OS FASCINANTES QUADRADOS MÁGICOS

MIRIAM SAMPIERI SANTINHO/ ROSA MARIA MACHADO

Introdução

Os quadrados mágicos constituem, desde épocas remotas, um desafio que fascina a todos. Acredita-se que os chineses foram os primeiros a descobrir as propriedades dos quadrados mágicos e provavelmente foram também seus inventores a menos de cinco séculos de nossa era. Eles o chamavam de Lo-Shu[1]. A lenda conta que o imperador da antiga China, chamado Yu (2800 A. C.), da dinastia Hsia, estava meditando às margens do Rio Lo quando emergiu uma tartaruga - considerado um animal sagrado - com estranhas marcas no casco.

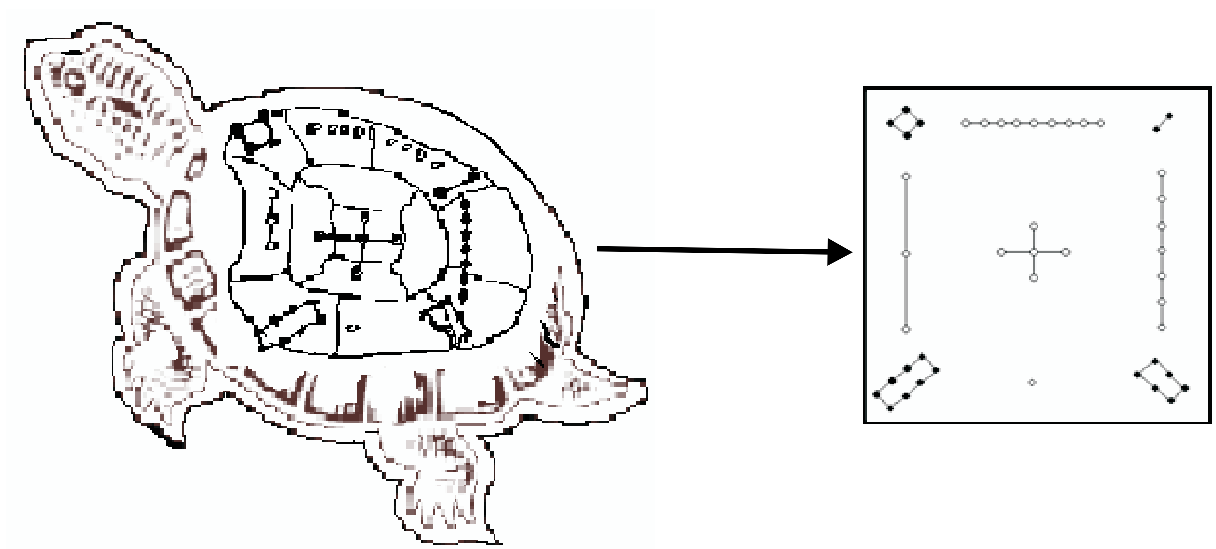

Figura 1. A tartaruga sagrada e o Lo Shu.

Yu percebeu que as marcas na forma de nós, feitos num tipo de barbante, podiam ser transformadas em números e que todos eles somavam quinze em todas as direções, como se fossem algarismos mágicos.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Tabela 1. Quadrado mágico Lo-Shu

Foi atribuído ao Lo-Shu um caráter místico. Acreditava-se que ele era o símbolo que reunia os princípios básicos que formavam o universo.

- os números pares simbolizavam o princípio feminino, o Yin;

[1] Lo significa rio e Shu é livre.

- os números ímpares simbolizavam o princípio masculino, o Yang;
- - o numero 5 representava a Terra e ao seu redor estão distribuídos os quatro elementos principais, a água 1 e 6, o fogo 2 e 7, a madeira 3 e 8, os metais 4 e 9.

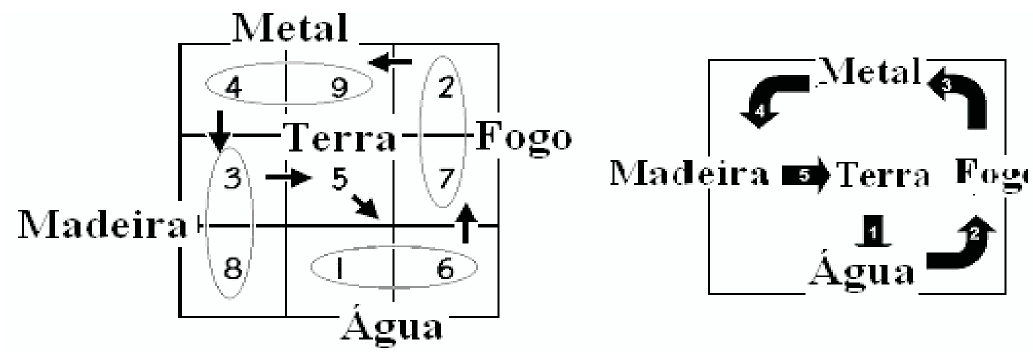

Figura 2. Representação mística do Lo-Shu.

No século XI foi encontrado um quadrado mágico de ordem 3 pintado no assoalho? em um dos templos de Khajuraho na Índia,. Este quadrado era semelhante ao quadrado de Lo-Shu adicionando-se 19 a cada valor.

23	28	21
22	24	26
27	20	25

Figura 3. Quadrado mágico derivado de Lo-Shu.

Os quadrados mágicos chegaram ao ocidente através dos árabes, que os conheceram por influência da cultura hindu. O físico e teologista alemão Heinrich Cornelius Agrippa (1486-1535) construiu sete quadrados mágicos de ordens 3 a 9 e lhes atribuiu um significado astronômico. Estes quadrados representavam simbolicamente os sete planetas conhecidos por ele incluindo o Sol e a Lua (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno, o Sol e a Lua). Na Idade Média os quadrados mágicos eram gravados em lâminas de prata como amuleto da peste negra. Os quadrados mágicos têm grande interesse em alguns meios. Na China e na Índia, há quem use tais quadrados mágicos gravados em metal ou pedra, como amuletos ou talismãs. Despertaram também interesse em alguns matemáticos, pelos problemas difíceis que originaram, em relação à construção, classificação e enumeração dos quadrados de uma dada ordem. Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Claude-Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783) estudaram quadrados mágicos e cubos mágicos.

1. Quadrado mágico

Definição 1. *Um quadrado mágico de ordem n é um arranjo quadrado de n^2-inteiros distintos, dispostos de tal maneira que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou das diagonais têm a mesma soma chamada soma (ou constante) mágica do quadrado.*

A ordem do quadrado mágico corresponde ao número de elementos de uma linha, uma coluna ou uma diagonal. Por exemplo, um quadrado de ordem 3 contém 3 linhas e 3 colunas e o elemento do centro, no caso de quadrados de ordem ímpar, é chamado mediano. Geralmente os elementos utilizados na construção de um quadrado mágico de ordem 3 são os algarismos naturais de 1 a 9. Um quadrado mágico é normal se os n^2 números que o formam são os n^2 primeiros números inteiros positivos. Verifica-se que, neste caso, a soma mágica é $S(n) = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

De fato:

$S = 1 + 2 + 3 + ... + (n^2-2) + (n^2-1) + n^2$

$S = n^2 + (n^2-1) + (n^2-2) + ... + 3 + 2 + 1$

$$2S = \underbrace{(n^2+1) + (n^2+1) + ... + (n^2+1)}_{n^2 \text{ vezes}}$$

$2S = (n^2+1)n^2$

$S = \dfrac{(n^2+1)n^2}{2}$ se k é a soma de cada coluna e se há n colunas $S = kn$.

Então $kn = \dfrac{(n^2+1)n^2}{2}$; logo, obtemos $k = \dfrac{(n^2+1)n}{2}$.

Desse modo, o quadrado mágico de Lo-Shu é normal de ordem 3 com soma mágica 15.

Ordem n	3	4	5	...	n
Soma	15	34	65	...	$\dfrac{(n^2+1)n}{2}$

1.1. Propriedades dos quadrados mágicos de ordem 3.

De acordo com Jean (2004)[2]. Os quadrados mágicos de ordem 3, verificam as seguintes propriedades:

(i) a soma mágica é igual ao triplo do mediano. Se o mediano é 7, a soma mágica do quadrado é reciprocamente 21.

(ii) a soma dos elementos é igual à três vezes a soma mágica. Se a soma mágica é 21, a soma dos elementos é 63.

(iii) a soma dos elementos é igual à nove vezes o mediano. Se o mediano é 7, a soma dos elementos é reciprocamente 63.

[2] Artigo eletrônico: "Initiation aux carrés magiques d´ordre 3´´ de Charles-É.Jean disponível em *http : //www.recreomath.qc.ca/art$_m$agique$_c$3.htm*. Consulta realizada em 02/09/06 [8].

(iv) a soma dos elementos dos quatro cantos é igual à quatro vezes o mediano. Se o mediano é 7, a soma dos elementos dos quatro cantos é 28.

(v) a soma dos elementos dos quatro cantos é igual aos quatro terços da soma mágica. Se a soma mágica é 21, a soma dos elementos dos quatro cantos é 28.

(vi) a soma dos quatro elementos do centro de cada alinhamento periférico é igual à soma dos elementos dos quatro cantos.

(vii) a soma dos dois elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro é igual ao dobro do mediano. Se o mediano é 7, a soma dos dois elementos é 14.

Atividade: Criar um quadrado mágico de ordem 3 e verificar as propriedades:

Tabela 2

1.2. **Quadrado mágico de ordem ímpar associativo.**

Um quadrado mágico de ordem ímpar é denominado associativo quando os pares de números opostos ao centro somam $n^2 + 1$. Observe que o quadrado mágico Lo-Shu verifica essa propriedade.

2. Quadrados mágicos equivalentes - por rotação e por simetria

Ao deslocar os elementos de um quadrado mágico de ordem 3 por rotação ao redor de um ponto ou por simetria em relação a um eixo, pode-se construir sete outros quadrados mágicos.

3. Quadrados mágicos equivalentes - por rotação e por simetria

Ao deslocar os elementos de um quadrado mágico de ordem 3 por rotação ao redor de um ponto ou por simetria em relação a um eixo, pode-se construir sete outros quadrados mágicos.

Por rotação:

Atividades:

1. A partir do quadrado abaixo, obtenha outro quadrado mágico, girando-o 90^0 no sentido horário. Preencha o quadrado da esquerda, abaixo.

2. Aplicando-se duas rotações sucessivas de $90°$ sobre cada quadrado precedente, obtém-se os outros dois quadrados mágicos.

Observa-se que ao fazer uma outra rotação de $90°$ sobre o último quadrado gera-se o quadrado primitivo.

Por simetria

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Tabela 3. Quadrado mágico primitivo e o rotacionado.

Figura 4. Quadrados mágicos obtidos por rotação.

Atividade 1. Tomando-se a segunda linha do quadrado abaixo como o eixo de simetria, invertendo os elementos simétricos de cada coluna, obtém-se outro quadrado mágico. Completar o quadrado da direita.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 5. Quadrado mágico obtido por simetria do quadrado primitivo.

Pode-se obter outros quadrados mágicos. 2. Considerando como eixo de simetria a segunda coluna ou a diagonal principal ou a diagonal secundária. Completar os quadrados mágicos abaixo e verificar as simetrias em cada um.

a)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

b)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

c)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A partir de um quadrado mágico de ordem 3, pode-se obter três outros quadrados mágicos por rotação e quatro outros quadrados mágicos por simetria. Estes oito quadrados mágicos são considerados como equivalentes.

4. Métodos de formação de quadrados mágicos

Este item é baseado ainda, no artigo eletrônico de Charles-E. Jean. O quadrado mágico de ordem três obedece duas condições:

1^a os nove números são dispostos numa seqüência aritmética. Por exemplo, toma-se a seqüência $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26)$ de razão 3. Pode-se obter o quadrado mágico abaixo do qual a soma mágica é 42.

23	2	17
8	14	20
11	26	5

Figura 6. Quadrado mágico com soma 42.

2^a os nove números são dispostos em três seqüências aritméticas de três números que têm uma mesma razão e as três seqüências estão entre elas em progressão aritmética que tem uma mesma razão. Por exemplo, toma-se as três seqüências $(2, 4, 6), (5, 7, 9), (8, 10, 12)$. A razão de cada seqüência é 2 e, além disso, os elementos da mesma fila de uma seqüência ao outro compõe uma seqüência aritmética da qual a razão é 3. Ele pode formar o quadrado mágico abaixo com a soma mágica 21.

10	2	9
6	7	8
5	12	4

Figura 7. Quadrado mágico com soma 21.

4.1. **Construção de quadrados mágicos de ordem 3 a partir de um número.**

É possível construir uma infinidade de quadrados mágicos de ordem 3 a partir um número. Toma-se, por exemplo, o número 10 e coloque-o ao centro. Sobre cada uma das duas diagonais, escreve-se dois números dos quais a soma é o dobro do número dado, ou seja, 20 eis a posição dos cinco primeiros números:

5		12
	10	
8		15

Figura 8. Construção de um quadrado mágico.

Completam-se as casas vazias de modo que a soma mágica seja 30 e obtém-se o quadrado mágico abaixo.

5		12
	10	
8		15

Figura 9. Quadrado mágico com soma 30.

	10	
	13	
	16	

Figura 10. Construção de um quadrado mágico.

4.2. Construção de quadrados mágicos de ordem 3 a partir de dois números.

É possível construir vários quadrados mágicos de ordem 3 a partir de dois números. Toma-se por exemplo, os números 10 e 16 .

1^o caso: Coloca-se os números nas extremidades de uma fila que passa pelo centro. Como a soma dos dois números é 26, o mediano é 13 tem-se então:

A soma mágica é 39. Completa-se a primeira linha, por exemplo, com 8 e 21, a seguir completa-se as diagonais e depois seguidamente as duas colunas. Tem-se:

8	10	21
24	13	0
5	16	18

Figura 11. Quadrado mágico com soma 39.

2^o caso: Coloca-se os números nas extremidades de uma linha que não passa pelo centro. Supõe-se um mediano, por exemplo 11. Se não se quer ter elementos negativos, escolhe-se o valor do mediano entre os dois números dados. Tem-se:

		10
	11	
		16

Figura 12. Construção de um quadrado mágico.

Completa-se então cada uma das diagonais e tem-se o quadrado mágico.

6	17	10
15	11	7
12	5	16

Figura 13. Quadrado mágico com soma 33.

Pode-se construir quadrados mágicos de ordem 3 a partir de três números dados. No entanto, a partir de quatro números, não é possível fazer todos os casos.

5. Generalizando

5.1. Construção de um quadrado mágico de ordem 3 a partir de um número a.

Veja item 3.1

As etapas são:

- coloca-se o a como valor mediano; a soma mágica é então 3a.
- completa-se uma diagonal com $(a+b)$ e $(a-b)$.
- completa-se a outra diagonal com $(a+c)$ e $(a-c)$.
- por último, completa-se cada alinhamento para ter $3a$ como soma mágica.

$a + b$	$a - b - c$	$a + c$
$a - b + c$	a	$a + b - c$
$a - c$	$a + b + c$	$a - b$

$a - b$	$a + b - c$	$a + c$
$a + b + c$	a	$a - b - c$
$a - c$	$a - b + c$	$a + b$

Figura 14. Quadrado mágico com soma 33.

Obs.: O quadrado acima corresponde à figura 9.

5.2. Construção de um quadrado mágico a partir de três subconjuntos.

Veja item 3.1.1, 2^a condição

$$\{a, a+r, a+2r\}; \{a+s, a+r+s, a+2r+s\} e \{a+2s, a+r+2s, a+2r+2s\}.$$

Tomando-se como modelo o quadrado da esquerda, tem-se:

8	1	6		$a + r + 2s$	a	$a + 2r + s$
3	5	7		$a + 2r$	$a + r + s$	$a + 2s$
4	9	2		$a + s$	$a + 2r + 2s$	$a + r$

A soma mágica é $3a + 3r + 3s$, tal que a, r e s são valores quaisquer. Para cada valor de a, r e s, tem-se um novo quadrado mágico. Por exemplo, se $a = 3, r = 1$ e $s = 4$, obtém-se:

12	3	9
5	8	11
7	13	4

Figura 15. Quadrado mágico com soma 24.

6. Operações com quadrados mágicos conhecidos

Pode-se produzir numerosos quadrados mágicos por meio de operações aritméticas e ainda podemos verificar nos quadrados mágicos, aplicações de propriedades da adição e da multiplicação. Eis um exemplo:

A soma mágica do primeiro quadrado é 21; a do segundo é 48. Há uma diferença de $3 \times 9 = 27$, entre as somas mágicas dos dois quadrados $(48 - 21 = 27)$.

Atividades

1. Construir um quadrado mágico de ordem 3 com constante mágica 12.

11	2	8				20	11	17
4	7	10	+	9	=	13	16	19
6	12	3				15	21	12

Responda: a) O que acontecerá se somarmos 10 a cada número deste quadrado?

b) O que acontecerá se multiplicarmos cada número deste quadrado por 3?

c) O que acontecerá com a soma em cada linha, em cada coluna e nas diagonais?

d) Verificar se $a + b + c = S$ então $(x + a) + (x + b) + (x + c) = 3x + S$

e) Verificar se $a + b + c + S$ então $x(a + b + c) = x.S$

2. Completar o quadrado da esquerda com soma mágica 45 e a operação indicada seja verdadeira

						4	4	7
			÷	3	=	8	5	2
						3	6	6

3.a) A soma mágica do primeiro quadrado é 51; a do segundo é 15; a do terceiro é $51 + 15 = 66$. Determine os valores de a, b, c e d.

a	16	21		4	9	2		8	25	23
24	17	10	+	3	b	7	=	27	22	17
13	c	20		8	1	6		21	d	26

b) A soma de dois quadrados mágicos é um quadrado mágico? Qual é a soma mágica do quadrado resultante?

c) A diferença de dois quadrados mágicos é um quadrado mágico? Qual é a soma mágica do quadrado resultante?

7. O fascinante quadrado mágico de ordem 4 de Albretcht Dürer

O famoso artista alemão Albretcht Dürer (1471 – 1528) foi também matemático e publicou em 1525 um tratado sobre a perspectiva, a geometria em três dimensões e as seções cônicas, intitulado "Introdução à medida com compasso e régua´´, no qual é descrito um círculo pela primeira vez. O quadrado mágico de Dürer tem fascinado aos estudiosos por ser um quadrado mágico com a constante mágica 34 que se encontra em sua obra "Melancolia´´[3] .

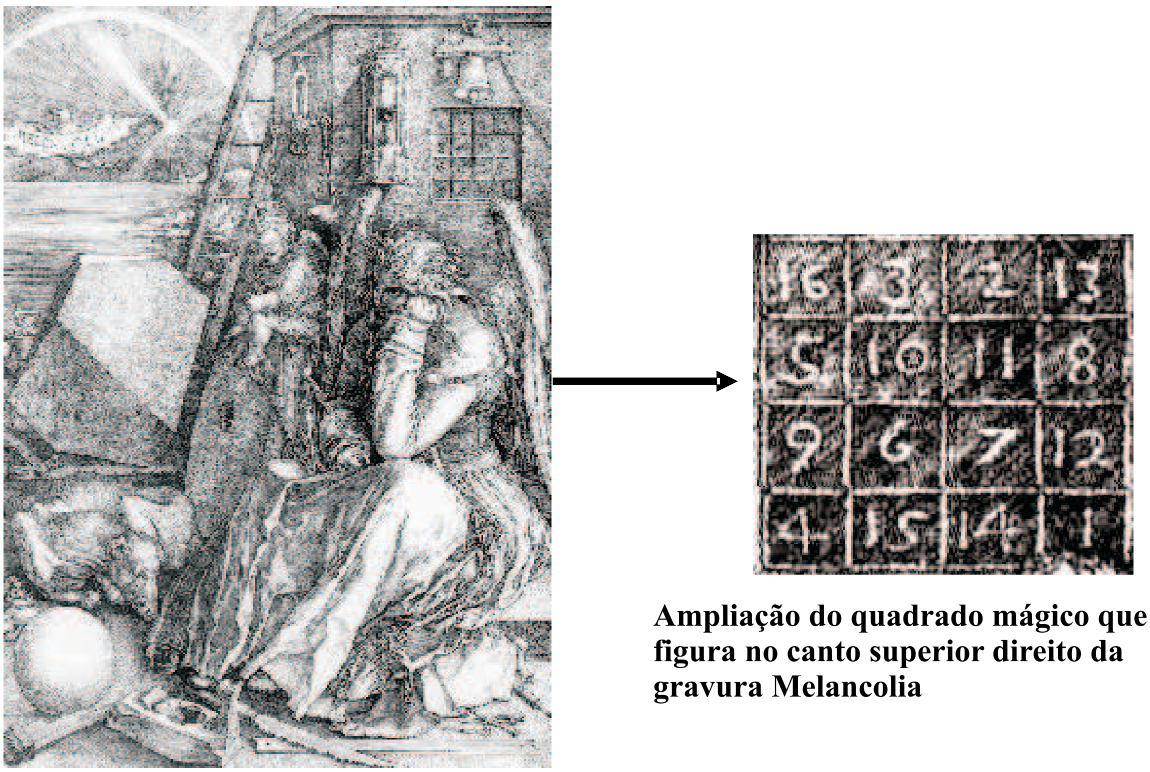

Figura 16. Melancolia 1 - gravura em cobre de Albrecht Dürer (1514).

O ano em que a gravura foi feita, 1514, aparece nas duas casas centrais da última linha.

Ao estudar o quadrado mágico de Dürer, observa-se as seguintes propriedades:

(i) a constante mágica 34, pode ser constatada na soma de seus cantos (a), no quadrado central (b) e nos seus quatro quadrantes (c).

(ii) soma dos quadrados dos números das duas linhas superiores é igual à soma dos quadrados dos números das duas linhas inferiores;

(iii) a soma dos quadrados dos números das linhas ímpares é igual à soma dos quadrados das linhas pares;

(iv) a soma dos números das diagonais é igual à soma dos números fora das diagonais;

(v) a soma dos quadrados dos números das diagonais é igual à soma dos quadrados dos números fora das diagonais;

[3]Encontra-se exposto no Museu Britânico

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 17. Quadrado mágico de Dürer.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 18. A soma mágica do quadrado mágico de Dürer.

(vi) a soma dos cubos dos números das diagonais é igual à soma dos cubos dos números fora das diagonais.

(vii) ao se unir, com segmentos, os números pares da segunda, terceira e quarta colunas forma um hexágono, o mesmo acontecendo ao se unir os números ímpares da primeira, segunda e terceira colunas. Subtraindo-se uma unidade de cada elemento do quadrado mágico de Dürer, tem-se um outro quadrado mágico com soma 30.

15	2	1	12
4	9	10	7
8	5	6	11
3	14	13	0

Figura 19. Quadrado mágico derivado de Dürer com soma 30.

Escrevendo-se esses novos números na base dois, com quatro algarismos, tem-se o quadrado mágico abaixo.

1111	0010	0001	1100
0100	1001	1010	0111
1000	0101	0110	1011
0011	1110	1101	0000

Figura 20. Quadrado mágico na base 2.

Após uma rotação de 45^0 em torno do ponto de encontro das diagonais, no sentido horário, obtém-se a figura abaixo que apresenta simetria vertical perfeita dos zeros e uns, como se estivessem refletidos em um espelho.

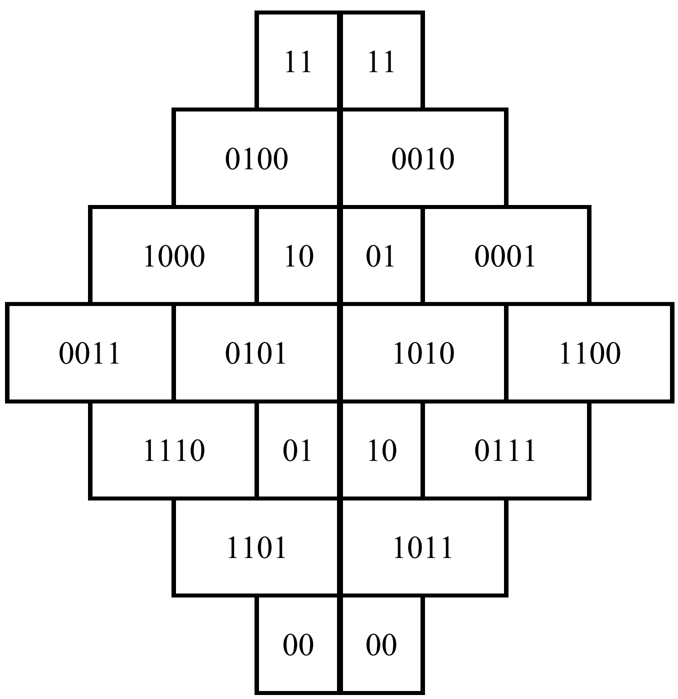

Figura 21. Quadrado mágico na base 2 após rotação de 45^0.

Muitos acreditavam que no quadrado mágico de Dürer havia uma certa dose de misticismo. Os astrólogos consideravam estes quadrados como amuletos protetores, principalmente contra a melancolia.

8. Construção do quadrado mágico de ordem 4

a)Para construir quadrados mágicos de ordem 4, marque as suas diagonais.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

b)Copiar do quadrado anterior os números que não são cortados pelas diagonais, nas suas respectivas casas.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

c)A partir do canto inferior direito do quadrado, no sentido da direita para a esquerda,coloque linha após linha (de baixo para cima),os numerais que estavam nas casas cortadas pelas diagonais do quadrado do item a), começando pelo 1, depois o $4, 6, 7 \ldots$ Completar o quadrado mágico ao lado.

16	2	3	
5			8
9			12
4	14	15	**1**

Começar por aqui

9. Quadrado mágico pandiagonal

Um quadrado mágico pandiagonal é um quadrado mágico com propriedade suplementar, todas as suas diagonais (a principal e a secundária) e as diagonais quebradas somam a constante mágica. O menor quadrado mágico pandiagonal conhecido é de ordem 4. Dentre os 880 diferentes quadrados mágicos de ordem 4, somente 48 são pandiagonais.

Por exemplo, as duas diagonais; $3 + 9 + 14 + 8$ e $10 + 4 + 7 + 13$ somam 34 e as diagonais quebradas também: $10 + 16 + 7 + 1, 15 + 5 + 2 + 12, 6 + 4 + 11 + 13, \ldots$

3	**6**	**15**	**10**
16	**9**	**4**	**5**
2	**7**	**14**	**11**
13	**12**	**1**	**8**

10. Quadrado mágico de ordem 5

Para os muçulmanos, os quadrados mágicos de ordem 5 com o algarismo 1 situado no centro tem um significado místico especial, dado que o número 1 é o símbolo de Alá, Ser Supremo e Único. Qual é a constante mágica deste quadrado abaixo?

19	3	12	21	10
11	25	9	18	2
8	17	1	15	24
5	14	23	7	16
22	6	20	4	13

Figura 22. Quadrado mágico de ordem 5.

Observa-se que os quatro cantos mais o mediano deste quadrado também somam 65.

11. Quadrados mágicos normais de ordem ímpar

Segundo Eves (1995) o método para construir quadrados mágicos normais[4] de ordem ímpar deve-se a expedição De la Loubère (1642-1729) ao Sião.

"De la Loubère (1642-1729), quando enviado de Luis XIV no Sião (atual Tailândia), no período entre 1687 e 1688, aprendeu um método simples de construir quadrados mágicos normais de qualquer ordem ímpar. Ilustremos o método com a construção de um de ordem 5. Desenhe um quadrado e o divida em 25 casas (ver figura 27). Contorne o quadrado com casas ao longo de suas bordas superior e direita e sombreie a do canto superior direito.´´ (p. 269).

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Figura 23. Quadrado mágico De la Loubère.

Transcreve-se abaixo o método de construir quadrados mágicos normais de ordem ímpar, escrito por Eves (1995);

"Escreva 1 na casa central superior do quadrado original. A regra geral consiste em proceder diagonalmente para cima e para a direita com os inteiros sucessivos. As exceções a essa regra ocorrem quando essa operação nos leva para fora do quadrado original ou a uma casa já ocupada. Na primeira dessas situações voltamos ao quadrado original deslocando o numero que cairia fora, ou de cima para baixo ou da direita para a esquerda, conforme seja o caso, para a última casa em branco da fila correspondente. Na segunda situação escrevemos o número na casa imediatamente abaixo da última a ter sido preenchida e prosseguimos com a regra geral. Deve-se considerar ocupada a casa sombreada. Em nossa ilustração, então, a regra geral indica que se deve colocar o 2 diagonalmente acima do 1 na quarta casa do contorno superior do quadrado. Portanto, deve-se deslocar o 2 para a quarta casa da linha de baixo do quadrado original. Prosseguindo com a regra geral, quando se chega ao 4, atinge-se a terceira casa do contorno lateral direito do quadrado. Deve-se então deslocar o 4 para a terceira casa da primeira coluna do quadrado

[4]Um quadrado mágico é normal se os n^2 números que o formam são os n^2 primeiros números inteiros positivos.

original. A regra geral colocaria o 6 na casa já ocupada pelo 1; portanto ele deve ser escrito na casa exatamente abaixo da do último número registrado, ou seja, o 5. e assim por diante.´´(p. 269-270).

Deve-se ficar atento na construção de quadrados mágicos. Essas construções estão atreladas a ordem dos quadrados ímpar, par-múltiplos de quatro e par-não múltiplos de quatro.

Utilizando-se o quadrado mágico em sala de aula tem-se a possibilidade de estabelecer relações entre os números que formam o quadrado, propiciar condições para que os estudantes desenvolvam seu raciocínio combinatório, verificar aplicações de propriedades da adição e da multiplicação, vivenciando situações em que se destacam propriedades das operações.

Referências

[1] ANDRADE, Lenimar de Andrade. Mais sobre quadrados mágicos. Revista do Professor de Matemática-volume 41, 1999; SBM.

[2] BARDERAS, Santiago Valiente. Didactica de la matemática . El libro de los recursos. Colecion Aula Abierta. Editorial La Muralla S.A., Madrid. 2000

[3] EVES, Howard (1995) Introdução à historia da Matemática. Editora da Unicamp, Campinas, SP.

[4] GRUPO AZARQUIEL. Ideas y actividades para enseñar álgebra. Editorial Sintesis AS. Madri, 1993

[5] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Atividades matemáticas: ciclo básico. 5ed. São Paulo: SE/CEMP, 1998. v.2.

[6] SOCIEDADE BRASILEIRA DA MATEMÁTICA, Quadrados mágicos-como construir um quadrado mágico de ordem ímpar. Revista do Professor de Matemática-volume 39, 1999; SBM.

Sites consultados:

[7] *http* : //www.geocities.com/ harveyh/pandiag5.htm (consulta em 02/09/06).

[8] *http* : //mathworld.wolfram.com/PanmagicSquare.html (consulta em 22/09/06).

[9] *http* : //www.recreomath.qc.ca/art_magique_c3.htm (consulta em 02/09/06).

[10] *http* : //www.kandaki.com/CM-Constante.htm (consulta em 22/09/06).

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica UNICAMP - LEM - IMECC/Cotil-LEM, Campinas, SP, Brasil

E-mail address: msantinh@uol.com.br/rmm@vivax.com.br