

Quadrados Mágicos: Um passeio pela História e pela Álgebra Linear

Magic Squares: A Walk Through History and Linear Algebra

Marcelo Ferreira de Melo^I e José Samuel Machado^{II}

^IUniversidade Federal do Ceará, Ceará, Brasil

^{II}Escola Municipal Edilson Brasil Soares, Ceará, Brasil

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os quadrados mágicos, abordar aspectos históricos relacionados ao seu surgimento e sua utilização por artistas ao longo dos séculos, bem como analisar os quadrados mágicos na resolução de sistemas lineares e na linguagem dos espaços vetoriais de matrizes. Como resultado, pode-se obter mais uma motivação para o estudo de matrizes e sistemas lineares, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior.

Palavras-chave: *Quadrados mágicos, história, matrizes, espaços vetoriais.*

Abstract

The objective of this work is to study the magic squares, to address historical aspects related to their emergence and their use by artists throughout the centuries, as well as to analyze the magic squares in the resolution of linear systems and in the language of the vector spaces of matrices. As a result, one can obtain another motivation for the study of matrices and linear systems, both in High School and Higher Education.

Keywords: *Magic squares, history, matrices, vectorial spaces.*

1 Introdução

Como motivação para o estudo de matrizes, pode-se mencionar sua utilidade na organização de dados. Por exemplo, as notas finais dos alunos de uma série no colégio podem formar uma matriz cujas colunas correspondem às matérias lecionadas naquela série e cujas linhas representam os alunos. Na interseção de uma linha com uma coluna figura um número, que é a nota daquele aluno naquela matéria. De maneira similar, pode-se obter uma matriz por recolher os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, e montar uma tabela com esses dados. Tem-se, assim, uma matriz de ordem 4×3 , pois há 4 linhas (pessoa 1, pessoa 2, pessoa 3 e pessoa 4) e 3 colunas (altura, peso e idade). Na interseção da linha 2 com a coluna 3, por exemplo, está a idade da pessoa 2. As matrizes também aparecem na Biologia. A matriz de Leslie, por exemplo, pode ser utilizada na previsão populacional e na ceifagem sustentável (Poole, 2004).

Como motivação para o estudo de sistemas lineares, pode-se mencionar sua utilidade no balanceamento de reações químicas. Por exemplo, pode-se determinar as quantidades de hidrogênio e de oxigênio que irão reagir para produzir água, resolvendo um sistema linear. Na Engenharia de Alimentos, os sistemas lineares aparecem no processo de descoberta de como deverá ser uma refeição equilibrada a partir de uma certa quantidade de alimentos, quando se conhecem as unidades de vitaminas que cada alimento possui (Boldrini et al., 1986). Em Geometria Analítica, um sistema linear pode surgir quando se procura o ponto de interseção entre duas retas concorrentes do plano ou quando se quer determinar o conjunto dos pontos de interseção de planos no espaço.

Os quadrados mágicos são outra fonte de motivação para o estudo de matrizes e de sistemas lineares. Os quadrados mágicos fornecem exemplos interessantes de matrizes e estão associados, naturalmente, à resolução de sistemas lineares. Em tal contexto, podem ser abordados os tipos especiais de matrizes, tais como matriz quadrada e matriz nula. Também, podem ser exemplificadas as operações com matrizes, tais como a soma de matrizes de mesma ordem e a multiplicação de um número por uma matriz. No que diz respeito aos sistemas lineares, os quadrados mágicos podem ser utilizados para trabalhar técnicas de resolução de sistemas, tais como a substituição e o escalonamento. Uma abordagem introdutória para a resolução de sistemas e equações lineares pode ser vista em (Lima et al., 2006). Uma introdução à história dos quadrados mágicos pode ser vista em (Eves, 2004) e em (Boyer e Merzbach, 2012).

Na seção 2 deste artigo, será feito um passeio pela história dos quadrados mágicos, desde seu surgimento lendário até sua aparição em obras de arte ao longo dos séculos. Em nível de Ensino Médio, os quadrados mágicos serão utilizados para exemplificar matrizes e trabalhar a resolução de sistemas lineares. Na seção 3, será feita uma caracterização dos quadrados mágicos 3×3 e, como caso particular, será analisado um quadrado mágico histórico. No contexto do Ensino Superior, os quadrados mágicos serão utilizados para ilustrar tópicos básicos de Álgebra Linear, tais como espaço vetorial, dependência linear, base e dimensão. Na seção 4, será mostrado que o conjunto dos quadrados mágicos $n \times n$ é um espaço vetorial e será calculada sua dimensão, de maneira diferente da que foi proposta em Lima (2004). No caso particular, em que $n = 4$, este cálculo de dimensão será utilizado para construir explicitamente uma base do espaço vetorial dos quadrados mágicos 4×4 , onde serão analisados dois quadrados mágicos históricos de ordem 4×4 à luz da resolução de sistemas lineares em nível de Ensino Médio. A ideia do trabalho é fornecer, por meio dos quadrados mágicos, uma motivação adicional para o estudo de matrizes e sistemas lineares, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior. Finalmente, na seção 5, será indicado como os professores do Ensino Médio e do Ensino Superior podem utilizar este artigo para incentivar seus alunos a estudar matrizes e sistemas lineares.

2 Quadrados Mágicos na História

O exemplo conhecido mais antigo de quadrado mágico é proveniente da China, o chamado quadrado mágico *lo-shu*. De acordo com uma lenda, o primeiro a vê-lo foi o imperador Yu, por volta de 2200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga divina que lhe apareceu às margens do rio Amarelo. Como se vê na Figura 1, trata-se de um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas; nós pretos para números pares e brancos para número ímpares.

Em termos de matrizes, tem-se o seguinte:
$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Note que os números somam 15 em todas as direções, como se fossem números mágicos. De fato:

- 1ª linha: $4 + 9 + 2 = 15$;
- 2ª linha: $3 + 5 + 7 = 15$;
- 3ª linha: $8 + 1 + 6 = 15$;

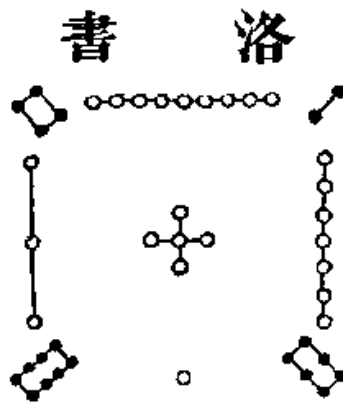


Figura 1: Quadrado mágico *lo-shu*. Fonte: (Eves, 2004)

- 1ª coluna: $4 + 3 + 8 = 15$;
- 2ª coluna: $9 + 5 + 1 = 15$;
- 3ª coluna: $2 + 7 + 6 = 15$;
- diagonal principal: $4 + 5 + 6 = 15$;
- diagonal secundária: $2 + 5 + 8 = 15$.

Na famosa gravura do artista alemão Albrecht Dürer (1471-1528), intitulada *Melancolia*, aparece o quadrado mágico de ordem 4 mostrado na Figura 2. Esse é considerado frequentemente o primeiro uso do quadrado mágico no Ocidente. É digno de nota que o ano em que a gravura foi feita, 1514, aparece no centro da última linha da matriz.

Em termos de matrizes, tem-se o seguinte:

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que o valor da soma dos elementos de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária é 34. De fato:

- 1ª linha: $16 + 3 + 2 + 13 = 34$;
- 2ª linha: $5 + 10 + 11 + 8 = 34$;
- 3ª linha: $9 + 6 + 7 + 12 = 34$;
- 4ª linha: $4 + 15 + 14 + 1 = 34$;
- 1ª coluna: $16 + 5 + 9 + 4 = 34$;
- 2ª coluna: $3 + 10 + 6 + 15 = 34$;
- 3ª coluna: $2 + 11 + 7 + 14 = 34$;
- 4ª coluna: $13 + 8 + 12 + 1 = 34$;
- diagonal principal: $16 + 10 + 7 + 1 = 34$;
- diagonal secundária: $13 + 11 + 6 + 4 = 34$.

Além das propriedades acima, que definem um quadrado mágico, esta matriz possui outras peculiaridades. São as seguintes:



Figura 2: Quadrado mágico na gravura *Melancolia*. Fonte: (Boyer e Merzbach, 2012)

- (a) A soma dos quadrados dos números das duas linhas superiores é igual à soma dos quadrados dos números das duas linhas inferiores.

$$\text{De fato, } (16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2) + (5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2) = (9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2) + (4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2) = 748.$$

- (b) A soma dos quadrados dos números da primeira e terceira linhas é igual à soma dos quadrados dos números da segunda e quarta linhas.

$$\text{Com efeito, } (16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2) + (9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2) = (5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2) + (4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2) = 748.$$

Outro artista que está associado aos quadrados mágicos é o arquiteto catalão Antoni Gaudí (1852-1926). Em sua obra prima Sagrada Família, um dos monumentos mais visitados da Espanha, pode ser visto um quadrado mágico de ordem 4 na cena *O Beijo de Judas*, conforme mostrado na Figura 3.

Em termos de matrizes, tem-se o seguinte

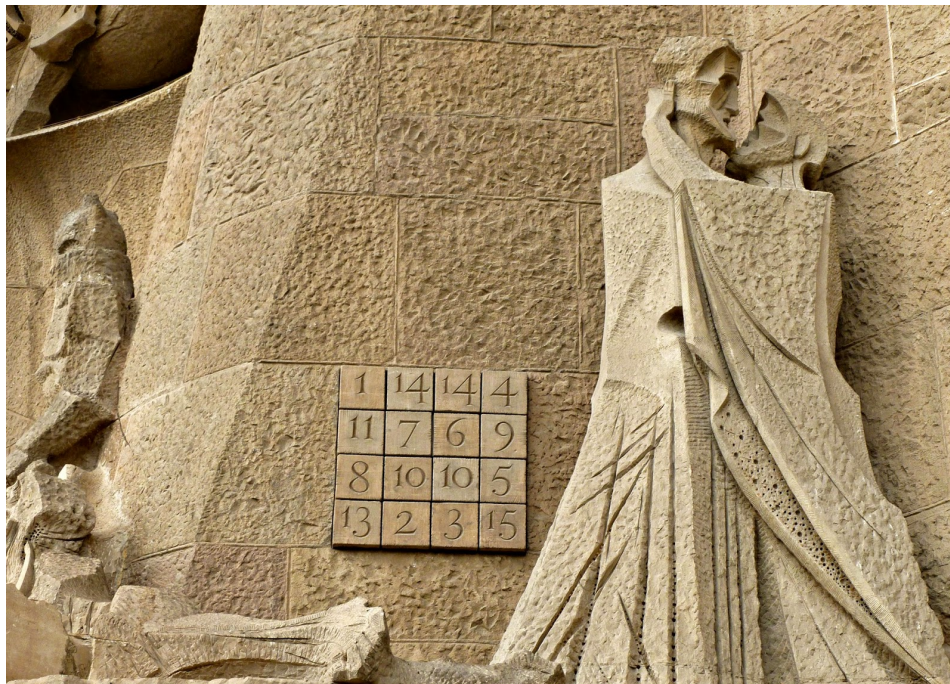


Figura 3: Quadrado mágico na cena *O Beijo de Judas*. Fonte: pt.wikipedia.org

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Note que o valor da soma dos elementos de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária é 33. De fato:

- 1ª linha: $1 + 14 + 14 + 4 = 33$;
- 2ª linha: $11 + 7 + 6 + 9 = 33$;
- 3ª linha: $8 + 10 + 10 + 5 = 33$;
- 4ª linha: $13 + 2 + 3 + 15 = 33$;
- 1ª coluna: $1 + 11 + 8 + 13 = 33$;
- 2ª coluna: $14 + 7 + 10 + 2 = 33$;
- 3ª coluna: $14 + 6 + 10 + 3 = 33$;
- 4ª coluna: $4 + 9 + 5 + 15 = 33$;
- diagonal principal: $1 + 7 + 10 + 15 = 33$;
- diagonal secundária: $4 + 6 + 10 + 13 = 33$.

Em outras palavras, o número mágico é 33, que era a idade que Jesus Cristo tinha no ano em que foi morto, segundo a tradição cristã.

3 Quadrados Mágicos na Linguagem de Matrizes

Definição 3.1. Uma matriz real $n \times n$ chama-se um quadrado mágico de ordem n quando a soma dos elementos de cada uma de suas linhas, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária (ao todo $2n + 2$ somas) são iguais. Essa soma será chamada de constante mágica.

Na seção anterior, foram vistos três exemplos históricos de quadrados mágicos, o quadrado mágico *lo-shu*, de ordem 3, o quadrado mágico da gravura *Melancolia*, de ordem 4, e o quadrado mágico da cena *O Beijo de Judas*, também de ordem 4. O objetivo desta seção é classificar os quadrados mágicos de ordem 1, 2 e 3. Como caso particular, será mostrada a expressão do quadrado mágico *lo-shu* em termos da classificação dos quadrados mágicos de ordem 3.

Proposição 3.1. Toda matriz 1×1 é um quadrado mágico.

Demonstração: Por definição, qualquer matriz (a_{11}) é um quadrado mágico cuja constante mágica é o número a_{11} . \square

Proposição 3.2. Uma matriz 2×2 é um quadrado mágico se, e somente se, todos os seus elementos são iguais.

Demonstração: De fato, se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é um quadrado mágico, com constante mágica k , tem-se que

$$\begin{cases} a + b = k \\ c + d = k \\ a + c = k \\ b + d = k \\ a + d = k \\ b + c = k. \end{cases}$$

A partir da primeira, da quarta e da última equação desse sistema linear, tem-se que $a = c = d = k - b$. Utilizando a terceira e a última equação do sistema, tem-se que $a = b = k - c$. Portanto, $a = b = c = d = \frac{k}{2}$. A recíproca é imediata. \square

Note que um quadrado mágico de ordem 2 fica completamente determinado por uma variável livre, por exemplo, a constante mágica. Em outras palavras, todo quadrado mágico 2×2 é da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 3.3. Todo quadrado mágico de ordem 3 é da forma

$$\begin{pmatrix} a & b & k - a - b \\ \frac{4}{3}k - 2a - b & \frac{k}{3} & 2a + b - \frac{2}{3}k \\ a + b - \frac{k}{3} & \frac{2}{3}k - b & \frac{2}{3}k - a \end{pmatrix},$$

onde a, b e k são números reais, sendo k a constante mágica.

Demonstração: Seja $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ um quadrado mágico, com constante mágica k . Segue-se, da definição, que a soma dos elementos de duas linhas quaisquer é igual à soma dos elementos das duas diagonais. Em particular, somando os elementos da primeira linha com os da terceira linha, tem-se $(a + b + c) + (g + h + i) = (a + e + i) + (c + e + g)$. Isso implica que $b + h = 2e$. Assim, a soma dos elementos da segunda coluna é $b + e + h = (b + h) + e = 2e + e = 3e = k$ e, portanto, $e = \frac{k}{3}$.

Utilizando esse resultado, conclui-se que:

- 1ª linha: $c = k - a - b$;
- 2ª coluna: $h = k - b - e = k - b - \frac{k}{3} \implies h = \frac{2}{3}k - b$;
- Diagonal secundária: $g = k - c - e = k - (k - a - b) - e \implies g = a + b - \frac{k}{3}$;
- 1ª coluna: $d = k - a - g = k - a - (a + b - \frac{k}{3}) \implies d = \frac{4}{3}k - 2a - b$;

- 2ª linha: $f = k - d - e = k - (\frac{4}{3}k - 2a - b) - \frac{k}{3} \implies f = 2a + b - \frac{2}{3}k$;
- Diagonal principal: $i = k - a - e = k - a - \frac{k}{3} \implies i = \frac{2}{3}k - a$.

Portanto, a expressão geral de um quadrado mágico de ordem 3 é dada por

$$\begin{pmatrix} a & b & k - a - b \\ \frac{4}{3}k - 2a - b & \frac{k}{3} & 2a + b - \frac{2}{3}k \\ a + b - \frac{k}{3} & \frac{2}{3}k - b & \frac{2}{3}k - a \end{pmatrix},$$

onde a, b e k são números reais, e k é a constante mágica. □

Em termos de combinação linear, conclui-se que qualquer quadrado mágico de ordem 3 se escreve, de maneira única, como

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

onde a, b e k são números reais.

Note que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ são quadrados mágicos com constante mágica 0, ao passo que

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ é um quadrado mágico com constante mágica 1.

Exemplo 3.1. *Pode-se escrever, como combinação linear dos três quadrados mágicos acima, o quadrado mágico lo-shu $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, supostamente visto pelo imperador chinês Yu, por volta de 2200 a.C., na carapaça de uma tartaruga.*

De fato, com a notação usada na Proposição 3.3, tem-se que $a = 4, b = 9$ e $k = 15$. Portanto,

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, surgem algumas questões. Existe uma expressão geral para os quadrados mágicos 4×4 ? Em caso afirmativo, como ficariam expressos os quadrados mágicos vistos na gravura *Melancholia* e na cena *O Beijo de Judas*? Um método simples de se construir quadrados mágicos de ordem $4n$, com $n \geq 1$ inteiro, pode ser visto em (Eves, 2004). Tal método consiste em construir, a partir de um quadrado mágico de ordem 4, quadrados mágicos de ordem 8, 12, 24, etc. Na seção 4, a seguir, será apresentado um método diferente de se construir quadrados mágicos de ordem 4, utilizando combinação linear. Isso será utilizado para estabelecer uma ligação entre os quadrados mágicos *Melancholia* e *O Beijo de Judas*.

Tudo o que foi feito até agora, pode ser generalizado para quadrados mágicos de ordem n qualquer. Na seção 4, será feito um passeio pela Álgebra Linear, revelando que, para cada inteiro $n \geq 1$, o conjunto dos quadrados mágicos de ordem n forma um espaço vetorial, cuja dimensão é igual a 1, se $n = 1$ ou $n = 2$, e é igual a $n^2 - 2n$, se $n \geq 3$. Será apresentada, explicitamente, uma base para o espaço vetorial dos quadrados mágicos de ordem 4.

4 Quadrados Mágicos na Álgebra Linear

Seja \mathcal{M}_n o conjunto das matrizes reais $n \times n$. Considerando as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número por matriz, tem-se que \mathcal{M}_n é um espaço vetorial de dimensão n^2 . Uma demonstração desse fato, pode ser vista em (Lima, 2004).

Será denotado por \mathcal{Q}_n o conjunto de todos os quadrados mágicos $n \times n$. De acordo com a Definição 3.1, \mathcal{Q}_n é o conjunto das matrizes $n \times n$ tais que a soma dos elementos de cada uma de suas linhas, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária (ao todo $2n + 2$ somas) são iguais. Essa soma foi chamada de constante mágica.

Proposição 4.1. *O conjunto \mathcal{Q}_n , dos quadrados mágicos $n \times n$, é um espaço vetorial.*

Demonstração: Será mostrado, inicialmente, que \mathcal{Q}_n é um subespaço vetorial de \mathcal{M}_n . Note que:

(i) $0 \in \mathcal{Q}_n$, isto é, a matriz nula é um quadrado mágico.

De fato, a matriz nula é tal que a soma dos elementos de cada uma de suas linhas, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária são iguais a zero. Logo, a matriz nula é um quadrado mágico cuja constante mágica é zero.

(ii) $A, B \in \mathcal{Q}_n \implies A + B \in \mathcal{Q}_n$, isto é, a soma de quadrados mágicos é ainda um quadrado mágico.

Com efeito, sejam A e B quadrados mágicos de mesma ordem. Indicando por a a constante mágica de A e por b a constante mágica de B , tem-se que a matriz $A + B$ é tal que a soma dos elementos de cada uma de suas linhas, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária são iguais a $a + b$. Logo, $A + B$ é um quadrado mágico cuja constante mágica é $a + b$.

(iii) $k \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{Q}_n \implies k \cdot A \in \mathcal{Q}_n$, isto é, a multiplicação de um número por um quadrado mágico resulta em um quadrado mágico.

De fato, seja A um quadrado mágico. Indicando por a a constante mágica de A , tem-se que a matriz $k \cdot A$ é tal que a soma dos elementos de cada uma de suas linhas, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária são iguais a $k \cdot a$. Logo, $k \cdot A$ é um quadrado mágico cuja constante mágica é $k \cdot a$.

Assim, \mathcal{Q}_n é um subespaço vetorial de \mathcal{M}_n . Restringindo a \mathcal{Q}_n as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, definidas originalmente em \mathcal{M}_n , conclui-se que o conjunto de todos os quadrados mágicos de ordem n forma um espaço vetorial. \square

Para uma melhor compreensão do espaço vetorial \mathcal{Q}_n , faz-se necessário calcular sua dimensão. No caso em que $n = 1, 2, 3$, o que foi visto na seção anterior é suficiente para esse cálculo. No caso em que $n \geq 3$, a dimensão de \mathcal{Q}_n pode ser calculada utilizando o conceito de variedade afim, conforme proposto em (Lima, 2004). Nesta seção, utilizando transformações lineares, será apresentada uma outra maneira de calcular a dimensão de \mathcal{Q}_n , para $n \geq 3$.

4.1 Base e dimensão de $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ e \mathcal{Q}_3

Levando em conta o que foi visto na Seção 3, pode-se encontrar uma base e calcular a dimensão de \mathcal{Q}_n , para $n = 1, 2, 3$.

Proposição 4.2. *O conjunto unitário formado pela matriz (1) é uma base do espaço vetorial dos quadrados mágicos de ordem 1 e, portanto, $\dim \mathcal{Q}_1 = 1$.*

Demonstração: De acordo com a Proposição 3.1, $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{M}_1$ e, portanto, $\{(1)\}$ é uma base de tal espaço vetorial. Assim, $\dim \mathcal{Q}_1 = 1$. \square

É digno de nota que a igualdade $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{M}_1$ ocorre apenas nesse caso em que $n = 1$. Nos demais casos, em que $n \geq 2$, será visto que \mathcal{Q}_n é um subespaço vetorial próprio de \mathcal{M}_n , com dimensão estritamente inferior a n^2 .

Proposição 4.3. *O conjunto unitário formado pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma base do espaço vetorial dos quadrados mágicos de ordem 2 e, portanto, $\dim \mathcal{Q}_2 = 1$.*

Demonstração: De acordo com a Proposição 3.2, $\mathcal{Q}_2 = \left\{ \frac{k}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\}$ e, portanto, \mathcal{Q}_2 é o espaço gerado pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Por ser não nula, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é linearmente independente e, portanto, forma uma base de \mathcal{Q}_2 . Assim, $\dim \mathcal{Q}_2 = 1$. \square

Proposição 4.4. *O conjunto formado pelas três matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é uma base do espaço vetorial dos quadrados mágicos de ordem 3 e, portanto, $\dim \mathcal{Q}_3 = 3$.*

Demonstração: Como consequência da Proposição 3.3, foi visto que

$$\mathcal{Q}_3 = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ; a, b, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Isso significa que o espaço vetorial \mathcal{Q}_3 é gerado pelas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Além disso, essas três matrizes formam um conjunto linearmente independente. De fato:

$$\begin{aligned} a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \implies \begin{pmatrix} a & b & k - a - b \\ \frac{4}{3}k - 2a - b & \frac{k}{3} & 2a + b - \frac{2}{3}k \\ a + b - \frac{k}{3} & \frac{2}{3}k - b & \frac{2}{3}k - a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies a = b = k = 0. \end{aligned}$$

Logo, essas três matrizes formam uma base para \mathcal{Q}_3 e, portanto, $\dim \mathcal{Q}_3 = 3$. □

Isso prova a afirmação feita depois da Proposição 3.3, de que qualquer quadrado mágico de ordem 3 se escreve, de maneira única, como

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Na linguagem da Álgebra Linear, o Exemplo 3.1 ilustra que o quadrado mágico *lo-shu* $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ é um elemento do espaço vetorial \mathcal{Q}_3 e apresenta a sua decomposição como combinação linear dos elementos desta base de \mathcal{Q}_3 .

4.2 Dimensão de \mathcal{Q}_n ($n \geq 3$)

Seja $n \geq 3$ inteiro. O objetivo agora é demonstrar que $\dim \mathcal{Q}_n = n^2 - 2n$.

No caso particular em que $n = 3$, foi visto que $\dim \mathcal{Q}_3 = 3$, ou seja, $\dim \mathcal{Q}_3 = 3^2 - 2 \cdot 3$. No entanto, essa fórmula não se aplica para $n = 1, 2$, pois foi mostrado que $\dim \mathcal{Q}_1 = \dim \mathcal{Q}_2 = 1$.

Lema 4.1. Para uma matriz qualquer $A \in \mathcal{M}_n$, considere as $2n + 2$ funções a seguir:

$s_i(A)$ = soma dos elementos da i -ésima linha de A , onde $i = 1, 2, \dots, n$.

$t_j(A)$ = soma dos elementos da j -ésima coluna de A , onde $j = 1, 2, \dots, n$.

$\tau(A)$ = soma dos elementos da diagonal principal (traço) de A .

$\sigma(A)$ = soma dos elementos da diagonal secundária de A .

Então, tem-se que:

(I) As $2n + 2$ funções $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma$ são transformações lineares de \mathcal{M}_n em \mathbb{R} .

(II) As $2n$ transformações lineares $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$ são linearmente dependentes.

(III) As $2n - 1$ transformações lineares $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ são linearmente independentes.

(IV) As $2n + 1$ transformações lineares $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma$ são linearmente independentes.

Demonstração:

(I) Será mostrado que $s_i : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, é uma transformação linear. De modo análogo, se verifica que as demais funções são também transformações lineares. Note que:

- $s_i(A + B) = s_i(A) + s_i(B)$, para $A, B \in \mathcal{M}_n$.
De fato, $s_i(A + B)$ = soma dos elementos da i -ésima linha de $A + B$ = soma dos elementos da i -ésima linha de A + soma dos elementos da i -ésima linha de B = $s_i(A) + s_i(B)$.
- $s_i(k \cdot A) = k \cdot s_i(A)$, para $k \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_n$.
Com efeito, $s_i(k \cdot A)$ = soma dos elementos da i -ésima linha de $k \cdot A$ = $k \cdot$ (soma dos elementos da i -ésima linha de A) = $k \cdot s_i(A)$.

Portanto, $s_i : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, é uma transformação linear.

(II) Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, note que a soma dos elementos de A pode ser escrita como

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n s_i(A) = \sum_{j=1}^n t_j(A).$$

Assim, $s_1 + \dots + s_n + (-1)t_1 + \dots + (-1)t_n = 0$, o que garante que as $2n$ transformações lineares $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$ são linearmente dependentes.

(III) Será mostrado que a equação linear

$$x_1s_1 + \dots + x_{n-1}s_{n-1} + y_1t_1 + \dots + y_nt_n = 0$$

admite apenas a solução trivial, isto é, $x_1 = \dots = x_{n-1} = y_1 = \dots = y_n = 0$. Para isso, será utilizada a base canônica de \mathcal{M}_n formada pelas matrizes E_{ij} , cujo ij -ésimo elemento (na interseção da i -ésima linha com a j -ésima coluna) é igual a 1 e os demais elementos são iguais a zero. Aplicando a matriz E_{nj} ($j = 1, \dots, n$) à equação linear, conclui-se que $y_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$). E, assim, a equação original se reduz a

$$x_1s_1 + \dots + x_{n-1}s_{n-1} = 0.$$

Aplicando a matriz E_{i1} ($i = 1, \dots, n - 1$) à nova equação, conclui-se que $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n - 1$).

(IV) Será mostrado que a equação linear

$$x_1s_1 + \dots + x_{n-1}s_{n-1} + y_1t_1 + \dots + y_nt_n + z\tau + w\sigma = 0$$

admite apenas a solução trivial, isto é, $x_1 = \dots = x_{n-1} = y_1 = \dots = y_n = z = w = 0$. Em virtude do item (III), é suficiente provar que $z = w = 0$.

1º Caso: $n = 3$

Neste caso, tem-se a equação linear: $x_1s_1 + x_2s_2 + y_1t_1 + y_2t_2 + y_3t_3 + z\tau + w\sigma = 0$.

Aplicando E_{33} à equação original, tem-se que $y_3 + z = 0$. Em seguida, aplica-se E_{13} à nova equação para obter $z = 0$.

Aplicando E_{31} à equação original, tem-se que $y_1 + w = 0$. Em seguida, aplica-se E_{11} à nova equação para obter $w = 0$.

2º Caso: $n \geq 4$

Neste caso, considera-se a equação linear geral: $x_1s_1 + \dots + x_{n-1}s_{n-1} + y_1t_1 + \dots + y_nt_n + z\tau + w\sigma = 0$.

Considere a matriz $A = E_{11} + E_{22} - E_{12} - E_{21}$. Note que $s_i(A) = t_j(A) = \sigma(A) = 0$, para $i = 1, \dots, n - 1$ e $j = 1, \dots, n$, e $\tau(A) = 2$. Daí, aplicando A à equação linear geral, tem-se que $2z = 0 \implies z = 0$.

Com isso, a equação linear se reduz a $x_1s_1 + \dots + x_{n-1}s_{n-1} + y_1t_1 + \dots + y_nt_n + w\sigma = 0$.

Considere a matriz $B = E_{1n} + E_{2(n-1)} - E_{1(n-1)} - E_{2n}$. Note que $s_i(B) = t_j(B) = 0$, para $i = 1, \dots, n - 1$ e $j = 1, \dots, n$, e $\sigma(B) = 2$. Daí, aplicando B à equação linear reduzida, tem-se que $2w = 0 \implies w = 0$.

□

Essas $2n + 2$ funções aparecem na definição do conjunto \mathcal{Q}_n de todos os quadrados mágicos de ordem n . De fato:

$$\mathcal{Q}_n = \{A \in \mathcal{M}_n ; s_1(A) = \dots = s_n(A) = t_1(A) = \dots = t_n(A) = \tau(A) = \sigma(A)\}.$$

A título de notação, o subespaço vetorial gerado pelas matrizes $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}_n$ será denotado por $[A_1, \dots, A_m] = \{k_1 \cdot A_1 + \dots + k_m \cdot A_m ; k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}\}$. O núcleo de uma transformação linear $f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ será indicado por $N(f) = \{A \in \mathcal{M}_n ; f(A) = 0\}$. O símbolo \oplus será utilizado para denotar a soma direta entre subespaços vetoriais de \mathcal{M}_n , isto é, $V \oplus W$ indicará que o subespaço soma $V + W$ é tal que $V \cap W = \{0\}$.

Se $\mathcal{B} = \{A_1, \dots, A_{n^2}\}$ é uma base de \mathcal{M}_n , então sua base dual será denotada por $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_{n^2}\}$. Isso significa que \mathcal{B}^* é a base do espaço vetorial $\mathcal{M}_n^* = \{f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é linear}\}$ tal que $f_i(A_j) = 1$, se $i = j$, e $f_i(A_j) = 0$, se $i \neq j$. Sabe-se que toda base \mathcal{B} de \mathcal{M}_n possui uma base dual \mathcal{B}^* em \mathcal{M}_n^* , e que toda base \mathcal{B}^* de \mathcal{M}_n^* é a base dual de uma base \mathcal{B} de \mathcal{M}_n . Para uma demonstração desses fatos, veja (Lima, 2004).

Lema 4.2. *Seja $\mathcal{Q}_n = \{A \in \mathcal{M}_n ; s_1(A) = \dots = s_n(A) = t_1(A) = \dots = t_n(A) = \tau(A) = \sigma(A)\}$ o conjunto dos quadrados mágicos de ordem n , de acordo com a notação do Lema 4.1. Existem matrizes $A_1, \dots, A_{n-1}, B_1, \dots, B_n, C, D \in \mathcal{M}_n$, tais que:*

(I) *As matrizes $A_1, \dots, A_{n-1}, B_1, \dots, B_n, C, D \in \mathcal{M}_n$ são duais das transformações lineares $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma$. Isto é:*

$$\begin{aligned} s_i(A_i) &= 1, s_i(A_j) = 0, \text{ para } j \neq i, \text{ e } s_i(B_k) = s_i(C) = s_i(D) = 0 \text{ (} i = 1, \dots, n-1 \text{ e } k = 1, \dots, n). \\ t_j(B_j) &= 1, t_j(B_i) = 0, \text{ para } i \neq j, \text{ e } t_j(A_k) = t_j(C) = t_j(D) = 0 \text{ (} j = 1, \dots, n \text{ e } k = 1, \dots, n-1). \\ \tau(C) &= 1 \text{ e } \tau(A_i) = \tau(B_j) = \tau(D) = 0 \text{ (} i = 1, \dots, n-1 \text{ e } j = 1, \dots, n). \\ \sigma(D) &= 1 \text{ e } \sigma(A_i) = \sigma(B_j) = \sigma(C) = 0 \text{ (} i = 1, \dots, n-1 \text{ e } j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

(II) $\mathcal{M}_n = [A_1, \dots, A_{n-1}, B_1, \dots, B_n, C, D] \oplus \mathcal{N}$, onde \mathcal{N} é o subespaço vetorial definido pela interseção dos núcleos das transformações lineares $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma$.

(III) $\mathcal{Q}_n = [A_1 + \dots + A_{n-1} + B_1 + \dots + B_n + C + D] \oplus \mathcal{N}$, onde \mathcal{N} é o subespaço vetorial definido pela interseção dos núcleos das transformações lineares $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma$.

Demonstração:

(I) De acordo com o Lema 4.1, as $2n + 1$ transformações lineares $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma$ são linearmente independentes e, portanto, geram um subespaço vetorial de dimensão $2n + 1$ do espaço vetorial $\mathcal{M}_n^* = \{f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é linear}\}$, cuja dimensão é n^2 . Por completamento, pode-se formar uma base ordenada \mathcal{B}^* para \mathcal{M}_n^* de modo que os primeiros $2n + 1$ elementos dessa base sejam exatamente as funções $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma$, nessa ordem. De forma mais explícita, pode-se escrever $\mathcal{B}^* = \{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma, f_1, \dots, f_k\}$, onde $k = n^2 - 2n - 1$. A base \mathcal{B}^* é a dual de uma base \mathcal{B} de \mathcal{M}_n , cujos primeiros $2n + 1$ elementos serão denotados por $A_1, \dots, A_{n-1}, B_1, \dots, B_n, C$ e D . De forma mais explícita, pode-se escrever $\mathcal{B} = \{A_1, \dots, A_{n-1}, B_1, \dots, B_n, C, D, F_1, \dots, F_k\}$, onde $k = n^2 - 2n - 1$. O resultado segue da definição de base dual.

(II) Considere a base $\mathcal{B} = \{A_1, \dots, A_{n-1}, B_1, \dots, B_n, C, D, F_1, \dots, F_k\}$, de \mathcal{M}_n , e sua correspondente base dual $\mathcal{B}^* = \{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma, f_1, \dots, f_k\}$, em \mathcal{M}_n^* . É suficiente mostrar que $\mathcal{N} = [F_1, \dots, F_k]$. Note que:

• $\mathcal{N} \supset [F_1, \dots, F_k]$.

De fato, se $F \in [F_1, \dots, F_k]$, então existem $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ tais que $F = x_1 \cdot F_1 + \dots + x_k \cdot F_k$. Pela definição de base dual, tem-se que $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{N}$, logo $F \in \mathcal{N}$.

• $\mathcal{N} \subset [F_1, \dots, F_k]$.

Com efeito, se $F \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}_n$, então existem $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_n, c, d, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$F = a_1 \cdot A_1 + \dots + a_{n-1} \cdot A_{n-1} + b_1 \cdot B_1 + \dots + b_n \cdot B_n + c \cdot C + d \cdot D + x_1 \cdot F_1 + \dots + x_k \cdot F_k.$$

Aplicando s_i a esta igualdade, conclui-se que $0 = s_i(F) = a_i$, para $i = 1, \dots, n-1$. Aplicando t_j a esta igualdade, conclui-se que $0 = t_j(F) = b_j$, para $j = 1, \dots, n$. Aplicando τ e σ a esta igualdade, conclui-se que $0 = \tau(F) = c$ e $0 = \sigma(F) = d$. Assim, $F = x_1 \cdot F_1 + \dots + x_k \cdot F_k$ e, portanto, $F \in [F_1, \dots, F_k]$.

(III) Considere a base $\mathcal{B} = \{A_1, \dots, A_{n-1}, B_1, \dots, B_n, C, D, F_1, \dots, F_k\}$, de \mathcal{M}_n , e sua correspondente base dual $\mathcal{B}^* = \{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma, f_1, \dots, f_k\}$, em \mathcal{M}_n^* . Foi visto em (II) que $\mathcal{N} = [F_1, \dots, F_k]$. Então, basta provar que o conjunto

$$\mathcal{V} = \{A_1 + \dots + A_{n-1} + B_1 + \dots + B_n + C + D, F_1, \dots, F_k\}$$

é uma base de \mathcal{Q}_n . Note que:

- \mathcal{V} é linearmente independente.

De fato, considere a combinação linear $y \cdot (A_1 + \dots + A_{n-1} + B_1 + \dots + B_n + C + D) + x_1 \cdot F_1 + \dots + x_n \cdot F_k = 0$. Aplicando f_i a esta igualdade, conclui-se que $x_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$. Assim, $y \cdot (A_1 + \dots + A_{n-1} + B_1 + \dots + B_n + C + D) = 0$ e, visto que $A_1, \dots, A_{n-1}, B_1, \dots, B_n, C, D$ são linearmente independentes, conclui-se que $y = 0$.

- \mathcal{V} gera o espaço vetorial \mathcal{Q}_n .

Com efeito, se $F \in \mathcal{Q}_n \subset \mathcal{M}_n$, então existem $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_n, c, d, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$F = a_1 \cdot A_1 + \dots + a_{n-1} \cdot A_{n-1} + b_1 \cdot B_1 + \dots + b_n \cdot B_n + c \cdot C + d \cdot D + x_1 \cdot F_1 + \dots + x_n \cdot F_k.$$

Aplicando s_i a esta igualdade, tem-se que $s_i(F) = a_i$, para $i = 1, \dots, n-1$. Aplicando t_j a esta igualdade, tem-se que $t_j(F) = b_j$, para $j = 1, \dots, n$. Aplicando τ e σ a esta igualdade, tem-se que $\tau(F) = c$ e $\sigma(F) = d$. Sendo $F \in \mathcal{Q}_n$, conclui-se que $a_1 = \dots = a_{n-1} = b_1 = \dots = b_n = c = d := x$ e, portanto,

$$F = x \cdot (A_1 + \dots + A_{n-1} + B_1 + \dots + B_n + C + D) + x_1 \cdot F_1 + \dots + x_n \cdot F_k.$$

□

Teorema 4.1. *Seja $n \geq 3$ inteiro. O espaço vetorial \mathcal{Q}_n dos quadrados mágicos de ordem n tem dimensão $n^2 - 2n$.*

Demonstração: Utilizando os itens (II) e (III) da Proposição 4.2, conclui-se que

$$\dim \mathcal{Q}_n = 1 + \dim \mathcal{N} = 1 + [n^2 - (2n + 1)] = n^2 - 2n.$$

□

A seguir, será feita uma aplicação desse resultado para descrever explicitamente o espaço vetorial \mathcal{Q}_4 .

4.3 Uma base para \mathcal{Q}_4 e aplicações

Foi visto que, para $n \geq 3$, $\dim \mathcal{Q}_n = n^2 - 2n$. Em particular, fazendo $n = 4$, tem-se que $\dim \mathcal{Q}_4 = 8$.

Portanto, toda base de \mathcal{Q}_4 possui 8 elementos. Para determinar uma base de \mathcal{Q}_4 , é suficiente encontrar 8 quadrados mágicos 4×4 linearmente independentes.

Considere os 8 quadrados mágicos a seguir, construídos com os números 0 e 1:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & H &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que os quadrados mágicos A, B, C, D, E, F e G têm constante mágica 1, ao passo que o quadrado mágico H tem constante mágica 2.

Para mostrar que estes 8 quadrados mágicos 4×4 são linearmente independentes, basta verificar que a equação linear

$$x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 D + x_5 E + x_6 F + x_7 G + x_8 H = 0$$

admite apenas a solução trivial, isto é $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$.

Veja que essa igualdade de matrizes produz o seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_8 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_8 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 + x_7 = 0 \\ x_5 + x_6 + x_8 = 0 \\ x_7 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_8 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_7 = 0 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 0 \\ x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_8 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_7 + x_8 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_8 = 0. \end{array} \right.$$

Daí, $x_4 = x_5 = x_7 = 0$ e o sistema acima se reduz a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_8 = 0 \\ x_3 + x_8 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_6 + x_8 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_8 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 + x_8 = 0 \\ x_1 + x_8 = 0 \\ x_1 + x_6 = 0. \end{array} \right.$$

Logo, $x_2 = x_3 = x_6 = 0$ e o sistema fica reduzido a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_8 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_8 = 0. \end{array} \right.$$

Isso implica que o sistema linear admite apenas a solução trivial.

Portanto, os quadrados mágicos A, B, C, D, E, F, G e H formam uma base para o espaço vetorial \mathcal{Q}_4 . Assim, todo quadrado mágico 4×4 se escreve, de modo único, como combinação linear dessas 8 matrizes.

Em particular, os quadrados mágicos vistos na gravura *Melancolia* e na cena *O Beijo de Judas* podem ser escritos, de modo único, como combinação linear dessas 8 matrizes.

Seja M o quadrado mágico visto na gravura *Melancolia*, isto é,

$$M = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escrever M como combinação linear das matrizes A, B, C, D, E, F, G e H , significa resolver o sistema

$$M = x_1A + x_2B + x_3C + x_4D + x_5E + x_6F + x_7G + x_8H.$$

Tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_8 = 16 \\ x_3 + x_4 + x_8 = 3 \\ x_5 = 2 \\ x_6 + x_7 = 13 \\ x_5 + x_6 + x_8 = 5 \\ x_7 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_8 = 11 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_3 + x_7 = 9 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 6 \\ x_4 + x_6 = 7 \\ x_1 + x_8 = 12 \\ x_4 = 4 \\ x_1 + x_6 = 15 \\ x_2 + x_7 + x_8 = 14 \\ x_3 + x_5 + x_8 = 1. \end{array} \right.$$

Daí, $x_1 = 12, x_2 = 4, x_3 = -1, x_4 = 4, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = 10, x_8 = 0$. Portanto,

$$M = 12A + 4B + (-1)C + 4D + 2E + 3F + 10G.$$

Seja J o quadrado mágico visto na cena *O Beijo de Judas*, isto é,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga, escrever J como combinação linear das matrizes A, B, C, D, E, F, G e H , significa resolver o sistema

$$J = x_1A + x_2B + x_3C + x_4D + x_5E + x_6F + x_7G + x_8H.$$

Tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_8 & = & 1 \\ x_3 + x_4 + x_8 & = & 14 \\ & & x_5 = 14 \\ & & x_6 + x_7 = 4 \\ x_5 + x_6 + x_8 & = & 11 \\ & & x_7 = 7 \\ x_1 + x_3 + x_8 & = & 6 \\ & & x_2 + x_4 = 9 \\ & & x_3 + x_7 = 8 \\ x_2 + x_5 + x_8 & = & 10 \\ & & x_4 + x_6 = 10 \\ & & x_1 + x_8 = 5 \\ & & x_4 = 13 \\ & & x_1 + x_6 = 2 \\ x_2 + x_7 + x_8 & = & 3 \\ x_3 + x_5 + x_8 & = & 15. \end{array} \right.$$

Daí, $x_1 = 5, x_2 = -4, x_3 = 1, x_4 = 13, x_5 = 14, x_6 = -3, x_7 = 7, x_8 = 0$. Portanto,

$$J = 5A + (-4)B + C + 13D + 14E + (-3)F + 7G.$$

Coincidentemente, os quadrados mágicos M e J não têm componente na direção H , pois $x_8 = 0$ nos dois casos. Isso significa que M e J pertencem ao subespaço vetorial gerado pelos quadrados mágicos A, B, C, D, E, F e G , um subespaço de dimensão 7 do espaço vetorial \mathcal{Q}_4 de dimensão 8.

A análise dessa base de \mathcal{Q}_4 , inserida no contexto da Álgebra Linear, fornece uma ligação entre a história dos quadrados mágicos e a resolução de sistemas lineares em nível de Ensino Médio.

5 Quadrados Mágicos em Sala de Aula

O objetivo desta seção é indicar como os professores do Ensino Médio e do Ensino Superior podem utilizar esse material para incentivar seus alunos a estudar matrizes e sistemas lineares. Na seção 1, de introdução ao artigo, foram mencionadas várias motivações para o estudo de matrizes e sistemas lineares. Dentre elas, foram destacados os quadrados mágicos. Tais motivações podem ser citadas para os alunos, antes mesmo de se apresentar uma definição formal de matriz e de se trabalhar métodos de resolução de sistemas lineares. Isso pode despertar o interesse do aluno para o conteúdo abordado em sala de aula e pode realçar a importância das definições e propriedades que serão apresentadas posteriormente.

A abordagem tradicional tende a trilhar um caminho diametralmente oposto a esse, onde as definições, propriedades e teoremas aparecem antes das motivações e das aplicações práticas do conteúdo. Quando se opta por esse caminho, as motivações e aplicações podem ficar relegadas a exemplos, contra-exemplos e casos particulares, como se o objetivo principal das aplicações fosse apenas ilustrar tópicos de uma teoria geral. Essa abordagem tradicional, de acordo com (Kraieski, 1999), costuma desmotivar os alunos, pois, em geral, eles têm dificuldade de compreender definições e propriedades abstratas. E, sem ver a inserção do conteúdo em seu cotidiano, os alunos tendem a perder o interesse pelo assunto abordado pelo professor.

5.1 Quadrados mágicos nas aulas de Ensino Médio

O professor de Matemática do Ensino Médio, em sua primeira aula sobre matrizes, pode utilizar a seção 2 deste artigo para destacar as curiosidades encontradas nos três quadrados mágicos históricos descritos, o quadrado mágico *lo-shu*, o quadrado mágico da gravura *Melancolia* e o quadrado mágico da cena *O Beijo de Judas*. O professor pode procurar saber o que os alunos pensam sobre a lenda chinesa por trás do primeiro quadrado mágico de que se tem registro. Pode também comentar um pouco da história dos artistas Albrecht Dürer e Antoni Gaudí.

A seção 3 deste artigo pode ser utilizada pelo professor do Ensino Médio para apresentar a definição formal de quadrado mágico e de constante mágica. Para fixar as definições e as notações, ele pode verificar que os exemplos históricos discutidos anteriormente se enquadram na definição de quadrado mágico. Esta seção também pode ser utilizada para trabalhar os métodos de resolução de sistemas lineares. Por exemplo, o professor pode classificar os quadrados mágicos de ordem 2 resolvendo o sistema linear que aparece na Proposição 3.2, tanto pelo método da substituição quanto pelo método do escalonamento.

A seção 4 deste artigo também pode ser utilizada pelo professor de Matemática do Ensino Médio. Embora não faça uso da linguagem formal da Álgebra Linear com seus alunos, o professor pode trabalhar as operações básicas de soma de matrizes e multiplicação de número por matriz, por mostrar como produzir novos quadrados mágicos a partir de quadrados mágicos conhecidos e de tais operações básicas. Assim, de maneira informal, a Proposição 4.1 pode ser abordada com os alunos do Ensino Médio. A subseção 4.3 pode ser utilizada para apresentar outros exemplos de sistemas lineares e discutir os métodos de resolução de tais sistemas.

5.2 Quadrados mágicos nas aulas de Ensino Superior

O professor de Matemática do Ensino Superior também pode utilizar esse artigo, tanto em nível de graduação quanto em nível de mestrado profissional. A seção 2 deste artigo pode ser trabalhada em uma aula de História da Matemática. As seções 3 e 4 estão mais voltadas para as aulas de Álgebra Linear. O professor pode utilizar a seção 3 para apresentar a definição de quadrado mágico e fazer a classificação dos quadrados mágicos de ordem 1, 2 e 3. A seção 4 pode ser utilizada para mostrar como os quadrados mágicos fornecem exemplos interessantes de espaços vetoriais e de transformações lineares.

6 Conclusões

Algo que dificulta o ensino e a aprendizagem da Matemática nos mais variados níveis é a apresentação de conceitos, definições e teorias sem a devida motivação, contextualização e inserção do conteúdo no cotidiano das pessoas. Com os avanços científicos e tecnológicos, é cada vez mais comum ver os alunos questionando se aquele assunto que está sendo visto em sala de aula tem aplicação e utilidade na prática.

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de contribuir para o ensino e aprendizagem de matrizes e sistemas lineares, tendo como foco os quadrados mágicos. Além disso, a ideia é mostrar que o surgimento lendário dos quadrados mágicos, bem como sua utilização por artistas ao longo dos séculos, pode ser uma fonte de motivação para o estudo de matrizes e sistemas lineares e, também, para a inserção do tema no cotidiano das pessoas. Com a linguagem da Álgebra Linear, pretende-se apresentar uma fundamentação teórica para os quadrados mágicos, mostrar os formalismos matemáticos por trás do assunto e fazer a ligação entre a teoria e a prática.

Referências

- Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., Wetzler, H. G. (1986). *Álgebra Linear*. Harba.
- Boyer, C. B., Merzbach, U. C. (2012). *História da Matemática*. Blucher.
- Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP.
- Kraieski, P. (1999). Abordagem de matrizes no ensino médio: Uma avaliação crítica através dos livros didáticos, com sugestões de aplicações. *Monografia de Graduação UFSC*.
- Lima, E. L. (2004). *Álgebra Linear*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, vol 3. SBM.
- Poole, D. (2004). *Álgebra Linear*. Thomson.

Marcelo Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará, Ceará, Brasil
E-mail: celo@mat.ufc.br

Participação do autor:
Escrita e revisão do artigo

José Samuel Machado

Escola Municipal Edilson Brasil Soares
E-mail: jose.samuel@professor.sme.fortaleza.ce.gov.br

Participação do autor:
Escrita e revisão do artigo