Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

O Princípio de Cavalieri e Aplicações com o uso de Material Manipulável

Andréa Maria Mano Amazonas

Salvador - Bahia
Abril - 2013

O Princípio de Cavalieri e Aplicações com o uso de Material Manipulável

Andrea Maria Mano Amazonas

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^{a}. Dr^{a}. Rita de Cassia de Jesus Silva

Salvador - Bahia

Abril - 2013

O Princípio de Cavalieri e Aplicações com o uso de Material Manipulável

Andréa Maria Mano Amazonas

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Rita de Cássia de Jesus Silva

Prof^a. Dr^a. Rita de Cássia de Jesus Silva (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes
UFBA

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves
UESC

A meus queridos alunos

Agradecimentos

A meus filhos, André e Archimedes, por acreditarem tanto em mim.

A Archimedes, companheiro de tanto tempo.

A Rita, minha professora tantas vezes, orientadora e grande parceira neste trabalho.

A professora Elinalva Vasconcelos, pelo carinho, dedicação e cuidado na construção dos modelos e cadastros do LEMA.

Aos amigos do PROFMAT, por tornarem os sábados de estudo, durante estes dois anos passado juntos, dias divertidos e agradáveis.

Aos amigos de Santo Amaro, por todo o apoio nas infindáveis horas de estudo.

Aos queridos alunos da turma do 3º ano de Eletromecânica, que tanto contribuíram para este trabalho.

A todos os professores do PROFMAT – UFBA, pela dedicação e pelas contribuições.

"No futuro, como no passado, as grandes ideias devem ser ideias simplificadoras".

André Weil

Resumo

O presente trabalho apresenta o Princípio de Cavalieri e propõe aplicações deste princípio, para cálculo de volume, com o uso de modelos manipuláveis do acervo do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Federal da Bahia. As aplicações propostas especificam um roteiro detalhado da utilização de materiais manipuláveis visando um melhor entendimento para fórmulas de volumes de cilindros, prismas, pirâmides, cones e esferas. As atividades sugeridas foram aplicadas em uma turma da 3º série ensino médio. e são relatadas ao final do trabalho.

Abstract

This paper introduces the principle of Cavalieri and proposes applications of this principle for volume calculation, using manipulative models of the collection of the Laboratory of Mathematics, Federal University of Bahia. The applications are proposed for calculating volumes of cylinders, prisms, pyramids, cones and spheres and bring a detailed roadmap for the use of these models in the classroom. Suggested activities were implemented in a class of 3rd series school. The account of the applications and the opinion of some students finish the paper.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nas séries iniciais do curso fundamental, os conteúdos de Matemática muitas vezes são apresentados de forma lúdica, com o uso de materiais didáticos concretos e aplicações voltadas para situações que surgem na rotina dos estudantes. Nos anos seguintes, o uso de materiais manipuláveis é sensivelmente reduzido e o que mais comumente se vê, nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio, são aulas de Matemática expositivas onde o professor apresenta o conteúdo para seus alunos e depois propõe a resolução de exercícios. Esta prática faz do estudante, na maioria dos casos, um simples repetidor do método de resolução usado pelo professor, aplicando regras e procedimentos sem questionamentos e desprezando sua criatividade e sua intuição para formular outras resoluções igualmente válidas.

Segundo Lima [6] uma atitude passiva leva a um conhecimento incompleto; é preciso questionar, indagar, procurar seus próprios caminhos, exercitar a mente.

Ao atingir o ensino médio os estudantes já devem dominar abstratamente muitos conceitos matemáticos. Entretanto, neste nível surgem novos conteúdos como trigonometria, geometria espacial e analítica, análise combinatória e outros, que podem ser mais facilmente fixados com a prática do uso de modelos matemáticos manipuláveis.

O estudo se tornará mais interessante e o aprendizado mais efetivo se o estudante for incentivado a fazer suas próprias deduções e chegar a conclusões através de uma ação sobre o objeto do seu aprendizado.

O uso de materiais manipuláveis pode ser enriquecedor no processo de ensino aprendizagem da matemática. Rêgo e Rêgo [2] ressaltam que, através de experiências bem sucedidas, o estudante desenvolve o gosto pela descoberta e por enfrentar e vencer desafios. É também interessante que, se for possível, o estudante participe da construção do material didático a ser utilizado, pois durante a construção surgirão questionamentos que poderão contribuir para uma aprendizagem mais efetiva. Segundo Fiorentini [4], em muitos momentos, o mais importante não será o modelo mas a discussão provocada pelo seu uso .

Com a ampliação do acesso às novas tecnologias, em particular no ensino da Geometria, os professores passaram a contar com recursos computacionais como sendo mais um instrumento didático. Os softwares de construções geométricas e simulações tridimensionais surgem então como um novo recurso para o ensino, porém, por mais sofisticados que sejam, estes recursos nos trazem apenas representações planas na tela do computador e por isso não conseguem substituir a utilização dos modelos manipuláveis.

Observa-se, entretanto que a simples manipulação de um modelo matemático não é suficiente para atingir os objetivos educacionais. É necessário que as atividades sejam orientadas pelos professores, e para isso é indispensável um planejamento das ações e uma clara definição dos objetivos a serem alcançados. Além disso, esta prática requer do docente um estudo aprofundado do conteúdo a ser ensinado.

Em seus estudos, Serrazina [11] ressalta que o professor será o responsável por este planejamento e pela definição dos objetivos que pretende alcançar e observa que, quando a ação pedagógica não é bem planejada e não atinge os objetivos, a experiência pode ser frustrante para professor e estudante.

Muitos cursos de Licenciatura em Matemática já tem em seu curriculo o uso do Laboratório de Ensino da Matemática na formação do docente, com matérias obrigatórias incluídas no currículo e estágio curricular com aplicações práticas. Apesar disso, poucos são os professores que realmente aplicam em suas aulas as técnicas aprendidas no ensino superior, seja porque a maioria das escolas de ensino médio não dispõe de um laboratório de Matemática ou de materiais didáticos manipuláveis ou pela comodidade de apresentar suas aulas nos padrões previamente testados pois estas não precisarão de tanto cuidado no planejamento.

Neste trabalho será realizado um breve histórico sobre o Princípio de Cavalieri e suas aplicações em cálculo de volumes e em seguida serão propostos procedimentos sistematizados de aplicações deste princípio para o cálculo dos volumes de cilindros, prismas, pirâmides, cones e esferas, utilizando para isto modelos matemáticos do Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística - LEMA, da Universidade Federal da Bahia.

O exemplo de atividade proposto foi aplicado em aulas para uma turma do 3º ano do ensino médio do Instituo Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, campus Santo Amaro. Um relato desta atividade e a impressão dos estudantes em relação aos resultados alcançados são apresentados no capítulo 4. O Capítulo 5 conclue o presente trabalho através da análise dos resultados alcançados com a aplicação de materiais manipuláveis.

1.1 O Princípio de Cavalieri

Figura 1.1: Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nasceu em 1598 em Milão. Foi professor de Matemática na Universidade de Bolonha de 1629 até sua morte em 1647. Foi um matemático influente e deixou uma vasta obra sendo a de maior destaque o tratado *Geometria indivisibilibus* publicado em 1635, obra na qual ele desenvolve o seu *método dos indivisíveis.* De acordo com Howard Eves [3], apesar do tratado de Cavalieri ser prolixo e pouco claro, tudo indica que para Cavalieri um indivisível de uma porção plana é uma corda dessa porção e considera-se que uma porção plana é formada por uma infinidade de cordas paralelas. Fazendo deslizar cada uma das cordas da porção dada, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, podemos afirmar que a area da nova porção plana é igual a da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Seguindo raciocínio análogo, um indivisível de um sólido é uma seção plana deste sólido e fazendo deslizar cada uma destas seções, de modo que o novo sólido formado ainda tenha nas laterais superfícies contínuas, os dois sólidos terão então o mesmo volume, uma vez que ambos são formados pelas mesmas seções.

Podemos enunciar o princípio de Cavalieri separadamente para o cálculo de areas e de volumes. Em um artigo publicado na Revista do Professor de Matématica, n^o 72 Paterlini [9] apresenta o princípio enunciado da seguinte forma:

- *Princípio de Cavalieri para cálculo de areas*: Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as areas de R eS é essa constante.

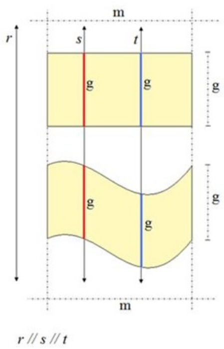


Figura 1.2: Princípio de Cavalieri para cálculo de area

- *Princípio de Cavalieri para cáculo de volumes*: Sejam A e B sólidos limitados, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α , as interseções de A e B com β sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas areas é constante. Então a razão entre os volumes de A e B é essa constante.

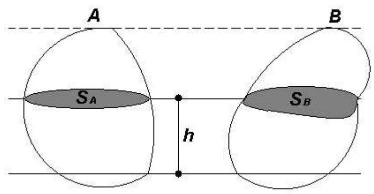


Figura 1.3: Princípio de Cavalieri para cálculo de volumes

É importante observar que o Princípio de Cavalieri, normalmente apresentado como um postulado no ensino médio, é um teorema que pode ser demonstrado pela teoria de integrações de funções reais estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

No ensino médio, o estudo de volumes de sólidos utiliza o Princípio de Cavalieri comparando sólidos em que a razão entre as areas das seções é igual a 1, logo as areas das seções serão iguais e portanto o enunciados do Princípio de Cavalieri comumente encontrados nos livros didáticos são mais simples.

Dante [1], por exemplo, apresenta na introdução ao cálculo de volumes de sólidos geométricos o seguinte enunciado para o Princípio de Cavalieri:

"Vamos considerar os sólidos, S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α. Consideremos também o plano β, paralelos a α que, ao seccionar S_1 também secciona S_2, determinando duas regiões planas de areas A_1 e A_2. Nestas condições podemos afirmar que, se para todo plano β temos $A_1 = A_2$ então *volume de* S_1 = *volume de* S_2"

Um enunciado do Princípio de Cavalieri ainda mais simples é o apresentado como axioma por Lima [7]:

”São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma area, então estes sólidos tem o mesmo volume.”

Capítulo 2

O Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística - LEMA / UFBA

2.1 Apresentação

O Laboratório de Ensino da Matemática e Estatística da UFBA nasceu e se desenvolveu para atender às necessidades do ensino de Matemática na própria UFBA. Inicialmente os professores desenvolviam informalmente modelos simples, para utilizar em suas aulas e, a partir de 1993, alguns professores do Departamento de Matemática inseriram a construção de modelos concretos como atividades e cursos para aprefeiçoamento de professores do ensino médio, dentro de projetos como Projeto Vitae - IMPA, Projeto Laboratório de Ensino de Física e Matemática - PROGRAD/94 e Projeto Revitalização das Licenciaturas da UFBA - PROLICEN/95.

Em 1996 o Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA foi instalado em uma sala do Instituto de Matemática e foi constituída uma equipe de professores que passaram a se dedicar às atividades do Laboratório com oficinas, projetos de monitoria, seminários, cursos de utilização de softwares para o ensino de Matemática e cursos de extensão para professores do ensino básico, entre outras.

Apesar de contar com poucos recursos financeiros, a equipe do LEMA - UFBA conseguiu construir um acervo com aproximadamente 160 modelos manipuláveis direcionados para o ensino básico e superior. Estes modelos são peças artesanais, muitas vezes construídos com material reciclado, sucata, isopor e canudinhos ou material emborrachado. Há também modelos de superfícies que utilizam a técnica de Papietã e são construidos com auxílio de recursos de computação. Desta forma a elaboração dos modelos é econômica e acessível, mas sempre preocupada com o rigor matemático e a precisão necessários para que as representações cumpram seu papel didático de facilitar o aprendizado da Matemática. Quando solicitados estes modelos são disponibilizados pelo LEMA, por empréstimo, para professores do ensino básico que queiram utilizá-los em suas aulas.

Figura 2.1: LEMA - UFBA

Gradualmente, as atividades do laboratório foram se inserindo nas disciplinas dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da UFBA e os modelos direcionados para o ensino superior são utilizados constantemente por professores nas aulas de Matemática nos cursos de Ciências Exatas da UFBA. Atualmente fazem parte da matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFBA dois componentes curriculares obrigatórios, Laboratório de Ensino de Matemática I e II , ampliando o uso de modelos concretos como recurso didático para o ensino de Matemática.

O LEMA realiza diversas exposições, não só nos eventos do Instituto de Matemática da UFBA como também em eventos de muitas outras universidades do Brasil e encontros, seminários e congressos de areas correlacionadas. Segundo Vasconcelos [12], várias destas exposições não se restringem à comunidade matemática e atingem o público em geral, surgindo daí uma oportunidade de divulgação do conhecimento matemático de forma lúdica e atraente.

A partir da necessidade de formalizar um texto para orientação e construção de modelos, com rigor e precisão necessários para a representação de objetos Matemáticos, foram publicados os livros "SUPERFÍCIES ISOMÉTRICAS AO PLANO - Constução de modelos concretos com cilindros e cones" e "SÓLIDOS E SUPERFÍCIES - Construção de modelos concretos" , com financiamento do CNPQ e trazem além da teoria, moldes para construção e exercícios como aplicação destes modelos. Além disso estes dois volumes podem ser de grande utilidade para atividades de alunos em curso de licenciatura com o objetivo de ampliar o uso de modelos manipuláveis no ensino de Matemática.

Capítulo 3

Proposta de atividades utilizando materiais manipuláveis

3.1 Introdução

A noção intuitiva de volume de um sólido é a quantidade do espaço ocupado por este sólido. Sempre que queremos efetuar uma medida, definimos uma unidade e fazemos comparações. No caso do cálculo de volume, a unidade utilizada é o cubo unitário, cuja aresta mede uma unidade de comprimento. Intuitivamente, o volume de um sólido é aproximadamente a soma dos volumes dos cubos unitários que estão contidos neste sólido. Para o cálculo mais preciso de volume, utiliza-se o cálculo integral mas este estudo é desenvolvido no nível superior, não sendo aplicado no ensino básico.

Neste trabalho está pressuposto que são conhecidos cálculos de volumes elementares a exemplo do volume de um cubo e do volume de um bloco retangular, estudados no ensino fundamental e serão base para os cáculos de volumes que faremos utilizando o Princípio de Cavalieri. A seguir serão descritas as atividades sugeridas com utilização de modelos manipuláveis do LEMA / UFBA. Cada atividade tem seu objetivo e uma série de procedimentos sugeridos com a finalidade de deduzir as fórmulas dos volumes de cada sólido apresentado. A intenção é sugerir um roteiro, mas cada professor deve fazer as adaptações necessárias para suas aplicações, criando perguntas e complementando as atividades com as ações que achar pertinentes. Além disso, como o processo é dinâmico, sempre haverá intervenção dos estudantes tornando cada aplicação única.

3.2 O Princípio de Cavalieri

Como já foi citado, o Princípio de Cavalieri permite calcular o volume de sólidos geométricos. Por este motivo, o primeiro modelo a ser estudado ilustra o Princípio de Cavalieri, que dará subsídios para as demais aplicações.

- Objetivo

  Ao final desta atividade os estudantes deverão compreender o Princípio de Cavalieri e enunciá-lo com suas próprias palavras de maneira a mostrar que compreenderam o princípio de forma geral.

- Procedimentos

  - Apresentar modelos de dois sólidos de mesma altura, com seções paralelas diferentes e areas iguais.
  - Propor o problema: Qual a relação entre os volumes destes dois sólidos?

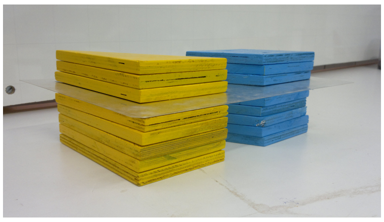


Figura 3.1: Modelo: Princípio de Cavalieri

  - Através de perguntas, levar o estudante a concluir que o volume do sólido será a soma dos volumes das seções paralelas.
  - Mostrar que quanto mais seções fizermos no sólido menor será a altura de cada seção, podendo-se fazer tantas seções quanto se queira.
  - Concluir que o volume de cada seção se aproxima numericamente da area da referida seção, quando a altura da mesma é bem pequena.
  - Citar que, para o cálculo de volume de figuras cujas seções são de tamanho e formas variadas usa-se o cálculo integral, porém explicitando que este é um assunto estudado no ensino superior.
  - Calcular o volume de cada sólido como a soma das areas das respectivas seções e concluir que, apesar de diferentes, os sólidos tem o mesmo volume.
  - Apresentar o modelo de cilindro reto e cilindro obliquo

Figura 3.2: Modelo: cilndros retos e oliquo com seções de mesma altura

- Através de perguntas, concluir que os volumes dos dois sólidos de mesma altura são iguais pois as seções paralelas ao plano das bases são iguais.
- Concluir e enunciar o Princípio de Cavalieri.

3.3 Cálculo do volume do cilindro

Definamos inicialmente o que entendemos por cilindro.

Seja F uma figura plana, chamada *base* do cilindro e um segmento de reta g, chamado *geratriz* não paralelo ao plano que contém a base. Por cada ponto de F levantamos um segmento de reta paralelo a g, com o mesmo comprimento de g. A reunião desses segmentos é um *cilindro* de base F e geratriz g. O cilindro é dito reto no caso em que a geratriz g é perpendicular à sua base.

- Objetivo

  Ao final desta atividade os estudantes deverão concluir como deve ser calculado o volume de um cilindro, usando o Princípio de Cavalieri.

- Procedimentos para calcular o volume do cilindro

  - Apresentar o modelo de um cilindro de altura h, cuja base tem area igual a a

Figura 3.3: Modelo: cilindro com seção paralela à base

  - Propor o problema: como calcular o volume deste sólido?

- Apresentar o modelo de um bloco retangular de altura h, cuja area da base seja igual a a

Figura 3.4: Modelo: bloco retangular com seção paralela

- Justificar a escolha do bloco retangular cuja area da base e altura são iguais à base e à altura do cilindro, a fim de aplicar o Princípio de Cavalieri.
- Deduzir a fórmula de cálculo do volume do cilindro.

$$V = \text{area da base} \times \text{ altura} \quad \Longleftrightarrow \quad V = ah$$

3.4 Cálculo do volume do prisma

Um cilindro cuja base é um polígono é denominado prisma.

Em particular o bloco retangular ou paralelepípedo retângulo é um prisma de base retangular e qualquer uma de suas faces considerada como base.

- Objetivo

  Ao final desta atividade os estudantes deverão concluir como deve ser calculado o volume de um prisma de base poligonal, usando o Princípio de Cavalieri.

- Procedimentos para calcular o volume do prisma

  - Apresentar o modelo de um prisma de altura h e area da base igual a a e propor o problema: Como calcular o volume deste prisma?

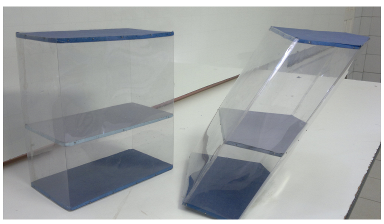


Figura 3.5: Modelo: prismas com seções paralelas

- Observar que todo polígono pode ser representado por uma união de triângulos e portanto sua area será a soma das areas destes triângulos.
- Calcular a area da base do modelo apresentado.
- Apresentar um modelo de bloco regular de altura h e area da base igual a a
- Concluir pelo princípio de Cavalieri que, apesar de diferentes, os sólidos tem o mesmo volume.
- Deduzir a fórmula para o cálculo de volume de prisma

$$V = \text{area da base} \times \text{ altura} \quad \Longleftrightarrow \quad V = ah$$

.

- Apresentar vários modelos de prismas cujas bases sejam polígonos diferentes e calcular os seus volumes.

3.5 Cálculo do volume da pirâmide

A seguir definiremos pirâmide.

Seja P um polígono, chamado base da pirâmide e um ponto V, chamado vértice da pirâmide, localizado fora do plano que contém a base. A reunião de todos os segmentos de reta que ligam V a todos os pontos de P é uma pirâmide de base P e vértice V.

Uma pirâmide é chamada quadrangular, triangular, pentagonal, etc., de acordo com o polígono de sua base.

- Objetivo

  Ao final desta atividade, os estudantes deverão concluir como deve ser calculado o volume de uma pirâmide de base poligonal, utilizando o Princípio de Cavalieri.

- Procedimentos para calcular o volume da pirâmide

  - Apresentar o modelo de uma pirâmide triângular e propor o problema: como calcular o volume de uma pirâmide.
  - Considerar duas pirâmides, apoiadas sobre um plano horizontal, cujas areas das bases são iguais e que têm as mesmas alturas.

    Por propriedades de pirâmide temos $\dfrac{\text{area de A'}}{\text{area de A}} = \dfrac{\text{area de B'}}{\text{area de B}}$

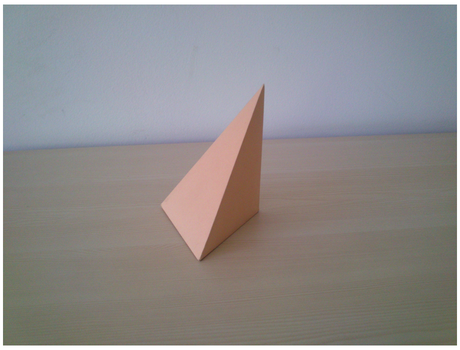


Figura 3.6: Modelo: Pirâmide de base triangular

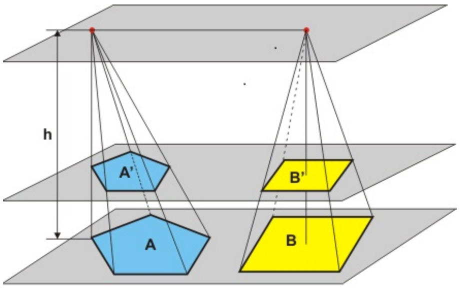


Figura 3.7: Pirâmides com seções de mesma area

Como a area de A é igual a area de B então area de A' é igual a area de B' para todo plano horizontal paralelo ao plano que contém as bases.
Assim, pelo Princípio de Cavalieri, temos que os volumes das pirâmides são iguais e portanto pirâmides com areas das bases iguais e com a mesma altura têm volumes iguais.

– Apresentar o modelo do prisma triângular e propor o problema: qual a relação entre o prisma triângular e a pirâmide triangular?

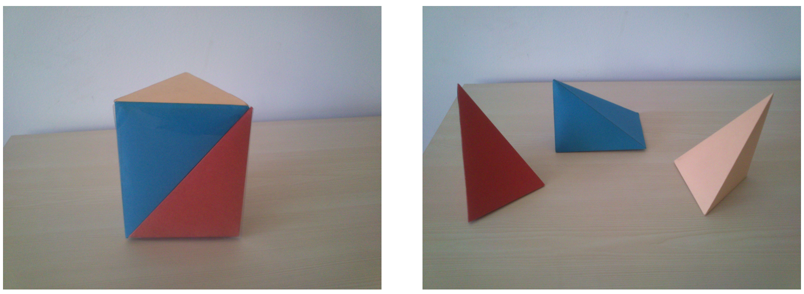


Figura 3.8: Modelo: Prisma formado por três pirâmides de base triângular

– Utilizando o modelo exposto, mostrar que o prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides triagulares.

– Destacar que este sólido é uma pirâmide onde qualquer uma das faces pode ser considerada base. Aqui utilizaremos uma representação gráfica do modelo para explicitar os vértices, as bases e as alturas de cada uma das três pirâmides que deverão ser mostrados nos modelos concretos.

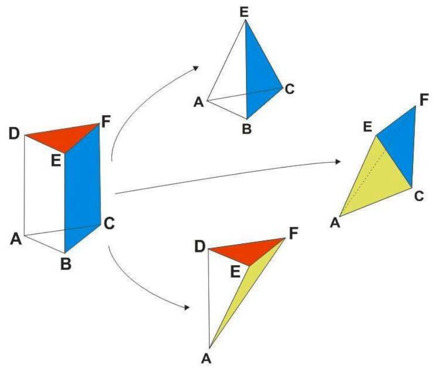


Figura 3.9: Decomposição do prisma em três pirâmides

As pirâmides serão representadas da seguinte maneira: A_DEF é a pirâmide de vértice A e base DEF.
Assim sendo, comparando as pirâmides A_DEF e E_ABC observamos que ambas têm alturas iguais a aresta do prisma e suas bases são triângulos congruentes, pois são as bases do prisma decomposto. Comparando agora as pirâmides D_AEF e C_AEF notamos que suas alturas e suas bases são iguais.

Como pirâmides com areas das bases e alturas iguais têm os mesmos volumes, podemos concluir que

$$V(A\_DEF) = V(E\_ABC) \quad \text{e} \quad V(D\_AEF) = V(C\_AEF)$$

como D_AEF e A_DEF representam a mesma pirâmide temos

$$V(A\_DEF) + V(E\_ABC) + V(C\_AEF) = \text{volume do prisma}$$

donde

$$\text{volume da pirâmide} = \frac{\text{volume do prisma}}{3}$$

– Apresentar o modelo de uma pirâmide de base poligonal

– Generalizar o resultado para qualquer pirâmide de base poligonal destacando que todo polígono pode ser dividido em triângulos e portanto a area do polígono

Figura 3.10: Modelo - Pirâmide de base pentagonal

da base da pirâmide será a soma das areas dos triângulos. Por outro lado toda pirâmide de base poligonal pode ser dividida em pirâmides de base triângular de mesma altura e portanto o volume de uma pirâmide de base poligonal será a soma dos volumes das pirâmides de base triângular.

- Concluir que o volume de qualquer pirâmide é dado por

$$V = \frac{\text{area da base} \times \text{altura}}{3}$$

3.6 Cálculo do volume do cone

A seguir definiremos cone.

Seja F uma região, chamada base do cone e um ponto V, chamado vértice do cone, localizado fora do plano que contém a base. A reunião de todos os segmentos de reta que ligam V a todos os pontos de F é um cone de base F e vértice V

- Objetivo

  Ao final desta atividade os estudantes deverão concluir como deve ser calculado o volume de um cone, usando o Princípio de Cavalieri.

- Procedimentos para calcular o volume do cone

  - Apresentar o modelo do cone
  - Observar que para aplicação do Princípio de Cavalieri é preciso escolher um sólido cujo volume seja conhecido para que se possa fazer a comparação entre os volumes dos sólidos.
  - Apresentar um modelo de pirâmide poligonal com a mesma altura do cone e cuja area da base seja igual a area da base do cone

Figura 3.11: Modelo - Cone com seção paralela à base

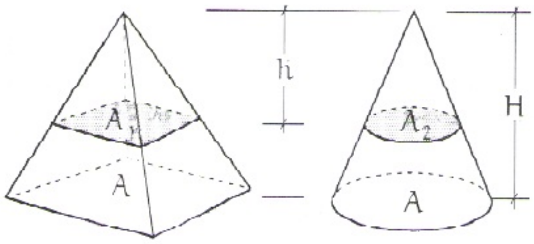


Figura 3.12: Pirâmide e cone com seções de mesma area

- Concluir, utilizando o Princípio de Cavalieri, que a area do cone é calculada da mesma forma da area da pirâmide poligonal

$$V = \frac{\text{area da base} \times \text{altura}}{3}$$

3.7 Cálculo do volume da esfera

O cálculo de volumes é objeto de estudo desde Euclides mas o primeiro a efetuar o cálculo do volume da esfera foi Arquimedes (287 a 212 a.C.). Segundo Ávila [13], para Arquimedes o volume da esfera está para o volume do cilindro circular reto a ela circunscrito, assim como 2 está para 3 e, Plutarco conta em seu livro "As vidas dos homens ilustres" que, de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era exatamente esta relação entre os volumes do cilindro e da esfera.

Para o cálculo do volume da esfera iremos utilizar dois sólidos: a clepsidra e a anticlepsidra.

A clepsidra ou relógio de água foi um dos primeiros sistemas criados pelo homem para medir o tempo. A mais antiga clepsidra conhecida é de aproximadamente 1400 a.C.

e sua precisão era da ordem de 5 a 10 minutos. Trata-se de um dispositivo que funciona por gravidade, como uma a ampulheta, porém movido a água. Por ter pouca precisão a clepsidra era utilizada para medir períodos curtos, como a duração de um discurso ou a medição de tempo à noite, onde não se podia utilizar o relógio de sol.

As primeiras clepsidras eram em forma de cilindros ou paralelepípedos e consistiam de dois recipientes, colocados em níveis diferentes: o recipiente superior contém o líquido e um orifício na base para o escoamento e o recipiente inferior é graduado com uma escala de níveis, estando inicialmente vazio. O tempo é medido pela variação do nível do líquido no recipiente inferior. Devido ao formato dos recipientes, a medida que o líquido escoa a pressão no recipiente superior cai e reduz a vazão, prejudicando a precisão da medida. Para atenuar este problema passaram a ser usados recipientes em forma de cone.

Definiremos clepsidra como o sólido formado por dois cones iguais, em posições invertidas, um em relação ao outro, que se tocam no vértice.

A anticlepsidra corresponde ao sólido compreendido entre o cilindro circular a clepsidra inscrita no referido cilindro.

Considere o ponto O, chamado centro da esfera. O conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a R é a esfera de centro O e raio R.

- Objetivo

  Ao final desta atividade os estudantes deverão concluir como deve ser calculado o volume de uma esfera, comparando com o volume de um cilindro e dois cones inscritos neste cilindro

- Procedimentos para calcular o volume da esfera

  - Apresentar uma esfera e propor o problema: Como calcular seu volume?

Figura 3.13: Modelo - Esfera e seção circular

  - Explicar a utilização de um sólido de volume conhecido para que possa ser aplicado o Princípio de Cavalieri

- Justificar a escolha do sólido para este cálculo

  Considere uma esfera e um cilindro equilátero de mesmo raio, ambos apoiados sobre um plano horizontal. Subtraindo do cilindro a clepsidra inscrita, ou seja, dois cones iguais, cujas bases coincidem com as bases do cilindro e os vértices coincidem no centro do cilindro, vamos obter a anticlepsidra.

  Um plano horizontal, paralelo ao plano de apoio, que intersecte a anticlepsidra produzirá uma coroa circular cuja area é igual a area da seção gerada pela interseção deste mesmo plano com a esfera. A partir desse fato poderemos usar o Princípio de Cavalieri para calcular o volume da esfera.

- Calcular a area das seções paralelas de mesma altura e concluir que são iguais

  Considere uma esfera e um cilindro ambos de raio r e um plano α, paralelo

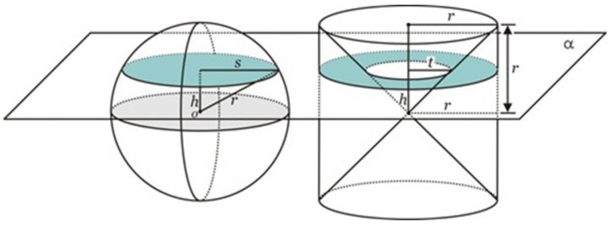


Figura 3.14: Esfera e anticlepsidra com seções de mesma area

  ao plano de apoio, que dista h do centro dos sólidos. Seja s o raio da seção circular gerada pela interseção de α com a esfera.

  Temos $s^2 = r^2 - h^2$ e a area da seção da esfera será $A_1 = \pi s^2$ ou ainda $A_1 = \pi(r^2 - h^2)$

  Considere agora a coroa circular de raio externo r e raio interno t, formada pela interseção de α com a anticlépsidra.

  A area desta seção será $A_2 = \pi(r^2 - t^2)$. Como o cilindro é equilátero podemos afirmar que $t = h$ e portanto $A_2 = \pi(r^2 - h^2)$.

  Concluimos assim que $A_1 = A_2$ e por isso podemos aplicar o Princípio de Cavalieri

- Apresentar o modelo

Figura 3.15: Modelos - Seção da esfera e seção da anticlepsidra

- Calcular o volume do cone e do cilindro

$$V_{cone} = \frac{\pi r^2 \, r}{3} \qquad\qquad V_{cilindro} = \pi r^2 \, r$$

- Concluir o volume da esfera

$$V_{cilindro} = V_{esfera} + 2 \times V_{cone} \iff V_{esfera} = V_{cilindro} - 2 \times V_{cone}$$

$$V_{esfera} = \pi r^2 \, 2r - 2 \times \frac{\pi r^2 \, r}{3} \iff V_{esfera} = \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3}$$

$$V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Relato das Aplicações

Farei aqui um relato das aulas ministradas para a turma do 3º ano do curso de Eletromecãnica do IFBA - Campus Santo Amaro. O relato será apresentado por aula e cada aula teve duração de 50 minutos com explanação de um ou dois conteúdos por aula.

A turma é bem reduzida, contando apenas com 15 alunos. O número reduzido foi visto como vantagem pois todos puderam participar ativamente, fazendo perguntas e tentando entender as conclusões. Como não havia modelos em quantidade suficiente para que cada um pudesse manipulá-los individualmente. os alunos fizeram trocas entre si tanto de modelos quanto de observações sobre eles. As aulas foram gravadas para os comentários e conclusões dos alunos fossem relatados com fidelidade.

- 1ª aula: O Princípio de Cavalieri.

  Seguindo o roteiro sugerido foi apresentado o modelo do Princípio de Cavalieri que consta de dois prismas triangulares, subdivididos em seções paralelas, de bases diferentes porém com a mesma area e um plano de acetato que secciona estes dois sólidos .
  Quando perguntados sobre como calcular o volume destes sólidos os alunos responderam que bastava somar as seções, sem explicar muito bem que grandeza estariam somando. Foi mostrado para eles então que quanto mais seções fizéssemos nos sólidos menor seria a altura de cada uma delas fazendo com que o valor numérico do volume e da area destas fatias ficassem bem próximos. Deste modo os alunos perceberam que precisavam somar as areas destas seções ou então calcular o produto da area de cada seção pela altura do prisma, recordando este conteúdo do programa pedagógico abordado no ensino fundamental. A partir daí foi proposto a eles que comparassem

as areas das figuras formadas pelas interseções do plano de acetato com os prismas dados e eles chegaram à conclusão de que eram iguais e como os prismas tinham a mesma altura, seus volumes também seria iguais.

Em seguida foi apresentado o cilindro reto e o cilindro oblíquo, feitos de acetato, ambos com uma seção de mesma area, mesma altura paralela à base . Então foi perguntado a eles qual seria a relação entre os volumes dos dois cilindros. Alguns alunos responderam rapidamente que o volume do cilindro obliquo era maior pois aparentemente neste caberiam mais 'coisas'. Eu pedi para que explicassem quais seriam as 'coisas' e então um dos alunos sugeriu que se usasse água, ou qualquer outro líquido para medir a capacidade (quanto cabia) dos dois cilindros. Neste momento eu perguntei se havia alguma semelhança deste exemplo com o anterior e um dos alunos perguntou se as bases dos cilindros eram iguais. Eu coloquei um cilindro sobre o outro e nós constatamos que as bases se sobrepusseram perfeitamente, ou seja, as areas das bases eram iguais e então, quase imediatamente, o aluno que havia questionado sobre a igualdade das areas associou este exemplo com o anterior e concluiu que os volumes dos cilindros deviam ser iguais. Houve uma pequena discussão entre eles pois alguns ainda discordavam desta conclusão mas depois de alguma argumentação do primeiro aluno citado, todos se convenceram da igualdade dos volumes. Para concluir eles foram conduzidos a enunciar o Princípio de Cavalieri com as próprias palavras: "Quando dois sólidos têm area das bases iguais os volumes são iguais". Observado que os alunos não perceberam a relevância das altursa dos sólidos, foi perguntado se ao retirarmos uma das seções de um dos prismas do modelo inicial, se os volumes ainda permaneceriam iguais. Eles afirmaram que não e então perceberam que o volume dependia da altura. Mais uma vez, eles foram convidados a enunciar o Princípio de Cavalieri e elaboraram da seguinte forma: "Quando dois sólidos tem areas das bases iguais e mesmas alturas, então os volumes são iguais". A partir daí, foi apresentado o enunciado formal e comparado com o enunciado elaborado pelos discentes. Os alunos verificaram então as diferenças entre eles e perceberam que não bastava que as areas das bases fossem iguais e justificaram citando o exemplo de uma pirâmide e um prisma, onde as bases podem ter areas iguais mas as seções produzidas por planos paralelos a base tem areas diferente. Pelas observações e comentários feitos pelos alunos foi verificado que o objetivo da atividade foi atingido e que eles entenderam na prática o que significa o Princípio de cavalieri, apesar de não saberem expressá-lo de maneira formal.

- 2ª aula: Cálculo do volume do cilindro e do volume do prisma

  Para o cáculo do volume do cilindro foi apresentado o modelo de um cilindro de

acetato com uma seção paralela à base e proposto o problema: Como calcular o volume deste cilindro?
Nesta atividade foi considerado um cilindro de altura h e base de area a. Foi solicitado que os utilizazem o Princípio de Cavalieri para o cálculo do volume e questionado em que condições pode-se aplicar o referido princípio. Num primeiro instante, os alunos não souberam responder e sugeriram aplicar a fórmula já conhecida para o cálculo de volume. Com a insistência para a utilização do Princípio de Cavalieri, surgiu a idéia de procurar um sólido de volume conhecido para comparação. Um dos estudantes propôs que usássemos um cubo pois era o sólido cujo cálculo do volume ele achava mais fácil. Outro estudante sugeriu que o sólido mais adequado seria o bloco retangular pois neste caso o cálculo do seu volume é conhecido e poderíamos escolher um bloco de modo conveniente, ou seja, de modo que a area da base fosse igual igual à area da base do cilindro e altura igual à altura do cilindro.

Foi apresentado então o modelo de um bloco retangular cuja area da base era a e a altura e h. Pelo Princípio de Cavalieri os alunos concluíram que o volume do cilindro seria igual ao do bloco apresentado e chegaram à conhecida relação $V = ah$

Para o cálculo do volume do prisma de base poligonal o raciocínio foi imediato, devido à experiência anterior. Foi apresentado o modelo de acetato de um prisma de base poligonal com uma seção paralela à base, como sugerido no roteiro e proposto o problema: Como calcular a area de um prisma cuja base é um polígono qualquer?

Pelo exemplo anterior, os alunos perceberam que o ideal seria comparar o prisma dado com um bloco retangular cujas medidas fossem adequadas ao cálculo. Surgiu um novo problema: como calcular a area da base de um polígono irregular? Então foi necessário recordar que todo polígono pode ser dividido em triângulos. Imediatamente, os alunos perceberam que é possível dividir o prisma de base poligonal em vários prismas de base triangular e intuitivamente concluíram que o volume do prisma seria a soma dos volumes dos prismas triangulares. Apesar de não ter sido determinado o volume do prisma de base triangular, para os alunos pareceu bastante natural dizer que o cálculo do volume do prisma de um modo geral também poderia ser obtido pela relação $V =$ area da base $\times$ altura.

Em seguida foi calculado o volume de mais alguns prismas de base poligonal, apenas para fixação.

- 3ª aula: Cálculo do volume da pirâmide e do volume do cone

  Inicialmente, foi apresentado o modelo de uma pirâmide de base triangular e proposto o problema: Como calcular o volume deste sólido?
  Os alunos perceberam que não poderiam comparar a pirâmide com nenhum bloco

regular para usar o Princípio de Cavalieri, como foi feito anteriomente. Foi sugerida a comparação de duas pirâmides de mesma altura e bases poligonais diferentes de mesma area. Neste ponto foi preciso relembrar a relação entre as areas das bases e das seções geradas pelas interseções do plano paralelo às bases, com a pirâmide. Perguntados sobre a aplicação do Princípio de Cavalieri naquele caso, a resposta dos alunos foi imediata: os volumes de duas pirâmides de mesma altura, cujas bases poligonais tem a mesma area, são iguais.

Foi apresentado então o modelo do prisma triangular e proposto o problema: Qual a relação entre o prisma triangular e a pirâmide triangular?
Esta relação não é simples de se perceber, mas com o modelo apresentado ficou muito clara a divisão do prisma triangular em três pirâmides triangulares. Manipulando os modelos e comparando as pirâmides, duas a duas, os alunos observaram que os volumes das pirâmides são iguais e também concluíram que o volume do prisma é a soma dos volumes de três pirâmides. Desta maneira chegaram à relação

$$\text{volume da pirâmide} = \frac{\text{volume do prisma}}{3}$$

Em seguida foi apresentado o modelo de pirâmide de base poligonal e proposta a pergunta: Como podemos calcular o volume desta pirâmide?
A intenção era generalizar o resultado para cálculo de volume de pirâmide de base poligonal qualquer, e o resultado foi imediato. O polígono da base do modelo apresentado é dividido em triângulos de cores diversas, de forma a chamar bastante a atenção e sugerir esta divisão, e além disso os alunos fizeram associação com o raciocínio desenvolvido na aula anterior. Um deles disse que dividindo o polígono da base da pirâmide em triângulos estaríamos dividindo também a pirâmide de base poligonal em várias pirâmides de base triangular. Daí todos puderam perceber que o volume da pirâmide poligonal apresentada é equivalente à soma dos volumes das pirâmides triangulares nais quais ela foi dividida e concluíram que a relação é válida para qualquer pirâmide

$$\text{volume da pirâmide} = \frac{\text{area da base} \times \text{altura}}{3}$$

Para o cáculo do volume do cone foi apresentado um modelo de cone de acetato com uma seção paralela à base e foi feita apergunta: Como calcular o volume deste sólido?
Foi perguntado quais as condições para que se pudesse usar o Princípio de Cavalieri. Um aluno percebeu a semelhança entre um cone e uma pirâmide, dizendo que o

sólido que deveríamos usar para fazer a comparação com o cone deveria ser uma pirâmide que tivesse a mesma altura do cone e cuja base tivesse a mesma area da base do cone. Outro estudante sugeriu que usássemos uma pirâmide pirâmide de base triângular por ter sido o modelo que havíamos estudado anteriormente e dois outros sugeriram o uso da pirâmide de base quadrada por ser um cálculo mais fácil, mostrando que eles entenderam que o princípio de Cavalieri continuaria válido qualquer que fosse a pirâmide escolhida.

Então, usando a pirâmide de base quadrada e fazendo a comparação entre o cone e esta pirâmide, foi questionado como poderíamos garantir que as areas das seções paralelas à base do cone e da pirâmide fossem iguais. Um dos alunos lembrou da relação de proporção utilizada anteriormente na mesma aula para comparação enre duas pirâmides e perguntou se valia também para esta comparação entre uma pirâmide e um cone. Relembramos então a razão de semelhança entre as areas das seções das pirâmides e concluímos que a relação também seria válida para as seções dos cones. Daí concluímos que as seções paralelas de mesma altura eram iguais e portanto os volumes dos dois sólidos também seriam iguais e a expressão para o cálculo do volume do cone surgiu expontaneamente:

$$\text{volume do cone} = \frac{\text{area da base} \times \text{altura}}{3}$$

- 4ª aula: Cálculo volume da esfera

Para o cálculo do volume da esfera foi apresentada primeiramente uma esfera e um hemisfério com uma seção disco e apresentado o seguinte problema: Como calcular o volume deste sólido?

Para este cálculo não havia sido desenvolvido nenhum estudo anterior e portanto a turma não fez nenhuma associação com fórmulas ou expressões conhecidas. A proposta de que fosse utilizado o Princípio de Cavalieri como anteriormente, fez surgir um novo problema: Que sólido utilizar para compararação neste caso?

Como o Princípio de Cavalieri compara areas de seções nos sólidos começamos calculando a area da seção mostrada no modelo. Para fazer este cálculo foi necessário calcular o raio da seção e isto foi feito aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo mostrado no modelo, que tem catetos d e r e hipotenusa R onde d é a distância do centro da seção ao centro da esfera, r é o raio da seção e R é o raio da esfera. Fazendo os cálculos concluímos que a area da seção era $A_1 = \pi(r^2 - h^2)$. Aqui foi preciso lembrar do cálculo da area de uma coroa circular, conteúdo estudado anteriormente nesta mesma série de ensino.

Para a escolha do sólido para comparação foi apresentado o modelo da anticlépsidra com a seção coroa. A utilização do modelo permitiu que os alunos percebecem claramente a seção coroa destacada, de raio extermo igual ao raio da esfera e de raio interno igual ao raio da seção disco. Alguns alunos logo disseram que já poderíamos aplicar o princípio de Cavalieri e concluir que o volume da esfera seria igual ao volume daquele sólido apresentado.

Neste momento alguns alunos ainda não haviam entendido de que sólido estávamos falando. Foi preciso uma observação um pouco mais detalhada do modelo para entender como era formado este sólido, até então desconhecido para eles. Depois que os alunos conseguiram perceber, com ajuda do modelo, como era formada anticlépsidra bastou calcular os volumes dos cones e do cilindro e concluir a expressão para o cálculo do volume da esfera:

$$\text{volume da esfera} = \frac{4\ \pi\ R^3}{3}$$

4.2 Contribuições dos estudantes

Na rotina da sala de aula os modelos de materiais manipuláveis se mostraram muito úteis principalmente na apresentação de novos conteúdos, como foi o caso do cálculo do volume da esfera. As aulas ficam mais interessante e as deduções e conclusões vão surgindo algumas vezes expontaneamente, outras provocadas por perguntas.

Em uma conversa informal com a turma em que acompanhou este trabalho, foram feitas algumas perguntas aos alunos para saber qual a impressão deles sobre o uso de modelos concretos e como eles percebiam essas em comparação com o uso de computadores, projetores e softwares. Alguns afirmaram que aprenderam com mais facilidade quando puderam perceber as relações entre os objetos concretos, outros disseram preferir o uso de imagens projetadas desde que pudessem ser movimentadas em todas as direções para uma melhor visualização.

É compreensível que uma parte da turma prefira a tecnologia computacional aplicada ao ensino, uma vez que essa é a realidade deles atualmente mas estes mesmos estudantes reconhecem que a simples utilização da tecnologia sem a interação dos alunos, apenas transforma uma aula expositiva no quadro de giz em uma aula, igualmente expositiva, na tela do projetor.

Quanto à aplicação do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes de sólidos todos concordam que o material manipulável é bem mais adequado do que imagens projetadas pois as comparação entre os modelos proporciona uma melhor compreensão das expressões deduzidas.

Capítulo 5

Conclusão

A experiência com modelos manipuláveis descrita neste trabalho atingiu os objetivos de estimular os estudantes para deduzir, descobrir e desenvolver relações entre os objetos estudados, motivando as aula. Alguns conteúdos aqui apresentados já haviam sido abordados nas séries finais do ensino fundamental e portanto diversos estudantes já estavam familiarizados com eles, surgindo então uma alternância entre deduzir uma forma de calcular ou ratificar um conhecimento prévio, legitimando assim de forma empírica, alguns conteúdos ou argumentos que haviam sido apresentados algebricamente. A utilização de tecnologia digital como computadores, projetores e softwares também contribuir para estas associações entre o concreto e o abstrato. Desta forma as maneiras de argumentar se complementam na rotina do aprendizado e nenhuma delas pode ser considerada melhor do que a outra, apenas, dependendo do contexto, mais ou menos adequada.

Para elaboração das propostas das atividades e prepraração das aulas foi preciso um estudo detalhado dos objetos e de seus elementos e de como deveriam ser colocadas as questões para estimular as deduções. Porém as aplicações em turma destas propostas, mostraram que a participação dos estudantes pode estabelecer outros caminhos e a argumentação pode precisar de adaptações, cabendo ao professor neste momento uma reflexão e um replanejamento da aula, orientando um ambiente de discussão dinâmico e produtivo. Estas adaptações podem gerar uma resistência dos profissionais em aplicar modelos manipuláveis na sua prática de ensino, pois exigem mais tempo e dedicação para aprimoramento das atividades e análise de resultados. Além disto não existem nas escolas de ensino médio laboratórios ou acervo de modelos manipuláveis adequados com roteiros para uso e poucas são as univesrsidades que os têm e disponibilizam para uso dos professores na prática diária.

Ao observar os resultados obtidos e as reações dos estudantes durante as aulas podemos perceber a mudança de atitude destes estudantes. A manipulação dos modelos e a análise das propriedades de cada sólido geométrico permitiram aos alunos compreender melhor os objetos e a partir daí participar das deduções dos cálculos e relações matemáticas, tornando assim o aprendizado mais interessante e efetivo. Certamente

Fazendo uma comparação entre as aulas expositivas e as aulas em que foram utilizados modelos manipuláveis, observa-se uma mudança significativa na compreesão dos conceitos e no interesse dos estudantes nos temas propostos. É claro que em diversas situações não podemos contar com modelos manipuláveis como recurso didático, mas a maneira de pensar a partir do uso frequente destes modelos, pode contribuir para que as discussões abstratas fiquem mais claras e os cálculos se tornem atraentes.

Apêndice A

Cadastro de Modelo

Para cada modelo do LEMA - UFBA existe um cadastro onde constam informações sobre o modelo, sua descrição e a fundamentação teórica para a construção deste modelo. Os itens que constam no cadastro são:

- *Título* - título do modelo, de maneira geral uma referência ao assunto trabalhado
- *Código* - cada modelo tem um código de referência
- *Area de Aplicação* - descreve a area da Matemática na qual o modelo pode ser utilizado
- *Nível* - indica o nível escolar para o qual o modelo é adequado
- *Quantidade* - indica a quantidade de modelos semelhantes que existem no LEMA
- *Material* - descreve o material utilizado na confecção do modelo
- *Descrição* - descreve as parte que compõem o modelo
- *Objetivos* - descreve os objetivos das atividades a serem desenvolvidas utilizando este modelo
- *Resolução* - cálculos e demosntrações envolvidas na construção e na utilização do modelo
- *Conclusão* - descreve os resultados obtidos com o uso do modelo como fórmulas ou teoremas
- *Manuseio* - roteiro simplificado para a aplicação
- *Bibliografia* - traz a bibliografia utilizada para o cálculo e a construção do modelo

A seguir veremos como exemplo, o cadastro do modelo do cáculo do volume da esfera elaborado pelo LEMA-UFBA.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATAMÁTICA
LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA E ESTATÌSTICA

CADASTRO DE MODELO

Título: Volume da Esfera

Código: GE_VEPC_KIT_01

Área de aplicação: Geometria Espacial

Nível:	Ensino Fundamental		Ensino Médio	X	Ensino Superior	
Quantidade de:	Kits	1	Modelos		Peças	6

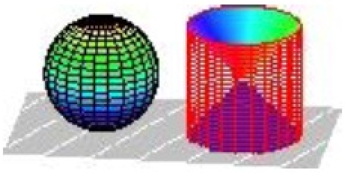
Material utilizado na confecção: resina, isopor, massa acrílica, emborrachado, acetato, papel especial (color plus).

Descrição: O Kit é composto por uma esfera; uma anticlépsidra dividida em duas partes iguais; um hemisfério com uma seção disco; uma parte de uma anticlépsidra com uma seção coroa e outra parte menor de uma anticlépsidra enfatizando a seção coroa.

Objetivo: Deduzir o volume da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri.

Resolução:

Consideremos o sólido limitado pela esfera de raio R e uma anticlépsidra de raio R apoiados em um mesmo plano. A anticlépsidra de raio R corresponde ao sólido compreendido entre o cilindro circular de raio R e altura 2R e dois cones circulares de raio R e altura R (cones equiláteros). Os cones estão em posições invertidas, um relação ao outro, e se tocam no vértice.



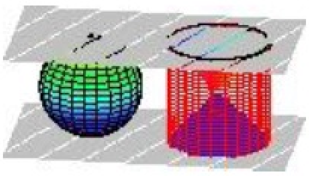
Vamos intersectar os dois sólidos com planos paralelos ao plano de apoio e observar que as seções têm áreas iguais. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, o volume da esfera coincide com o volume da anticlépsidra.

O volume da anticlépsidra é igual ao volume do cilindro menos os volumes dos dois cones, ou seja, é igual a

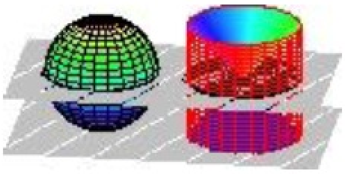
$$(\pi R^2)\, 2R - 2\frac{(\pi R^2)R}{3} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Concluiremos então que o volume da esfera é igual a $\frac{4\pi R^3}{3}$.

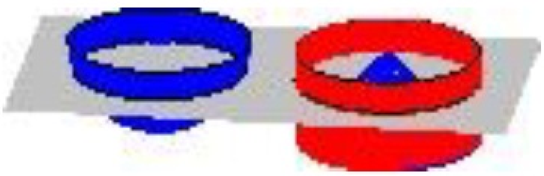
As interseções do plano de apoio com a esfera e a anticlépsidra são, respectivamente, um ponto e uma circunferência de raio R, logo, consideramos que ambas têm áreas iguais a zero. O mesmo ocorre com o plano que tem distância 2R ao plano de apoio.



Se a distância do plano ao plano de apoio é igual a R então as interseções desse plano com os dois sólidos são dois discos de raio R, portanto de áreas iguais a πR^2.



Se a distância do plano ao plano de apoio é menor que 2R, diferente de 0 e de R, então as interseções com a esfera e a anticlépsidra são, respectivamente, um disco e uma coroa.



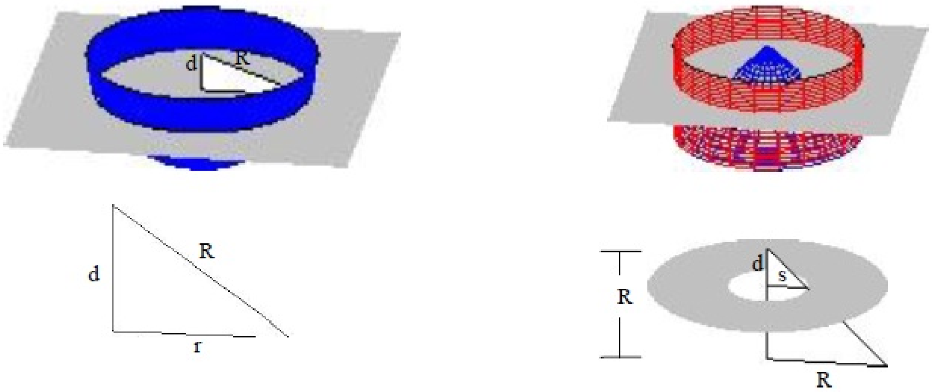
Seja d a distância do plano ao centro da esfera e do plano ao centro da anticlépsidra.

Pelo Teorema de Pitágoras, o raio r do disco é dado por $r^2 = R^2 - d^2$. Portanto, sua área é igual a $\pi(R^2 - d^2)$.

A coroa é determinada por circunferências de raio maior R e raio menor s. Mostramos que s = d. Fazendo uma seção da anticlépsidra com um plano perpendicular ao plano de apoio, obtemos dois triângulo retângulos semelhantes, um de catetos iguais a d e s e outro de catetos iguais a R. Logo s = d. Então, a área da coroa é igual a

$$\pi R^2 - \pi s^2 = \pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2),$$

igual à área do disco.



Manuseio:

Apresentar a esfera e dizer o objetivo de verificar, utilizando o Princípio de Cavalieri, que seu volume é igual a quatro terços de π vezes seu raio ao cubo. Apresentar a anticlépsidra, explicando como é construída: sólido limitado pelo cilindro com área da base igual a R e altura 2R, sendo R o raio da esfera, excluindo dois cones equiláteros de raio da base igual a R. Mostrar com os modelos os tamanhos iguais da esfera e da anticlépsidra e comparar o raio de uma das partes da anticlépsidra com o raio do hemisfério. Enunciar o Princípio de Cavalieri (supõe-se que o Princípio de Cavalieri já foi apresentado anteriormente, utilizando modelos mais simples). Lembrar que são conhecidos os volumes de um cilindro e de um cone, sendo fácil calcular o volume de uma anticlépsidra. Dizer que o volume da anticlépsidra é igual a πR^2 vezes a altura 2R, menos 2 vezes o volume do cone, πR^2 vezes a altura R, sobre 3, e que fazendo os cálculos encontra-se $\frac{4\pi R^3}{3}$. Que se mostrar que as seções dos dois sólidos têm áreas iguais então o volume da esfera é igual a $\frac{4\pi R^3}{3}$.

Mostrar a seção disco do hemisfério e a seção coroa de uma das partes da anticlépsidra e dar uma idéia que elas têm áreas iguais. Os casos em que a distância dos planos que secionam os sólidos são iguais a 0, R e 2R podem ser omitidas, a depender do público.

Bibliografia:

Medidas e forma em Geometria, SBM, Elon Lages Lima;
A Matemática do Ensino Médio, SBM, Elon Lages Lima e outros

Cadastro atualizado em: 10/03/2013

Referências Bibliográficas

[1] Dante. *Matemática*, volume único. Ática, São Paulo, 2008.

[2] Rômulo Marinho do Rêgo and Rogéria Gaudencio do Rêgo. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática*. Autores Associados, Coleção Foemação de Professores, Campinas, SP, 2006.

[3] Howard Eves. *Introdução à história da matemática*. Editora Unicamp, Campinas, SP, 2011.

[4] Dario Fiorentini and Maria Ângela Miorim. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim SBEM-SP*.

[5] Rosinéte Gaertner, Márcia Aurélia Stopassoli, and Vanessa Oechsler. Materiais didáticos nas aulas de matemática no ensino médio: uma proposta viável. *SBEM*, 2008.

[6] Elon L. Lima. *Medida e Forma em Geometria*. SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[7] Elon L. Lima, Paulo Cezar P. C. Carvalho, Eduardo Wagner, and Augusto Cesar Morgado. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2.

[8] Carmeligia Marchini. Elo entre os ambientes tridimensionais e bidimensionais. *Caderno Pedagógico - Secretaria da Educação do Paraná*.

[9] Roberto Ribeiro Paterlini. Os "teoremas"de cavaliere.

[10] Aníbal Pinto. Os indivisíveis e o infinito no trabalho de Bonaventura Cavalieri. *SBHC*, 2012.

[11] Maria Luiza Serrazina. Os materiais e o ensino da matemática. *APM nº 13*.

[12] Elinalva Vergasta Vasconcelos. Laboratório de ensino de matemática.

[13] Geraldo Ávila. Arquimedes, a esfera e o círculo. *Revista do Professor de Matemática*.

[14] Geraldo Ávila. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*.