003232 \approx 0,003232\%$$

2 - Como um Straigh Flush (SF) é uma sequência do mesmo naipe de cinco cartas seguidas, podemos determinar a sequência do straight flush simplesmente olhando para a carta mais alta presente na jogada. Assim, temos da carta 5, formando a sequência A⊗-2⊗-3⊗-4⊗-5⊗, onde ⊗ representa um naipe, até a carta A, formando a sequência 10⊗-J⊗-Q⊗-K⊗-A⊗. Observe então que temos 10 possibilidades de straight flush para cada naipe. Além disso, observe também que, exceto pelo jogo com carta mais alta A, para todos os outros 9 jogos restantes existe uma carta maior, e esses casos devem ser tratados separadamente. Observe que um straight flush com carta mais alta A é, na realidade, um royal straight flush. Logo, não iremos considerar este caso, para calcularmos a probabilidade de obtermos um straight flush que não seja royal.

Agora, vamos calcular a quantidade de straight flushs para os demais casos. Nestes casos, temos que garantir que a escolha das duas cartas que sobram não mexem no jogo que estamos interessados. Para deixar claro o que queremos dizer, vamos ilustrar calculando a quantidade de possibilidades com carta mais alta 5. Assim, temos quatro possibilidades com 5 cartas, a saber, uma para cada naipe. Agora, temos que ver como podemos escolher as duas cartas restantes para formarmos o jogo com 7 cartas. Suponha que uma das cartas restantes é a carta 6 do mesmo naipe do straight flush. Se isso ocorrer, estaremos mudando o jogo, não será mais um straight flush com carta mais alta 5, e sim, um straight flush com carta mais alta 6, o que não faz parte deste cálculo (onde queremos saber apenas as quantidades com carta mais alta 5). Portanto, devemos excluir a possibilidade de uma das duas cartas ser a carta 6 com o naipe em questão. Assim, podemos escolher as duas cartas entre as 46 restantes, ou seja, temos $C_{46,2}$ formas de escolhermos as duas cartas restantes. Este mesmo raciocínio se aplica aos demais casos. Portanto, para o segundo caso temos 9 possibilidades restantes de cartas mais altas, para cada um deles temos 4 possibilidades de naipes, uma mão de 5 cartas e finalmente as duas cartas restantes podem ser escolhidas entre as 46 restantes (após excluirmos a carta imediatamente superior para evitarmos que mudemos a mão), ou seja de $C_{46,2}$ formas diferentes.

Finalmente, temos então que a quantidade de jogos que são straight flush, mas não são royal straight flushs,

$$n(SF) = 9 \cdot 4 \cdot 1 \cdot C_{46,2} = 37260.$$

Com isso, a probabilidade de um jogador conseguir formar um SF é de:

$$P(SF) = \frac{n(SF)}{n(\Omega)} \approx 0,000279 \approx 0,0279\%$$

3 - Como já foi visto, a Quadra (Q) consiste de quatro cartas iguais e uma diferente. Para calcular a quantidade de jogos do tipo quadra, deve-se levar em consideração que a 1^a carta pode ser qualquer uma das 52 cartas, seguidas obrigatoriamente de cartas do mesmo valor, porém com os outros naipes, assim, o naipe não importa, o que importa é o valor da carta. Logo, temos $52/4 = 13$ possibilidades. As 3 cartas restantes podem ser quaisquer uma das 48 cartas restantes, donde temos $C_{48,3}$ possibilidades. Assim, a quantidade de jogos quadra que podem ser formados é:

$13 \cdot C_{48,3} = 224848$ possíveis combinações do tipo quadra. Assim, a probabilidade de um jogador obter uma quadra será:

$$P(Q) = \frac{n(Q)}{n(\Omega)} \approx 0,00168 \approx 0,168\%.$$

4 - Para o Full House (FH), deve-se levar em consideração de uma trinca e uma dupla. Observe que como temos 7 cartas disponíveis, o full house pode acontecer de formas distintas. A saber: podemos ter duas trincas; uma trinca e dois pares; e uma trinca, um par e duas cartas diferentes. Observe que poderíamos também ter uma trinca e uma quadra, porém neste caso a mão acaba virando efetivamente uma quadra ao invés de um full house, portanto devemos excluir essa possibilidade.

Vamos então tratar estes casos separadamente.

Vamos começar calculando a possibilidade de obtermos duas trincas. Para determinar as cartas que serão escolhidas para as trincas, devemos escolher duas cartas entre as 13 disponíveis (sem levar em consideração o naipe), assim temos $C_{13,2}$ formas de escolher as cartas que irão compor as trincas. Agora, devemos escolher 3 entre os 4 naipes disponíveis para a primeira trinca, para a segunda trinca, também devemos escolher 3 entre os 4 naipes disponíveis, e para a carta restante podemos escolher qualquer carta entre as 11 disponíveis restantes (para evitar a formação de uma quadra), e qualquer um dos 4 naipes. Logo, temos $C_{13,2} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,3} \cdot 11 \cdot 4 = 54912$ possibilidades.

Agora, a quantidade de formas de obtermos uma trinca e dois pares. Temos 13 possibilidades para determinar a carta que formará a trinca, e temos que escolher 3 entre os 4 naipes disponíveis. Para os dois pares, temos que escolher 2 cartas entre as 12 disponíveis. Para cada um dos dois pares devemos escolher 2 naipes entre os 4 disponíveis, ou seja, temos $C_{4,2}$ possibilidades para o primeiro par e $C_{4,2}$ possibilidades para o segundo par. Com isso fechamos as 7 cartas. Assim, temos $13 \cdot C_{4,3} \cdot C_{12,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} = 123552$ possibilidades.

Finalmente, vamos considerar a forma de obtermos uma trinca, um par e as duas restantes serem diferentes. Temos 13 possibilidades de cartas para a trinca, e temos que escolher 3 entre os 4 naipes disponíveis. Para o par, temos 12 possibilidades de cartas, e temos que escolher 2 entre os 4 naipes disponíveis. Para as duas cartas restantes, temos que escolhê-las entre as 11 cartas restantes (para serem diferentes), e estas podem ser de qualquer naipe. Assim, temos $C_{11,2}$ formas de escolhê-las, e 4 possibilidades de naipes para a primeira, e 4 possibilidades de naipes para a segunda. Logo, temos $13 \cdot C_{4,3} \cdot 12 \cdot C_{4,2} \cdot C_{11,2} \cdot 4 \cdot 4 = 3294720$ possibilidades.

Juntando todos os casos, obtemos 3473184 possibilidades de obtermos um full house.

Portanto, a probabilidade de um jogador obter um FH é de:

$$P(FH) = \frac{n(FH)}{n(\Omega)} \approx 0,0260 \approx 2,6\%$$

5 - Para um Flush (F) deve-se ter todas as cinco cartas escolhidas dentre as 13 do mesmo naipe. Neste caso temos algumas possibilidades. É possível que as 7 cartas sejam do mesmo naipe; que tenhamos 6 cartas de um mesmo naipe e uma de um naipe diferente, e finalmente, 5 cartas de um mesmo naipe e as duas remanescentes de naipes diferentes. Para o caso de 7 cartas do mesmo naipe temos que escolher 7 dentre as 13 cartas disponíveis, temos $C_{13,7}$ formas de fazer isto, e temos 4 naipes possíveis. Logo, para este caso temos $4 \cdot C_{13,7} = 6864$ para o primeiro caso. Agora, para termos 6 cartas de um mesmo naipe e outra de um naipe diferente, temos que escolher 6 cartas entre as 13 disponíveis, temos $C_{13,6}$ formas de fazer isto, e 4 naipes disponíveis. Para a carta restante temos que escolhê-la entre as cartas de naipe diferente temos então 3 naipes disponíveis, e 13 cartas para cada naipe, daí $13 \cdot 3$ cartas disponíveis. Assim, para o segundo caso temos $C_{13,6} \cdot 4 \cdot 13 \cdot 3 = 267696$ possibilidades para o segundo caso. Finalmente, para o último caso, temos que escolher 5 cartas de um mesmo naipe, temos $C_{13,5}$ formas de fazer isto, temos 4 naipes disponíveis, e para as duas cartas restantes, devemos escolher duas entre as cartas disponíveis de naipes diferentes. Temos $3 \cdot 13 = 39$ cartas de naipes diferentes, e devemos escolher duas, logo temos $C_{39,2}$ formas de fazer isto. Logo, para o último caso temos $C_{13,5} \cdot 4 \cdot C_{39,2} = 3814668$ formas. Assim, a quantidade de flushes é $3814668 + 267696 + 6864 = 4089228$.

Porém, no meio de todos esse Flushes, temos os Straights Flushes e os Royal Straight Flushes. Desconsiderando esses jogos, que levam a outras pontuações diferentes do Flush, temos um total de $4089228 - 37260 - 4324 = 4047644$ flushes e, a probabilidade de um jogador obter um Flush é de:

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} \approx 0,0303 \approx 3,03\%$$

6 - O Straight deve conter uma sequência, porém de qualquer naipe. Como temos 7 cartas disponíveis, surgem muitas possibilidades. Podemos ter 7 cartas com valores distintos, com 5 delas formando uma sequência. Podemos ter 6 delas com valores distintos (neste caso teremos também uma dupla), com 5 delas formando uma sequência. Finalmente, podemos ter uma sequência formada por 5 cartas, e as duas repetidas (aqui a repetição pode vir de dois pares ou de uma trinca). Vamos estudar todos esses casos separadamente. Assim como fizemos no cálculo do straight flush, vamos determinar a sequência da carta olhando para a carta mais alta. Assim, as sequências vão de 5 (A$\otimes$-2$\otimes$-3$\otimes$-4$\otimes$-5$\otimes$) a A (10$\otimes$-J$\otimes$-Q$\otimes$-K$\otimes$-A$\otimes$), onde $\otimes$ representa um mesmo naipe.

Vamos começar supondo que as 7 cartas têm valores distintos. Assim, seguindo a mesma lógica do straight flush, devemos separar o caso em que a maior carta é o A (pois não tem carta maior) e os demais casos (onde as demais cartas devem ser escolhidas de tal forma que não contemplem a carta imediatamente superior). Primeiro, calculemos a quantidade de mãos sem levar em consideração as escolhas dos naipes. Relembre que temos 10 sequências possíveis. Para a sequência com maior valor A, podemos escolher as 2 cartas restantes entre as 8 disponíveis, temos $C_{8,2}$ formas de fazer isto. Para as 9 sequências restantes devemos escolher as 2 cartas restantes de tal forma que não a carta imediatamente superior não seja escolhida (veja a explicação deste fato com mais detalhes no cálculo do straight flush), logo temos 7 possibilidades de cartas para escolhermos duas. Daí, temos $9 \cdot C_{7,2}$ formas de escolher cartas nesse caso. Portanto, sem levar em consideração os naipes, temos $C_{8,2} + 9 \cdot C_{7,2}$ formas de escolhermos as cartas.

Agora, vamos escolher os naipes de tal forma que não formemos um flush, não precisa ser necessariamente um straight flush, já que o flush possui pontuação maior que o straight no pôker. Inicialmente, temos 4 naipes disponíveis para cada carta, logo temos 4^7 possibilidades de naipes. Temos agora que excluir as escolhas que formam straight flushes. Assim, vamos calcular as possibilidades de escolhas de naipes que formam straight flushes. Temos 4 naipes disponíveis. A primeira forma é que todas as 7 cartas sejam do mesmo naipe. Isso ocorre de 4 formas, uma para cada naipe. A segunda forma é que tenhamos 6 de um mesmo naipe e a última de um naipe diferente. Assim, para cada naipe, temos que escolher 6 cartas entre as 7 disponíveis para serem do mesmo naipe, de $C_{7,6}$ formas possíveis, e para a última carta podemos escolher qualquer um dos 3 naipes restantes. Logo, para este caso temos $4 \cdot C_{7,6} \cdot 3$ possibilidades. Finalmente, podemos ter 5 cartas com o mesmo naipe, e as outras duas de naipes diferentes. Novamente, temos 4 naipes disponíveis, e temos que escolher 5 entre as 7 cartas para ficar com o mesmo naipe, temos $C_{7,5}$ formas, já as outras duas, cada uma pode ser escolhida entre os 3 naipes restantes. Logo, para este caso temos $4 \cdot C_{7,5} \cdot 3 \cdot 3$ possibilidades.

Logo, a quantidade de escolhas de naipes que formam straight flushes é $4 + 4 \cdot C_{7,6} \cdot 3 + 4 \cdot C_{7,5} \cdot 3 \cdot 3 = 844$. Portanto, para formarmos straights, devemos escolher os naipes de $4^7 - 844 = 15540$ formas.

Assim, com 7 cartas de valores distintos, temos $(C_{8,2} + 9 \cdot C_{7,2})15540 = 3372180$ possibilidades.

Vamos agora calcular a quantidade de possibilidades de termos straights com 6 valores distintos. Neste caso temos, necessiariamente, um par. Comece ignorando a carta repetida. Depois calcularemos as formas de escolher a carta repetida. Assim, temos 6 cartas, com uma sequência. Se a sequência tiver carta mais alta A, podemos escolher a sexta carta entre qualquer uma das 8 restantes. Já, para os demais 9 casos, a sexta carta deve ser escolhida sem que seja escolhida a carta imediatamente superior, logo temos 7 possibilidades. Assim, temos $8 + 9 \cdot 7$ possibilidades para a escolha das 6 cartas. Vamos agora determinar as formas de escolhermos a carta repetida e quais os naipes das cartas repetidas. Neste caso temos 6 possibilidades de cartas e 4 naipes disponíveis para escolhermos 2. Assim, temos $6 \cdot C_{4,2}$ formas de escolhermos as cartas repetidas juntamente com seus naipes.

Em resumo, até o momento temos $(8 + 9 \cdot 7)(6 \cdot C_{4,2})$ formas de montarmos uma sequência de 5 cartas, com um par, onde determinamos os naipes do par. Falta então determinarmos a quantidade de escolhas de naipes para as 5 cartas restantes de tal forma que não seja formado um flush.

Temos agora que calcular de quantas formas podemos formar um flush neste caso. A primeira forma é que as 5 cartas restantes possuam o mesmo naipe. Para este caso temos 4 formas possíveis. A segunda forma é que 4 das 5 cartas possuam o mesmo naipe de uma das cartas do par, e a quinta carta seja um dos outros naipes. Assim, temos que escolher 4 das 5 cartas, temos $C_{5,4}$ formas de fazer isto, em seguida temos 2 naipes disponíveis para escolhermos (um para cada carta do par) e finalmente 3 naipes para a carta que falta. Logo, temos $C_{5,4} \cdot 2 \cdot 3$ formas de escolhermos o naipe nesse segundo caso. Logo, a quantidade de formas de escolher os naipes de tal forma que se tenha um flush é $4 + C_{5,4} \cdot 2 \cdot 3 = 34$.

O total de formas de escolher os naipes restantes é 4^5, portanto, podemos escolher os naipes restantes de $4^5 - 34$ formas sem que formemos um flush. Desta forma, a quantidade de formas de termos um straight é

$$(8 + 9 \cdot 7)(6 \cdot -C_{4,2})(4^5 - 34) = 2530440.$$

Vamos agora calcular as quantidades de straights com 5 valores distintos. Primeiramente quando tiver uma trinca. Se temos uma trinca, teremos a sequência formada, e as duas cartas restantes terão o mesmo valor de uma da sequência. Temos então 10 possibilidades de sequências possíveis, e as duas cartas restantes serão escolhidas iguais a uma das 5 cartas disponíveis na sequência. Assim, temos $10 \cdot 5$ formas de escolhermos a sequência e a trinca. Para a escolha dos naipes, vamos começar escolhendo os naipes das cartas da trinca. Temos 4 naipes disponíveis para escolhermos 3, assim temos $C_{4,3}$ formas de escolher os naipes das cartas da trinca.

Agora, temos que calcular as formas de escolher os naipes restantes sem que seja formado um flush. Temos que escolher 4 naipes, e o total de formas de escolher estes naipes é 4^4. Temos agora que ver de quantas formas podemos ter um flush. Para termos um flush, todas as 4 cartas da sequência (que não formam a trinca) devem ter o mesmo naipe, de um dos naipes da trinca. Assim, temos apenas 3 formas de escolher os naipes e formar um flush. Logo, o total de formas de escolher os naipes sem formar um flush é $4^4 - 3 = 253$. Portanto, o total de formas de termos um straight com 5 valores distintos e uma trinca é

$$10 \cdot 5 \cdot C_{4,3} \cdot 253 = 50600.$$

Finalmente, vamos calcular a quantidade de formas de termos um straight com 5 valores distintos e dois pares. Aqui temos as 10 sequências para escolher. Para determinar os dois pares, devemos escolher 2 cartas, entre as 5 disponíveis. Isto pode ser feito de $C_{5,2}$ formas distintas. Assim, temos $10 \cdot C_{5,2}$ formas de escolhermos a sequência e os dois pares. Devemos agora escolher os naipes de tal forma que não tenhamos um flush. Vamos separar em casos. Pois podemos ter, 2 pares com um total de 2 naipes, 2 pares com um total de 3 naipes, e 2 pares com um total de 4 naipes.

Para o caso 2 pares, 2 naipes. Temos 4 naipes disponíveis, e devemos escolher 2, assim, temos $C_{4,2} = 6$ possibilidades de determinar os naipes dos dois pares. Vamos ver as formas de determinar os naipes das 3 cartas restantes de tal forma que não formemos um flush. Neste caso, um flush será formado quando quando as 3 cartas restantes tiverem o mesmo naipe de um dos dois naipes disponíveis no par. Além disso, total de formas de escolher os naipes das 3 cartas restantes é $4^3 = 64$. Assim, para este caso, temos $6 \cdot (64 - 2)$ formas de escolhermos os naipes sem formar um flush.

Para o caso 2 pares, 3 naipes. Neste caso, para cada par, uma das cartas possui o mesmo naipe, e as demais cartas possuem naipes diferentes. Temos então 4 formas de escolher o naipe que coincide, 3 formas para o segundo naipe e 2 formas para o terceiro naipe. Assim, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades. Agora, vamos calcular a quantidade de formas de escolher os naipes das 3 cartas restantes sem que haja um flush. Para haver um flush, as 3 cartas que sobram devem ter o mesmo naipe que os pares têm em comum. Isso só pode ocorrer de 1 forma. Como temos $4^3 = 64$ formas de escolher os naipes restantes, o total de formas de escolher os naipes sem formar um flush é $24 \cdot (64 - 1)$.

Finalmente, temos o caso 2 pares, 4 naipes. Neste caso, cada naipe de cada carta de cada par é diferente. Assim, de 4 naipes disponíveis, devemos escolher 2 naipes para um par, e os naipes que sobram são os naipes do segundo par. Temos $C_{4,2} = 6$ formas de fazer isto. Observe que neste caso é impossível termos um flush, pois duas cartas terão, necessariamente, naipes diferentes. Assim, devemos apenas determinar o número de formas de escolher os naipes restantes, que são $4^3 = 64$ formas. Assim, temos $6 \cdot 64$ formas de escolher os naipes neste caso.

Portanto, o total de formas de termos um straight com 5 valores distintos e dois pares é

$$10 \cdot C_{5,2} \cdot (6 \cdot (64 - 2) + 24 \cdot (64 - 1) + 6 \cdot 64) = 226800.$$

Assim, finalmente, o número de formas de obtermos um straight é

$$n(S) = 3372180 + 2530440 + 50600 + 226800 = 6180020.$$

Portanto, a probabilidade de termos um straight é

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(\Omega)} \approx 0,0462 \approx 4,62\%$$

7 - Para a formação de uma Trinca (T), devemos começar escolhendo 5 cartas distintas para evitar a formação de um ou dois pares, ou de duas trincas (assim, formando um full house). Temos $C_{13,5}$ formas de fazer isto. Temos agora que excluir as possibilidades de formar um straight. Temos 10 sequências disponíveis, então temos 10 formas de termos um straight. Logo, o total de forma de escolhermos essas 5 cartas é $C_{13,5} - 10$.

As 2 cartas restantes deverão ter o mesmo valor de uma das 5 disponíveis. Temos então $(C_{13,5} - 10) \cdot 5$ formas de termos uma trinca. Para escolhermos os naipes da trinca, temos que escolher 3 entre os 4 naipes disponíveis, ou seja, $C_{4,3}$ formas de escolher os naipes da trinca. Falta então determinar as formas de escolher os naipes das 4 cartas restantes de tal forma que não seja formado um flush. Para formar um flush temos apenas 3 possibilidades, ou seja, do naipe das 4 cartas coincidirem com um dos 3 naipes da trinca. Logo, como temos 4^4 possibilidades de escolhas de naipes para as cartas restantes, temos $4^4 - 3$ formas de escolhermos os naipes das 4 cartas restantes sem formar um flush. Portanto,

$$n(T) = (C_{13,5} - 10) \cdot 5 \cdot C_{4,3} \cdot (4^4 - 3) = 6461620.$$

Daí,

$$P(T) = \frac{n(T)}{n(\Omega)} \approx 0,0483 \approx 4,83\%$$

8 - Para a formação de Dois Pares (DP) temos duas formas possíveis. A primeira é que tenhamos 3 pares e uma carta distinta, e a segunda é que tenhamos 2 pares e 3 cartas distintas.

Vamos avaliar a primeira possibilidade. Neste caso, podemos teremos na realidade 4 valores distintos, e 3 deles repetirão. Logo podemos escolher os 4 valores distintos entre as 13 possibilidades de $C_{13,4}$ formas. As cartas que se repetirão serão 3 entre os 4 valores disponíveis. Assim, temos $C_{4,3}$ formas de escolhermos as cartas que irão repetir para formar os pares. Assim, temos $C_{13,4} \cdot C_{4,3}$ formas de escolher os valores. Vamos agora ver de quantas formas podemos escolher os naipes. Para cada um dos pares, devemos escolher 2 naipes entre os 4 disponíveis, e para a última carta podemos escolher qualquer um dos 4 naipes. Portanto, para este caso, o total de possibilidades é $C_{13,4} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} \cdot 4 = 2471040$.

Vamos agora calcular o número de casos na segunda situação, na qual temos 2 pares e 3 cartas distintas. Aqui, para evitar a formação de full houses, podemos escolher 5 cartas distintas entre as 13 disponíveis, e as duas que faltam serão escolhidas entre as 5 disponíveis, para a formação dos dois pares. Observe que ao escolhermos as 5 cartas distintas, devemos subtrair os 10 casos que formam straights. Assim, temos $C_{13,5} - 10$ formas de escolhermos as 5 cartas distintas. Devemos agora escolher as 2 cartas que se repetirão. Temos que escolher 2 entre as 5 disponíveis, logo temos $C_{5,2}$ possibilidades. Para a escolha dos naipes, já fizemos a conta no cálculo do straight. Olhando para a situação 5 valores distintos e dois pares, temos $(6 \cdot (64-2) + 24 \cdot (64-1) + 6 \cdot 64)$ formas de escolher os naipes sem formar um flush. Logo, temos $(C_{13,5} - 10)C_{5,2}(6 \cdot (64-2) + 24 \cdot (64-1) + 6 \cdot 64) = 28962360$ formas de formar dois pares com 3 valores distintos.

Portanto, o número de formas de obtermos dois pares é $2471040 + 28962360 = 31433400$. Assim, temos que

$$P(DP) = \frac{n(DP)}{n(\Omega)} \approx 0,235 \approx 23,5\%$$

9 - Um Par (P) é composto por uma dupla de cartas de mesmo valor, mas com naipes diferentes. Para evitar a formação de um full-house, devemos escolher 6 cartas distintas e escolher uma delas para se repetir. Assim, devemos escolher 6 valores entre os 13 disponíveis. Temos $C_{13,6}$ formas de fazer isto. Devemos agora subtrair os casos em que estas cartas formam um straight. Para formar um straight, é possível que tenhamos uma sequência de 6 cartas, ou uma sequência de 5 cartas com a outra carta desconectada da sequência. Temos 9 sequências possíveis com 6 cartas: a sequência com maior valor 6, até a sequência com maior valor A. Agora, consideremos as sequências com 5 cartas. Devemos então considerar as sequências de 5 cartas e escolher a sexta carta sem que esta atrapalhe a sequência. Se a sequência tiver maior carta 5 ou maior carta A, devemos tomar a sexta carta como sendo qualquer uma das outras 8 restantes, exceto a carta que complete uma sequência de 6 cartas (ou seja, devemos excluir o 6 ou o 9, dependendo se a maior carta é 5 ou A, respectivamente), assim, para estes 2 casos, podemos escolher 7 das cartas restantes. Já se a maior carta for $6, 7, \ldots, K$, devemos excluir a carta que vem antes e a que vem depois (também para evitar que formemos uma sequência de 6 cartas, que já foi contabilizada), ou seja, para estes 8 casos, devemos escolher 6 das cartas restantes. Assim, a quantidade de formas de termos straights é $9 + 2 \cdot 7 + 8 \cdot 6 = 71$.

Logo, a quantidade de cartas distintas que podemos escolher sem formar um straight é

$$C_{13,6} - 71 = 1645.$$

Finalmente, devemos escolher os naipes. Vamos começar determinando os naipes das cartas do par. Temos 6 valores distintos para escolhermos o par, e o naipe pode ser escolhido, tomando-se 2 naipes entre os 4 disponíveis. Assim, temos $6 \cdot C_{4,2}$ formas de escolhermos os naipes das cartas do par. Falta agora determinar os naipes das 5 cartas restantes de tal forma que não seja formado um flush. Já fizemos este cálculo no estudo do straight com 6 valores distintos. Lá, mostramos que a quantidade de formas de obter um flush, neste caso, é $4 + C_{5,4} \cdot 2 \cdot 3 = 34$. Como podemos escolher os 5 naipes restantes de 4^5 formas diferentes, temos que o total de formas de escolhermos os 5 naipes restantes sem formar um flush é $4^5 - 34$. Desta forma, a quantidade de formas de obtermos um par é

$$1645 \cdot 6 \cdot C_{4,2} \cdot (4^5 - 34) = 58627800.$$

Daí, a probabilidade de um jogador formar um Par é:

$$P(P) = \frac{n(P)}{n(\Omega)} \approx 0,4382 \approx 43,82\%$$

10 - A probabilidade de não se obter nenhum jogo, e a decisão ser pela Maior Carta (MC), é a probabilidade complementar da união de todas as probabilidades de pontuar com qualquer uma das combinações acima, haja visto que a quantidade de combinações que não representam nenhuma das combinações acima é a diferença entre o número de elementos do espaço amostral e a soma de todos os totais de jogos possíveis. Denotando por $P(X)$ a probabilidade de se obter qualquer tipo de jogo que pontua, temos que:

$$P(MC) = 1 - P(X) \approx 0,1741 \approx 17,41\%$$

Capítulo 4

Blackjack

O Blackjack (ou Vinte e Um como é mais conhecido no Brasil) é um jogo bastante procurado nos cassinos pela facilidade nas regras e a maior probabilidade do jogador obter sucesso. O objetivo do jogo é obter uma pontuação maior que seu adversário, mas sem ultrapassar os 21 pontos. É comum as mesas de Blackjack pagarem 3:2 (o jogador recebe 3 unidades para cada 2 unidades apostadas), mas podem chegar a pagar 6:5. O Blackjack ganhou tanto apreço de jogadores que acabou se tornando tema principal do filme "Quebrando a banca"(2008, Sony - EUA).

4.1 A história do Blackjack

O Vinte e Um é o jogo que deu origem ao Blackjack que conhecemos hoje. O Vinte e Um teve sua origem na França, por volta do século XVIII, quando se tornou um passatempo entre a nobreza francesa, tanto que a amante do rei Luís XV o convenceu a organizar festas de Vinte e Um (Vingt en Un, originado do jogo "Chemin de Fer"que pode ser traduzido como Caminho do Ferro) em seu palácio. Até mesmo napoleão Bonaparte (que não era adepto de jogos de cartas) se fascinou pelo Vinte e Um durante seu exílio na Ilha de Elba. Mas o Vinte e Um não surgiu do nada. Ele teve (segundo historiadores) origem de dois jogos, de épocas distintas.

Na Itália, durante o século XV, por volta de 1440, um monge italiano chamado Bernardin de Sienne escreveu um sermão contra os jogos de azar, condenando (em especial) um jogo em que o objetivo era conseguir formar a maior pontuação possível, que não ultrapassasse o valor de "Trinta e Um". A primeira referência concreta desse jogo esteve no livro de Ed S. Taylor, em 1865, que remete ao ano de 1526 um jogo italiano com o nome "Trentuno". A contagem de cartas do Trinta e Um era similar ao Vinte e Um. As figuras (J, Q e K) valiam 10 pontos, o Ás valia 11 pontos e as cartas com números tinham o valor de seu número. Caso um jogador recebesse uma carta que fizesse sua soma extrapolar o valor 31, essa última carta não era considerada e o jogador permanecia com o número de pontos que possuía até o momento.

Outra referência italiana, porém datada do século XVII, é o $7\frac{1}{2}$ (ou "Sette e Mezzo"como há nos registros). Pela primeira vez houve a introdução na ideia de extrapolar a contagem e ser declarado perdedor automaticamente. Não eram usadas as cartas 8, 9, 10. o Ás vale 1 ponto, as cartas (de 2 a 7) valem pontuação igual a sua numeração e qualquer figura (J, Q ou K) vale $\frac{1}{2}$ ponto.

O termo Blackjack teve origem nos cassinos americanos, quando eles ofereceram pagamentos de apostas de 10:1 para o jogador que conseguisse um "Blackjack natural"($A\spadesuit$ acrescido de $J\spadesuit$ ou $J\clubsuit$).

4.2 As regras do Blackjack

Talvez a grande procura dos jogadores pelo Blackjack seja pela facilidade em entender as regras do jogo, assim como a forma como se pontua. Mas o que atrai jogadores profissionais é o fato do jogador poder alterar seu risco, permitindo-o até mesmo que ele possa lucrar mais com o jogo, inclusive quando a situação já estava favorável para ele.

O Blackjack é jogado com até 8 baralhos para dificultar a contagem de cartas que já foram distribuídas aos jogadores. O *dealer* (ou mesa como também pode ser chamado o carteador) só pode pedir um máximo de 5 cartas ou até chegar a pontuação de 17.

O jogador que obtiver maior pontuação (sem extrapolar a pontuação de 21) será considerado o vencedor.

4.2.1 Pontuando no Blackjack

As cartas não tem distinções de naipes. Os valores das cartas de 2 até 10 valem o valor que consta na carta. As cartas de figuras (J, Q e K) valem 10 pontos. A única carta que pode ser chamada de especial é o Ás, que pode valer 1 ou 11 pontos.

Se o jogador tiver em sua mão uma das figuras, o A vale 11 pontos, o que já concede ao jogador a pontuação máxima de 21. Caso o jogador tenha outra carta que não seja de figura, o A vale 1 ponto, o que permite que ele aumente sua pontuação devagar e corra menos risco de ultrapassar os 21 pontos.

4.2.2 Jogando o Blackjack

A mesa fornece a cada jogador e a ela própria duas cartas. As cartas de cada jogador normalmente são voltadas para cima. A mesa fica com uma carta fechada e uma aberta. Se a mesa tiver uma carta de 10 pontos ou um Ás em sua carta aberta, há uma chance de formar 21 para a mesa. Se isso acontecer, a mesa só perde para outro jogador também com 21. Depois de verificar que o dealer não tem um Blackjack, cada jogador pode fazer sua jogada. Depois que todos os jogadores fizerem suas jogadas (da esquerda para a direita), o dealer fará sua jogada. O dealer deve jogar até que obtenha uma pontuação de 17 ou mais (sem ultrapassar a cota máxima de cinco cartas). Se o dealer extrapolar os 21 pontos, todos os outros jogadores que não estouraram a sua pontuação saem vitoriosos da rodada.

As jogadas

Após o dealer distribuir as cartas de cada jogador, cada um poderá escolher o seu próximo passo, que pode ser:

Stand Comando para o dealer parar. Significa que o jogador não quer mais cartas (provavelmente por estar satisfeito com a sua combinação).

Hit Significa que o jogador quer receber mais uma carta.

Dobrar Caso o jogador decida que precisa de uma (e só uma) carta adicional, então ele pode dobrar sua aposta e receber mais uma carta (não há a garantia que será boa para o jogador). Esta opção é oferecida apenas para as duas primeiras cartas ou em cada uma das cartas após o jogador usar o Dividir.

Split Ou Dividir, faz com que o jogador divida suas cartas em duas mãos, formando dois jogos distintos. Essa opção de jogada só pode ser feita se as duas primeiras cartas tiverem o mesmo valor de pontos. Nesse caso, cada uma dessas cartas será a primeira carta de uma nova mão. Cada jogador pode dividir duas ou três vezes, da forma mais conveniente e até mesmo usar o Dobrar em cada uma das mãos que foi dividida.

Surrender Alguns cassinos oferecem a opção de Surrender (ou Redenção) nas primeiras duas cartas. Se o jogador não gostar de suas cartas de sua mão, ele pode pedir a redenção (antes do dealer revelar a carta da mesa) e perder somente a metade de suas fichas.

4.3 As probabilidades

4.3.1 21 pontos

1 - Um Blackjack natural (utilizando apenas duas cartas) pode ser obtido com um Ás e uma carta de 10 pontos. São 16 cartas que valem 10 pontos (10, J, Q e K de 4 naipes cada) e 4 Áses (1 de cada naipe). Essas cartas ainda podem aparecer em qualquer ordem, assim, aplicamos o princípio aditivo, ou simplesmente permutamos as duas cartas, sendo $P_2 = 2! = 2$. Assim:

$$P(Bj_2) = \frac{16}{52}.\frac{4}{51}.P_2 \approx 0,04826546 \approx 4,826546\%$$

Um Blackjack ainda pode ser obtido com mais de duas cartas: três, quatro ou até mesmo cinco cartas.

2 - Para obter um Blackjack com 3 cartas, deve-se levar em consideração que o espaço amostral será, após a retirada de cada carta, de $n(\Omega) = 52.51.50 = 132600$, e cada combinação de carta gera uma quantidade de permutações diferentes, algumas com repetição (como é o caso do A-10-10) e outras não (como o 6-7-8).

Cartas	Quantidade	Permutações	Total	Probabilidade
A-10-10	4.16.15	P_3^2	2880	0,02171946
2-9-10	4.4.16	P_3	1536	0,01158371
3-8-10	4.4.16	P_3	1536	0,01158371
3-9-9	4.4.3	P_3^2	144	0,00108597
4-7-10	4.4.16	P_3	1536	0,01158371

4-8-9	4.4.4	P_3	384	0,00289593
5-6-10	4.4.16	P_3	1536	0,01158371
5-7-9	4.4.4	P_3	384	0,00289593
5-8-8	4.4.3	P_3^2	144	0,00108597
6-6-9	4.4.3	P_3^2	144	0,00108597
6-7-8	4.4.4	P_3	384	0,00289593
7-7-7	4.3.2	P_3^3	24	0,000181
			Total	0,080181

3 - De forma análoga, para obter um Blackjack com 4 cartas (agora o $n(\Omega) = 52.51.50.49 = 6497400$):

Cartas	Quantidade	Permutações	Total	Probabilidade
A-A-9-10	4.3.4.16	P_4^2	9216	0,00141841
A-2-8-10	4.4.4.16	P_4	24576	0,00378244
A-2-9-9	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
A-3-7-10	4.4.4.16	P_4	24756	0,00378244
A-3-8-9	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
A-4-6-10	4.4.4.16	P_4	24756	0,00378244
A-4-7-9	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
A-4-8-8	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
A-5-5-10	4.3.4.16	P_4^2	9216	0,00141841
A-5-6-9	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
A-5-7-8	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
A-6-6-8	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
A-6-7-7	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
2-2-7-10	4.3.4.16	P_4^2	9216	0,00141841
2-2-8-9	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
2-3-6-10	4.4.4.16	P_4	24756	0,00378244
2-3-7-9	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
2-3-8-8	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
2-4-5-10	4.4.4.16	P_4	24756	0,00378244
2-4-6-9	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
2-4-7-8	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
2-5-5-9	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
2-5-6-8	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
2-5-7-7	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
2-6-6-7	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
3-3-5-10	4.3.4.16	P_4^2	9216	0,00141841
3-3-6-9	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
3-3-7-8	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
3-4-4-10	4.3.4.16	P_4^2	9216	0,00141841

3-4-5-9	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
3-4-6-8	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
3-4-7-7	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
3-5-5-8	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
3-5-6-7	4.4.4.4	P_4	6144	0,00094561
3-6-6-6	4.4.3.2	P_4^3	384	0,00005910
4-4-4-9	4.3.2.4	P_4^3	384	0,00005910
4-4-5-8	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
4-4-6-7	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
4-5-5-7	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
4-5-6-6	4.4.4.3	P_4^2	2304	0,0003546
5-5-5-6	4.3.2.4	P_4^3	384	0,00005910
			Total	0,04261151

4 - A quantidade máxima de cartas que o dealer ou um jogador pode ter são 5 cartas. Assim, $n(\Omega) = 52.51.50.49.48 = 311875200$, e as probabilidades de se obter 21 pontos com cinco cartas será:

Cartas	Quantidade	Permutações	Total	Probabilidade
A-A-A-8-10	4.3.2.5.16	P_5^3	30720	0,00009850
A-A-A-9-9	4.3.2.4.3	$P_5^{2,3}$	2880	0,00000923
A-A-2-7-10	4.3.4.4.16	P_5^2	184320	0,00059101
A-A-2-8-9	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-A-3-6-10	4.3.4.4.16	P_5^2	184320	0,00059101
A-A-3-7-9	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-A-3-8-8	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
A-A-4-5-10	4.3.4.4.16	P_5^2	184320	0,00059101
A-A-4-6-9	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-A-4-7-8	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-A-5-5-9	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
A-A-5-6-8	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-A-5-7-7	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
A-A-6-6-7	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
A-2-2-6-10	4.3.4.4.16	P_5^2	184320	0,00059101
A-2-2-7-9	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-2-2-8-8	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
A-2-3-5-10	4.4.4.4.16	P_5	491520	0,00157602
A-2-3-6-9	4.4.4.4.4	P_5	122880	0,00039400
A-2-3-7-8	4.4.4.4.4	P_5	122880	0,00039400
A-2-4-4-10	4.3.4.4.16	P_5^2	184320	0,00059101
A-2-4-5-9	4.4.4.4.4	P_5	122880	0,00039400
A-2-4-6-8	4.4.4.4.4	P_5	122880	0,00039400

A-2-4-7-7	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-2-5-5-8	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-2-5-6-7	4.4.4.4.4	P_5	122880	0,00039400
A-2-6-6-6	4.4.4.3.2	P_5^3	7680	0,00002463
A-3-3-4-10	4.3.4.4.16	P_5^2	184320	0,00059101
A-3-3-5-9	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-3-3-6-8	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-3-3-7-7	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
A-3-4-4-9	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-4-4-5-8	4.4.4.4.4	P_5	122880	0,00039400
A-3-4-6-7	4.4.4.4.4	P_5	122880	0,00039400
A-3-5-5-7	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-3-5-6-6	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-4-4-4-8	4.4.4.3.2	P_5^3	7680	0,00002463
A-4-4-5-7	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-4-4-6-6	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
A-4-5-5-6	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
A-5-5-5-5	4.4.3.2.1	P_5^4	480	0,00000154
2-2-2-5-10	4.3.2.4.16	P_5^3	30720	0,00009850
2-2-2-6-9	4.4.4.3.2	P_5^3	7680	0,00002463
2-2-2-7-8	4.4.4.3.2	P_5^3	7680	0,00002463
2-2-3-4-10	4.3.4.4.16	P_5^2	184320	0,00059101
2-2-3-5-9	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-2-3-6-8	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-2-3-7-7	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
2-2-4-4-9	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
2-2-4-5-8	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-2-4-6-7	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-2-5-5-7	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
2-2-5-6-6	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
2-3-3-3-10	4.3.2.4.16	P_5^3	30720	0,00009850
2-3-3-4-9	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-3-3-5-8	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-3-3-6-7	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-3-4-4-8	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-3-4-5-7	4.4.4.4.4	P_5	122880	0,00039400
2-3-4-6-6	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-3-5-5-6	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-4-4-4-7	4.4.4.3.2	P_5^3	7680	0,00002463
2-4-4-5-6	4.3.4.4.4	P_5^2	46080	0,00014775
2-4-5-5-5	4.4.4.3.2	P_5^3	7680	0,00002463
3-3-3-3-9	4.4.3.2.1	P_5^4	480	0,00000154
3-3-3-4-8	4.4.4.3.2	P_5^3	7680	0,00002463
3-3-3-5-7	4.4.4.3.2	P_5^3	7680	0,00002463

3-3-3-6-6	4.3.2.4.3	$P_5^{2,3}$	2880	0,00000923
3-3-4-4-7	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
3-3-4-5-6	4.3.4.4.4	P_5^{2}	46080	0,00014775
3-3-5-5-5	4.3.2.4.3	$P_5^{2,3}$	2880	0,00000923
3-4-4-4-6	4.4.4.3.2	P_5^{3}	7680	0,00002463
3-4-4-5-5	4.3.4.4.3	$P_5^{2,2}$	17280	0,00005541
4-4-4-4-5	4.3.2.1.4	P_5^{4}	480	0,00000154
			Total	0,01412411

Logo, a probabilidade de se obter 21 pontos com 2, 3, 4 ou 5 cartas é de, aproximadamente, 0,18680562 ou $18,680562\%$.

4.3.2 Outras formas de pontuação

Um jogador deve fazer pelo menos 17 pontos, até um máximo de 21 pontos, utilizando-se de 2 até 5 cartas. Utilizando do número dos espaços amostrais descritos anteriormente, a probabilidade total de pontuações, em funções da quantidade de cartas será:

PROBABILIDADE DE PONTUAR EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE CARTAS

	2 cartas	3 cartas	4 cartas	5 cartas
17 pts.	0,060331825	0,06045249	0,02239911	0,00461261
18 pts.	0,052790347	0,06280543	0,02754086	0,00635639
19 pts.	0,04826546	0,06624434	0,03244621	0,00852033
20 pts.	0,09049774	0,06660633	0,03776895	0,01113830
Total	0,251885372	0,25610859	0,12015513	0,03062763

4.3.3 Pontos insuficientes

Enquanto o jogador não obtiver pelo menos 17 pontos, o carteador deve continuar fornecendo cartas. Até que se atinja essa pontuação, a probabilidade de se obter outras pontuações, em função do número de cartas será:

PONTOS INSUFICIENTES EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE CARTAS

	2 cartas	3 cartas	4 cartas	5 cartas
2 pts.	0,00452489			
3 pts.	0,01206637	0,000181		
4 pts.	0,01659126	0,00108597	0,00000369	
5 pts.	0,02413274	0,00217195	0,00005910	
6 pts.	0,02865763	0,0041629	0,00019208	0,00000154
7 pts.	0,03619911	0,00615385	0,00047280	0,00001077
8 pts.	0,040724	0,00904978	0,00090498	0,00003540

9 pts.	0,04826548	0,0121267	0,00153661	0,00009234
10 pts.	0,05279037	0,0159276	0,00245267	0,00018623
11 pts.	0,09653092	0,01990951	0,00360513	0,00035399
12 pts.	0,088989442	0,0280543	0,00511589	0,00059716
13 pts.	0,084464555	0,03728507	0,00715117	0,00095885
14 pts.	0,076923077	0,04343891	0,01026872	0,00145597
15 pts.	0,07239819	0,05085973	0,01365223	0,00220242
16 pts.	0,064856712	0,05502262	0,01813279	0,00321051
Total	0,748114746	0,28542989	0,06354786	0,00910518

4.3.4 Extrapolação dos 21 pontos

Extrapolar 21 pontos é ser eliminado automaticamente da partida, independente de sua posição de jogador ou carteador. E a probabilidade de um jogador "estourar"em uma partida é de:

PROBABILIDADE DE EXTRAPOLAÇÃO EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE CARTAS

	3 cartas	4 cartas	5 cartas
22 pts.	0,06986425	0,04934897	0,01753932
23 pts.	0,06262443	0,05502262	0,02143627
24 pts.	0,05339367	0,05838028	0,02601040
25 pts.	0,04705882	0,06116908	0,03055684
26 pts.	0,03873303	0,06162711	0,03555884
27 pts.	0,0334816	0,06176009	0,03994213
28 pts.	0,02606335	0,06002032	0,04444855
29 pts.	0,02171946	0,05797765	0,04816850
30+ pts.	0,02533937	0,30837938	0,68248223
Total	0,37827798	0,7736855	0,94614308

(30+ é a referência para a pontuação maior ou igual a 30 pontos)

4.3.5 Viabilidade para o jogador

Como pode-se perceber ao analisar as tabelas acima descritas, ou a tabela resumida abaixo:

PROBABILIDADE DE RESULTADO EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE CARTAS

	2 cartas	3 cartas	4 cartas	5 cartas
Pontuação insuficiente	0,748114746	0,28542989	0,06354786	0,00910518
Pontuação válida	0,251885372	0,33628959	0,16276664	0,04475174
Extrapolação		0,37827798	0,7736855	0,94614308

Pode-se perceber que as probabilidades de se obter pontuação insuficiente ou extrapolar é maior que a probabilidade de se obter uma pontuação válida, independente do número de cartas que o jogador tiver. O que faz com que o Blackjack seja considerado um jogo de azar.

4.4 Contar cartas: Habilidade ou Crime?

A contagem de cartas é uma prática que não é difícil de se encontrar sendo aplicada nos diversos cassinos dos mais variados locais do mundo. Essa prática tenta diminuir a probabilidade de extrapolação ou de pontuação insuficiente, tornando a probabilidade complementar (pontuação válida) um pouco maior para o jogador. Há dois problemas: a probabilidade de boa pontuação também aumenta para o carteador, e em algumas regiões essa prática é considerada crime.

Há vários métodos de contagem de cartas, o mais conhecido é o Hi-Lo. Para aplicar esse método, o jogador deve prestar atenção em todas as cartas que foram abertas para ele e os demais jogadores (incluindo o carteador), e atribuir uma pontuação para essas cartas: de 2 a 6 atribui-se $+1$, de 7 a 9 atribui-se 0 e as cartas de 10 pontos, juntamente com o A, atribui-se -1. Após somar todas as pontuações de todas as cartas já abertas, o jogador atribui a pontuação da mesa. uma pontuação muito alta ($+3$, $+4$, ...) significa que saíram cartas muito baixas e as próximas tem uma probabilidade maior de serem altas. Da mesma forma, uma pontuação muito baixa (-3, -4, ...) significa que cartas muito altas já saíram e a probabilidade de receber cartas de valor baixo aumentam. Dessa forma, o jogador pode controlar as suas ações de parar ou continuar, fazendo com que a sua probabilidade de sucesso aumente.

Alguns cassinos investem caro em tecnologias para saber quais jogadores estão contando cartas. Isso porque, em algumas regiões ou locais de jogos, contar cartas é uma prática ilegal, pois é considerado fraude ao sistema de jogos. Mesmo em locais que contar cartas não é crime previsto em lei, os cassinos não querem perder dinheiro, então expulsam jogadores que estejam contando cartas, afim de preservarem seus negócios e evitar que outros jogadores sintam-se lesados.

Capítulo 5

Craps

O Craps é um dos jogos de cassino que mais fazem os jogadores vibrar. É o jogo de dados mais jogado do mundo. O objetivo desse jogo é prever o resultado do par de dados lançados.

5.1 A história do Craps

O jogo de dados é talvez o mais antigo dos jogos que se tem algum tipo de registro. Árabes e soldados romanos já jogavam dados. Mas nem sempre os dados foram como são hoje. Na Idade Antiga, os dados eram feitos de ossos de animais ou pedaços de madeira (como o carvalho). Com a evolução dos materiais, os dados passaram a ser fabricados com metais e marfim. Hoje, os dados são feitos basicamente com celulose e fibra de vidro.

O Craps veio, originalmente, de um jogo inglês chamado "Hazard". Há provas de soldados jogando Hazard durante a Terceira Cruzada, no século XII. Então, os franceses adotaram o termo, chamando o jogo de "Crabes". No século XVII, o jogo atravessou o oceano e chegou ao Canadá (antiga colônia francesa de Acádia). Em 1755, os franceses perderam o domínio de Acádia para os ingleses, e os moradores que restaram modificaram o nome do jogo (também pelo misturar da linguagem) para "Creps". No ano de 1813, o jogo foi levado aos Estados Unidos, e em 1843 recebeu o nome atual de "Craps". A versão moderna do jogo foi levada a Nova Orleans no século XX através de Bernard Xavier, mas ainda com algumas falhas. Mais tarde, John Winn modificou algumas regras do Craps e esta é a versão que encontramos atualmente em qualquer cassino.

5.2 As regras

As apostas são realizadas e os dados são rolados pelo lançador. Nesse primeiro lançamento, se a soma das faces voltadas para cima for igual a 7 ou 11, a vitória é do jogador; soma igual a 2, 3 ou 12 elimina o jogador da partida; qualquer outra soma: 4, 5, 6, 8, 9 ou 10 estabelecem o "Ponto",e mantém a rodada aberta. Existem vários tipos de apostas que podem ser feitas a cada rodada. Algumas dessas apostas dependem de um resultado específico, outras delas dependem de uma condição do jogo. Normalmente as apostas pagam 1:1 (cobrem o valor apostado), exceto em algumas apostas específicas.

5.2.1 Tipos de Apostas

Pass Line (Linha de Passagem) ou Linha de Frente. Quando a mesa chama "façam suas apostas"antes do lançamento inicial, os jogadores apostam no espaço destinado. O lançamento inicial é feito. Se a soma dos dados for 2, 3 ou 12 os jogadores perdem automaticamente. Se a soma dos dados for 7 ou 11 os jogadores ganham automaticamente. Se qualquer outra soma for obtida, esse resultado se transformará em Ponto, e uma espécie de disco (denominada de puck com os lados contendo ON e OFF) é colocado sobre o a coluna desse número com a indicação ON. Se o número do Ponto sair novamente, as apostas Pass Line ganham; se sair um 7 a aposta perde e a rodada acaba; qualquer outro valor obtido na soma não causa nenhuma ação no jogo e a rodada continua. Apostas na Linha de Passagem não podem ser removidas nem modificadas. Elas ficam comprometidas até o puck indicar OFF (no final da rodada), quando as apostas são transferidas para o canto da mesa e começará uma nova rodada.

Don't Pass Line (Linha não Passa) ou Linha Traseira. Esse campo de apostas fica oposto ao Pass Line. Essa aposta ganha se o lançador obtiver 7 antes do Ponto, mas perde se o lançador obtiver o Ponto antes do 7. Essa aposta é feita antes do lançamento inicial. Ela ganha com 2 ou 3. Caso saia 12 ela não é retirada da mesa, mas também não ganha. Com qualquer outra pontuação, o Ponto é estabelecido.

Come (Vinda) fica disponível depois que se estabelece o Ponto. As apostas Come ganham se aparecer um 7 ou 11 e perdem se sair um 2, 3 ou 12. Qualquer outro ponto associará essa aposta a esse ponto ou ao 7. Essa aposta ganha se o ponto aparecer antes do 7 e perde se o 7 aparecer antes do ponto. Essas apostas não tem o uso do puck, ficam vinculadas somente ao reaparecimento do ponto ou do 7.

Don't Come (Não vem) é o oposto da aposta Come. Ganha com 2 ou 3 e perde com 7 ou 11. Caso saia 12, a aposta continua na mesa. Qualquer outro resultado gera o Ponto. As apostas Don't Come ganham com o 7 vindo antes do ponto e perdem se o ponto sair antes do 7, ficando as apostas restritas ao aparecimento desses dois resultados.

Odds é considerada uma estratégia de defesa. O valor máximo de uma aposta Odds é de duas vezes o valor de sua aposta original (igual a soma do apostado com o valor que ganharia). O jogador pode fazer full Odds em qualquer uma das apostas: Pass Line, Don't Pass Line, Come ou Don't Come, afim de garantir que ele não perca totalmente a quantia que está apostando.

Field (Campo) é uma aposta de uma única rodada. A aposta Field ganha se os números forem 3, 4, 9, 10 ou 11 e paga dobrado se o resultado for 2 ou 12. A aposta Field perde para 5, 6, 7 ou 8 e pode ser realizada antes de qualquer rodada.

Big 6 ou Big 8 (6 grande ou 8 grande) são as apostas em que o 6 ou o 8 são lançados antes do 7. Esse tipo de aposta pode ser feita antes de qualquer rodada, mas acaba quando se atinge o 7 ou outro ponto (4, 5, 9 ou 10).

Place to Win (Lugar para ganhar) é uma aposta em um dos números 4, 5, 6, 8, 9 ou 10 (que devem sair antes do 7). Esse tipo de aposta deve ser feita no espaço da mesa que contém o número desejado em "4, 5, SEIS, 8, NOVE, 10".

Buy (Compra) é uma aposta que reserva 5% para o perdedor (seja ele mesa ou o próprio jogador). O jogador aposta em um ponto, que deve sair antes do 7. Esse tipo de aposta pode ser feita a qualquer momento, assim como alterá-la ou até mesmo removê-la.

Lay (Configuração) é a aposta contrária a Buy. Na Lay, o 7 deve sair antes do ponto. O vencedor da aposta leva o prêmio, com exceção dos 5% que ficam reservado para a mesa.

Any 7 (Qualquer 7) quando o jogador deseja que saia 7 na próxima rodada. Esse tipo de aposta paga até quatro vezes o valor apostado.

Any Craps (Qualquer Crap) quando o jogador espera que o próximo resultado seja 2, 3 ou 12. Chega a pagar 7:1.

Any 11 Bets (Qualquer 11) quando o resultado seguinte deve ser 11. Paga até 15 vezes o valor apostado.

Horn (Chifre) é o tipo de aposta que se espera que o resultado seja um dos quatro extremos: chifre inferior 2 ou 3 e chifre superior 11 ou 12. No chifre inferior o jogador recebe 30:1 e no chifre superior o jogador recebe 15:1.

Hardway (Duras) As apostas duras são aquelas que geram os resultados 4, 6, 8 ou 10 com os valores dos dados iguais (2+2, 3+3, 4+4 ou 5+5). Pagam 7:1 para resultado 4 ou 10 e 9:1 para resultado 6 ou 8.

5.3 As probabilidades

Vamos considerar, inicialmente, todas as possíveis combinações de soma de resultado do lançamento de dois dados distintos. Para o lançamento de dois dados, temos que $n(\Omega) = 6.6 = 36$, e as probabilidades de se obter cada face será:

Soma	Dados	Probabilidade
2	1+1	$\frac{1}{36}$
3	1+2 2+1	$\frac{1}{18}$
4	1+3 2+2 3+1	$\frac{1}{12}$
5	1+4 2+3 3+2 4+1	$\frac{1}{9}$

6	1+5	2+4	3+3	4+2	5+1		$\frac{5}{36}$
7	1+6	2+5	3+4	4+3	5+2	6+1	$\frac{1}{6}$
8	2+6	3+5	4+4	5+3	6+2		$\frac{5}{36}$
9	3+6	4+5	5+4	6+3			$\frac{1}{9}$
10	4+6	5+5	6+4				$\frac{1}{12}$
11	5+6	6+5					$\frac{1}{18}$
12	6+6						$\frac{1}{36}$

Ao iniciar o jogo, ganham as apostas (V = vitória) se os resultados forem 7 ou 11 e perdem (D = derrota) se o resultado for 2, 3 ou 12. Qualquer outra pontuação virará o ponto (P = ponto). Assim, utilizando o princípio aditivo dos eventos independentes:

$$P(V) = P(7) + P(11) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$P(D) = P(2) + P(3) + P(12) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(P) = 1 - P(V) - P(D) = 1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Inicialmente, pode-se verificar que a probabilidade de sucesso é o dobro da probabilidade de derrota automática. Mas a probabilidade de levar o jogo adiante com o Ponto é o triplo da vitória e, consequentemente, seis vezes a chance de derrota.

Após o ponto ser estabelecido, a probabilidade de derrota aumenta para as apostas Pass Line, Come e todas as demais que apostam em um número, pois $P(7) > P(P)$, para qualquer Ponto estabelecido. De forma análoga, as apostas Don't Pass Line, Don't Come, Any 7 e as demais que apostam no 7 antes do número do ponto levam vantagem.

Apostas Big 6 ou Big 8 não levam tanta desvantagem, pois P(6) e P(8) são as probabilidades que mais se aproximam do P(7).

Apostas Craps tem tantas chances de ocorrer durante o jogo quanto no início do lançamento dos dados, uma vez que os números para essa aposta e para a derrota automática são os mesmos.

Apostas Horn tem a mesma probabilidade de saírem quando comparamos os chifres superiores e inferiores:

$$P(Horn_i) = P(2) + P(3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(Horn_s) = P(11) + P(12) = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Porém, ainda levam alta desvantagem de perca para o 7.

Apostas Hardway também são difíceis de serem vitoriosas, pois

$$P(Hard) = \frac{n(Hard)}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

que é a mesma probabilidade de uma derrota automática antes do lançamento dos dados e leva desvantagem em relação a probabilidade do 7.

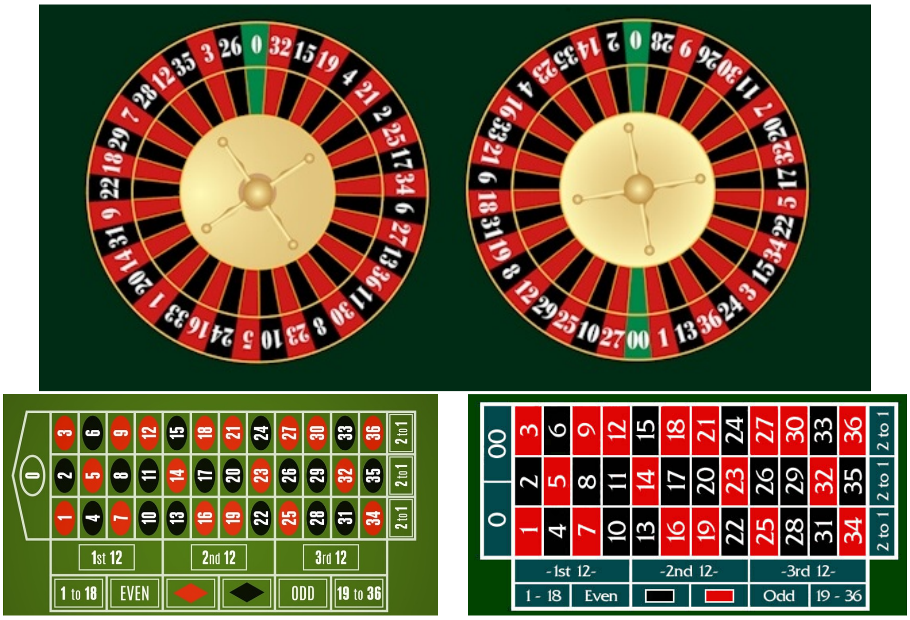
Analisando as probabilidades e os caminhos que as mesmas levam o jogador, o Craps é um jogo que não força o jogador a uma vitória ou uma derrota automática, mas o leva adiante para dar uma probabilidade menor de ganho ao jogador nas rodadas seguintes.

Capítulo 6

Roleta

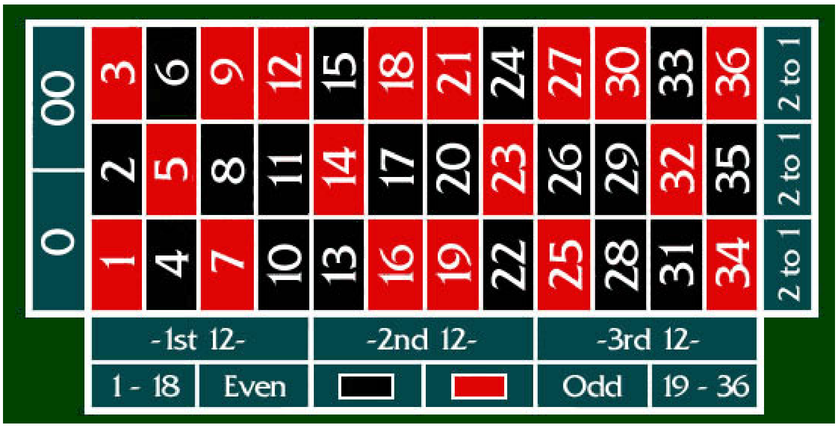
O jogo de Roleta é um dos clássicos entre os cassinos de todo o mundo. As regras fáceis, apostas variadas e a possibilidade de ganhar um bom retorno (dependendo do tipo de aposta) são alguns dos atrativos que fazem esse jogo ser muito procurado.

Para jogar Roleta é necessário uma bolinha, que pode ser fabricada de madeira, ferro, marfim ou celulose. A roleta, por sua vez, é basicamente feita de celulose ou fibra de carbono e metal, igualmente espaçada com 37 ou 38 casa. A diferença está no tipo de Roleta. A Roleta Europeia possui 37 casas numeradas de 0 a 36 e a Roleta Americana possui uma casa a mais: o 00. Abaixo, tem-se a Roleta Europeia à esquerda e a Roleta Americana à direita:



Fonte: casinoportugal.org

Em ambas, o 0 e/ou o 00 são representados, tanto na Roleta quanto na mesa de apostas pela cor verde, e as demais numerações são igualmente divididas entre a cor vermelha e a cor preta. Abaixo, a tabela para a Roleta Americana:



Fonte: roleta.co.pt

A diferença da tabela na Roleta Europeia é que esta tem uma casa unificada para o 0 e o 00, que são vistos separados na imagem acima.

O dealer (negociante, chefe da mesa) rola a roleta e lança a bolinha em cima dos números com a roleta girando. O objetivo desse jogo é tentar adivinhar o número em que a bolinha parará sobre ele quando a roleta estiver parada.

6.1 A história do jogo de Roleta

A Roleta (do francês Roullete, que significa pequena roda) foi inventada no século XVIII, mas a inquietude com sua forma vem de tempos antes disso. Pascal, um século antes, já apresentava trabalhos sobre um máquina com movimentos perpétuos e circulares.

A roda gerou fascínio desde sua invenção, e suas aplicações no campo do esoterismo também trouxe muitos mistérios para os homens. Há até uma lenda de um francês chamado Francois Blanc que fez um pacto com o diabo para compreender todos os mistérios de um jogo que ele mesmo levou até a realeza e o usou para ganhar muito dinheiro; mais tarde esse jogo veio a se chamar Roleta e o pacto foi para usar os números de 1 a 36 (cuja soma de todos os números é igual a 666). Outras linhas históricas acreditam que monges franceses criaram o jogo para fugir da rotina monótona. Outros acreditam ter sido criado na Roma Antiga, quando soldados desmontaram as rodas de uma carruagem de batalha e transformaram-na em uma roda de jogo de azar.

Lendas e superstições a parte, a Roleta se tornou um jogo da realeza em Paris, por volta de 1796. O jogo se tornou tão popular, que em 1800 já se tinha relatos de partidas de Roleta por toda a Europa e alguns locais da América. Após séculos de jogos, as regras foram sendo atualizadas, e assim nasceu a versão americana. Esta trouxe apostas e ações mais rápidas para dar aos jogadores uma maior dinâmica durante as partidas e tornar o jogo mais interessante, e acrescentou um número na roleta (00) fazendo com que a probabilidade de o jogador ganhar apostando em um único número diminuísse em $0,0711\%$, dando assim maior vantagem à casa. Mais tarde a Roleta Europeia acompanhou o sistema de apostas e ações da Roleta Americana, mas manteve o sistema de numeração.

6.2 Apostas e Probabilidades

A mesa de apostas da Roleta é dividida em duas partes: a parte de dentro e a parte de fora. Cada mesa de Roleta tem seus valores de apostas mínimas e apostas máximas. O apostador precisa saber em que parte da mesa ele está apostando. Uma das diferenças é que na parte de dentro o jogador pode dividir suas apostas da maneira que quiser, e na parte de fora se aposta tudo de uma vez em um único tipo de aposta. Para calcular as probabilidades, usaremos o índice ^{a} para a Roleta Americana e o índice ^{e} para a Roleta Europeia.

6.2.1 Apostas internas

1 número O jogador aposta no número que ele deseja que a bolinha pare em cima quando a roleta parar de girar, podendo pagar até 35:1. A probabilidade do jogador ganhar com esse tipo de aposta (1n) é de:

$$P(1n^a) = \frac{1}{38} \approx 0,026315789$$

$$P(1n^e) = \frac{1}{37} \approx 0,027027027$$

2 números Esse tipo de aposta utiliza a mesma ficha para dois números. Para fazer esse tipo de aposta basta colocar a ficha na linha que separa os dois números. A desvantagem desse tipo de aposta é que os números devem ser vizinhos na mesa de aposta. Por apostar em dois números, o prêmio fica dividido (em relação a aposta em 1 número), pagando então até 17:1. A probabilidade de um apostador ganhar apostando em 2 números (2n) é de:

$$P(2n^a) = \frac{2}{38} \approx 0,052631579$$

$$P(2n^e) = \frac{2}{37} \approx 0,054054054$$

3 números ou Street (3n) na mesma linha e com a mesma ficha podem ser apostados colocando a ficha no começo da linha. Caso o apostador queira apostar no 0 juntamente com 1 e 2 ou 2 e 3, ele pode colocar a ficha no meio das linhas de tal forma que a ficha fique sobre essas 3 casas. Chagando a pagar até 11:1, a probabilidade de um jogador ganhar com esse tipo de aposta é de:

$$P(3n^a) = \frac{3}{38} \approx 0,078947368$$

$$P(3n^e) = \frac{3}{37} \approx 0,081081081$$

4 números ou Corner (4n) pode ser apostado colocando a ficha em cima do ponto interseção das linhas que pertence aos 4 números ao mesmo tempo. A desvantagem desse tipo de aposta é que os números devem estar juntos, mas paga até 8:1. A probabilidade do jogador ganhar com esse tipo de aposta é de:

$$P(4n^a) = \frac{4}{38} \approx 0,105263158$$

$$P(4n^e) = \frac{4}{37} \approx 0,108108108$$

Basket (B) Na Roleta Europeia aposta nos números 0, 1, 2 e 3 e paga 9:1. Já na Roleta Americana, aposta também no 00 e paga 5:1. A probabilidade desse tipo de aposta ser a vencedora é de:

$$P(B^a) = \frac{5}{38} \approx 0,131578947$$

$$P(B^e) = \frac{4}{37} \approx 0,108108108$$

F. V. D. (Fileira Vertical Dobrada) aposta nos números 16, 17, 18, 19, 20 e 21. Para esse tipo de aposta, coloca-se a ficha no começo da linha que divide as filas verticais centrais. A probabilidade do jogador ganhar com esse tipo de aposta (FV) é:

$$P(FV^a) = \frac{6}{38} \approx 0,157894737$$

$$P(FV^e) = \frac{6}{37} \approx 0,162162162$$

6.2.2 Apostas externas

A apostas externas pagam bem menos em relação as apostas internas. Com exceção da aposta "Coluna"ou "Dúzia"(que pagam 2:1), todas as demais pagam 1:1.

Cor aposta em uma das cores (C) da mesa: Vermelha ou Preta. A probabilidade de uma aposta de Cor ganhar é de:

$$P(C^a) = \frac{18}{38} \approx 0,47368421$$

$$P(C^e) = \frac{18}{37} \approx 0,486486486$$

Par ou Ímpar aposta em todos os números pares (com exceção do 0 para ambas as versões e 00 para a americana) ou todos os números ímpares. A probabilidade de se obter Par ou Ímpar (PI) é:

$$P(PI^a) = \frac{18}{38} \approx 0,47368421$$

$$P(PI^e) = \frac{18}{37} \approx 0,486486486$$

Coluna aposta em uma das 3 colunas horizontais, cada uma com 12 números. A probabilidade de uma aposta do tipo Coluna (Co) ganhar é de:

$$P(Co^a) = \frac{12}{38} \approx 0,315789473$$

$$P(Co^e) = \frac{12}{37} \approx 0,324324324$$

Dúzia apostar em uma das Dúzias (D) é apostar em 12 números na sequência. Há 3 dúzias que podem ser apostadas: a primeira dúzia contém os números de 1 a 12, a segunda dúzia contém os números de 13 a 24 e a terceira dúzia contém os números de 25 a 36. A probabilidade de um apostador ganhar escolhendo uma das dúzias é de:

$$P(D^a) = \frac{12}{38} \approx 0,315789473$$

$$P(D^e) = \frac{12}{37} \approx 0,324324324$$

Parte Baixa (PB) aposta nos números de 1 a 18. A probabilidade de se obter sucesso é de:

$$P(PB^a) = \frac{18}{38} \approx 0,47368421$$

$$P(PB^e) = \frac{18}{37} \approx 0,486486486$$

Parte Alta (PA) compreende todos os números de 19 a 36. A probabilidade de ganhar apostando em uma Parte Alta é:

$$P(PA^a) = \frac{18}{38} \approx 0,47368421$$

$$P(PA^e) = \frac{18}{37} \approx 0,486486486$$

6.2.3 Vantagem da Casa

Com exceção das apostas de número (1, 2, 3 ou 4 números) e a Basket, qualquer aposta perde para o 0 (seja ele 0 ou 00). A probabilidade de se obter um zero (Z) ou duplo zero num jogo de Roleta é de:

$$P(Z^a) = \frac{2}{38} \approx 0,052631579$$

$$P(Z^e) = \frac{1}{37} \approx 0,027027027$$

Além disso, os cassinos lucram em cima da relação probabilidade x premiação. Ao apostar em um número, por exemplo, a probabilidade de se obter sucesso é de $\frac{1}{37}$ ou $\frac{1}{38}$ (dependendo do tipo de roleta jogada). Porém, esse tipo de aposta paga na proporção de 35:1. Ou seja, o valor pago pelos cassinos é inferior à proporção de probabilidade. E esse fato, que também pode ser considerada uma vantagem da casa, pode ser constatado em todos os tipos de apostas das roletas americanas e europeias.

Capítulo 7

Mega-Sena

Dos jogos lícitos em território brasileiro, a Mega-Sena é o jogo da Loteria Federal mais procurado pelos apostadores. Cada apostador deve fazer uma escolha que pode variar de 6 a 15 números, escolhidos no meio de uma tabela com 60 números, numerados como: 00, 01, 02, ... 59. Por pagar valores altíssimos e a grande facilidade de não haver um ganhador para o prêmio máximo, acumulando-o para o próximo sorteio, a Mega-Sena atrai milhares de brasileiros para apostar em casas lotéricas em sorteios que ocorrem duas vezes por semana (quartas-feiras e sábados) realizados pela Loteria Federal.

Dependendo da quantidade de números escolhidos, o valor da aposta muda:

Números marcados	Valor da aposta (em R$)
6	3,50
7	25,50
8	98,00
9	294,00
10	735,00
11	1.617,00
12	3.234,00
13	6.006,00
14	10.510,50
15	17.517,50

(*Valores com referência em 09/12/2016*)

Além dos sorteios semanais, o sorteio da Mega-Sena também pode ocorrer em datas e/ou comemorações especiais, como Páscoa, Independência e no Ano Novo (Mega da Virada).

7.1 A história da Mega-Sena

A Mega-Sena foi criada em 1996 pela Loteria Federal e é a maior modalidade de loteria, e com os maiores prêmios, dentre os jogos de azar legalizados no Brasil. Já a Mega da Virada surgiu a partir de 2008, e conta com o acúmulo de 5% de todos os prêmios sorteados durante o ano, acrescidos do percentual de apostas para esse sorteio específico.

O maior prêmio da Mega-Sena foi dado na Mega da Virada em 2014, e pagou R$263.295.552, 64 divididos para 4 apostas ganhadoras. O maior prêmio em sorteios "comuns"ocorreu em 25/11/2015 e pagou R$205.329.753, 54 a um único apostador.

7.2 As formas de apostar e ganhar na Mega-Sena

O jogador dispõe de uma tabela que contém 60 números (chamadas dezenas) numeradas de 00 a 59. Um apostador da Mega-Sena pode escolher de 6 a 15 dezenas (os valores a pagar dependendo da quantidade de números escolhidos já foram citados anteriormente).

O objetivo principal do jogador é acertar os 6 números (Sena) sorteados pela Loteria Federal para aquele sorteio no qual o jogador se inscreveu. Mas existem prêmios (inferiores ao Montante principal) que são pagos aos jogadores que acertarem 4 (Quadra) ou 5 (Quina) dezenas.

O prêmio líquido equivale a 32, 2% da renda de apostas. Esse valor é obtido do valor bruto de 46% deduzindo-se 13, 8% de imposto de renda. Do total de prêmio líquido, são destinados 35% para o ganhador da Sena, 19% para o ganhador da Quina, 19% para o ganhador da Quadra. Caso haja mais de um ganhador que acertou a mesma quantidade de pontos, o prêmio será dividido igualmente. Ainda do prêmio, são destinados 22% para o próximo sorteio e 5% para o sorteio do final do ano (Mega da Virada).

O ganhador (ou ganhadores) tem 90 dias para retirar o prêmio na Lotérica ou Caixa Econômica Federal. Porém, prêmios com valor superior a R$1787, 77 só podem ser retirados nas agências da Caixa Econômica Federal. Caso o ganhador não retire seu prêmio no prazo, o valor do prêmio vai para o Tesouro Nacional e é destinado à programas educacionais.

7.3 As probabilidades

7.3.1 Sena

Para acertar as 6 dezenas sorteadas, deve-se levar em consideração o Espaço Amostral do sorteio, dos quais serão sorteados 6 números em um universo de 60, dos quais a ordem dos números sorteados não importa. Logo:

$$n(\Omega) = C_{60,6} = 50063860$$

Mas para calcular a probabilidade de um jogador acertar todas as dezenas sorteadas (evento S), deve-se levar em consideração a quantidade de números apostados:

PROBABILIDADE DE ACERTAR OS 6 NÚMEROS EM FUNÇÃO DA QUANTIDADE DE NÚMEROS APOSTADOS

Números Apostados	n(S)	Probabilidade

6	$C_{6,6}$	$\frac{1}{50063860}$
7	$C_{7,6}$	$\frac{1}{7151980}$
8	$C_{8,6}$	$\frac{1}{1787995}$
9	$C_{9,6}$	$\frac{1}{595998}$
10	$C_{10,6}$	$\frac{1}{238399}$
11	$C_{11,6}$	$\frac{1}{108363}$
12	$C_{12,6}$	$\frac{1}{54182}$
13	$C_{13,6}$	$\frac{1}{29175}$
14	$C_{14,6}$	$\frac{1}{16671}$
15	$C_{15,6}$	$\frac{1}{10003}$

7.3.2 Quina

Para o jogador acertar 5 dos 6 números, o $n(\Omega) = 50063860$ é mantido mas o evento Qi é obtido através do acerto de 5 dezenas e o erro da outra dezena.

PROBABILIDADE DE ACERTAR 5 NÚMEROS EM FUNÇÃO DA QUANTIDADE DE NÚMEROS APOSTADOS

Números Apostados	n(Qi)	Probabilidade
6	$C_{6,5}.C_{54,1}$	$\frac{1}{154518}$
7	$C_{7,5}.C_{53,1}$	$\frac{1}{44981}$
8	$C_{8,5}.C_{52,1}$	$\frac{1}{17192}$
9	$C_{9,5}.C_{51,1}$	$\frac{1}{7791}$
10	$C_{10,5}.C_{50,1}$	$\frac{1}{3973}$
11	$C_{11,5}.C_{49,1}$	$\frac{1}{2211}$
12	$C_{12,5}.C_{48,1}$	$\frac{1}{1317}$
13	$C_{13,5}.C_{47,1}$	$\frac{1}{828}$
14	$C_{14,5}.C_{46,1}$	$\frac{1}{544}$
15	$C_{15,5}.C_{45,1}$	$\frac{1}{370}$

7.3.3 Quadra

Para o apostador acertar 4 dos 6 números sorteados (evento Qa), acertando 4 e errando as outras duas dezenas de um Espaço Amostral de $n(\Omega) = 50063860$.

PROBABILIDADE DE ACERTAR 4 NÚMEROS EM FUNÇÃO DA QUANTIDADE DE NÚMEROS APOSTADOS

Números Apostados	n(Qa)	Probabilidade
6	$C_{6,4}.C_{54,2}$	$\frac{1}{2332}$
7	$C_{7,4}.C_{53,2}$	$\frac{1}{1038}$
8	$C_{8,4}.C_{52,2}$	$\frac{1}{539}$
9	$C_{9,4}.C_{51,2}$	$\frac{1}{312}$
10	$C_{10,4}.C_{50,2}$	$\frac{1}{195}$

11	$C_{11,4}.C_{49,2}$	$\frac{1}{129}$
12	$C_{12,4}.C_{48,2}$	$\frac{1}{90}$
13	$C_{13,4}.C_{47,2}$	$\frac{1}{65}$
14	$C_{14,4}.C_{46,2}$	$\frac{1}{48}$
15	$C_{15,4}.C_{45,2}$	$\frac{1}{37}$

Como pode-se perceber, a probabilidade de um apostador ganhar na Mega-Sena é muito pequena e, mesmo para as probabilidades maiores, deve haver um investimento (aposta) alto que nem sempre se torna viável (considerando empates e números acertados) como mostra a relação custo x ganho ao apostar-se em todos os jogos possíveis para acertar a Sena:

Números apostados	Valor da aposta	Quantidade de apostas	Valor investido (em R$)
6	3,50	50063860	175.223.510,00
7	25,50	7151980	182.375.490,00
8	98,00	1787995	175.223.510,00
9	294,00	595998	175.223.412,00
10	735,00	238399	175.223.265,00
11	1.617,00	108363	175.222.971,00
12	3.234,00	54182	175.224.588,00
13	6.006,00	29175	175.225.050,00
14	10.510,50	16671	175.212.210,00
15	17.517,50	10003	175.222.551,00

Como é possível perceber, o investimento alto se torna inviável, uma vez que a premiação dos sorteios comuns não costumam ultrapassar os cem mil reais. As exceções seriam para sorteios especiais, como a Mega da Virada, que chega a pagar valores comumente superiores a 200 mil reais e, mesmo assim, correndo o risco de empatar com outro jogador e ter que dividir o prêmio.

Capítulo 8

Conclusão

Como tivemos a oportunidade de perceber, os jogos de azar não "foram feitos"para dar chances de vitória ao jogador, e sim à casa, através de regras e probabilidades que levam o jogador ao insucesso. E isso pode levar ao jogador a terríveis situações, até mesmo patológicas. Mas o jogador tende a não parar, pela oportunidade de lucro "fácil"(sem esforço físico, mas fácil não é, pois as probabilidades estão contra) e o desafio de superar a casa e outros jogadores.

No Pôquer por exemplo, apesar de haver a dualidade entre jogo de azar e esporte de habilidade, a soma das probabilidades de pontuar de qualquer forma, de um Par a um Royal Street Flush, ainda é inferior a 50%, o que deve alertar ao jogador a probabilidade alta dele nem pontuar.

No Blackjack existe uma probabilidade maior de não entrar no nível de pontuação, seja por falta de ponto ou extrapolando os pontos de sua mão.

No Craps, o jogador não é levado a perder logo de cara, mas sim a novas rodadas, fazendo com que o mesmo se anime e continue apostando e elevando suas apostas. E, nas rodadas seguintes, a probabilidade do jogador vencer é inferior a probabilidade dele perder, independente de qual tipo de aposta ele faça.

As Roletas são as que levam a maior probabilidade dos jogos estudados neste trabalho, mas somente na parte externa da mesa de apostas. Mas esse tipo de apostas pagam pouco, e não dão chances ao jogador de poder alterar valores e a forma de como o jogador pode aplicar suas apostas.

A Mega-Sena é o mais popular desses jogos pelos brasileiros, mas as chances de ganhar um prêmio alto com jogo simples de aposta baixa é o de menor probabilidade. Para maximizar essas chance, deve apostar em mais números, fazendo com que o investimento seja alto, e a probabilidade não chegando a ser considerável para vitória, e que justifique tal investimento.

Os cassinos no Brasil ainda não estão legalizados. A clandestinidade dos cassinos e dos jogos é crime. A probabilidade de um jogador vencer em qualquer um desses jogos é baixa. Praticar jogos de azar não é vantagem para o jogador.

Capítulo 9

Referências

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta - 1ª ed. (2014) - Rio de Janeiro - Ed. Sociedade Brasileira da Matemática.
pt.wikipedia.org/wiki/Fatorial
SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática 2 - 1ª ed. (2010) - São Paulo - Ed. FTD.
NETTO, Scipione do Pierro; FILHO, Sérgio Orsi; CARVALHO, Maria Cecília Costa e Silva. Quanta: Matemática, Ensino Médio - 3ª ed. (2005) - São Paulo - Ed. Saraiva.
https://pt.wikipedia.org/wiki/Probabilidade
Hazan, Samuel. Fundamentos da Matemática Elementar vol. 5 - 8ª ed. (2013) - São Paulo - Ed. Atual.
http://www.mat.ufmg.br/
http://www.gopem.com.br/apostilas/matematica/34.pdf
http://solascriptura-tt.org/VidaDosCrentes/Cinzentas/JogosAzar-DamyDoneivan.htm
pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_de_azar
http://www.jusbrasil.com.br/topicos/289967/jogo-de-azar
https://drauziovarella.com.br/dependencia-quimica/jogadores-patologicos/
OMAIS, Sálua. Jogos de Azar: Análise do comportamento psíquico e sócio-familiar do jogo patológico a partir de vivências do jogador. UFMS (2007)
http://www.loterias.caixa.gov.br
http://www.jogodobicho.net/novidades/por-que-o-jogo-o-bicho-e-ilegal
https://pt.wikipedia.org/wiki/Casino
https://pt.wikipedia.org/wiki/Pôquer
https://br.888poker.com/poker-games/texas-holdem/
EHLERT, Seldomar Jeske; BELLICANTA, Leandro Sebben. Artigo: A Matemática no Pôquer: Explorando problemas de probabilidade. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM. ISSN on-line: 2179-460X (2014).
https://pt.wikipedia.org/wiki/Blackjack
http://casinoportugal.org/historia-blackjack/
RODRIGUEZ, Carlos A. Probabilidades y simulaciones asociadas a un juego de blackjack. Universidad Tecnológica de Pereira (2013).
http://pt.blackjack.org/
http://www.lagoon-casino.com/

https://br.sportingbet.com/t/casino/games-tips/pop-up/craps.aspx
http://www.casinotop10.com.br/
http://www.roletas.com.br/