TORRE DE HANÓI, UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO MÉDIO

Alexandre da Costa[1]

RESUMO

Torre de Hanói se caracteriza por ser um jogo que possui aplicações que podem ser basicamente usadas em escolas por professores que desejam melhorar e desenvolver o cognitivo de seus alunos, podendo ser aplicado em pequenos grupos ou individualmente além de proporcionar possibilidades de implementação de algoritmos matematicos que se baseim em suas regras. Por possuir regras simples e de facil assimilação se adapta a diferentes niveis de ensino, sedo possivel a sua utilização tanto no nivel fundamental como médio ou até mesmo no ensino superior, em programação, indução finita e exemplos de recursivedade e outros. A possibilidade de um trabalho envolvendo indução finita é muito interessante, mas o que chama mais a atenção são as possibilidades didáticas e lúdicas de idéias matemáticas que a principio não são percebidas.

O principal interesse aqui é expor uma possibilidade de trabalho com alunos do ensino médio, incorporar de forma séria e objetiva o espírito investigativo, importantes no processo de desenvolvimento de idéias matemáticas e promover a socialização. Pretende se explorar os conceitos matemáticos relativos a Progressões Geométricas, que estão intimamente ligadas as regras do jogo, proporcionando um contato inicial com os mesmos, induzir os alunos a perceberem as leis matemáticas, trabalhar com o desevolvimento de abilidades mentais tais como: concentração e estabelecimento de plano de ação, algoritimos matematicos, socialização e desenvolvimento cognitivo.

Atividades como essa proporcionam a percepção da matematica como uma ferramenta poderosa a ser aplicada em problemas reais e através da utilização de conceitos matematicos os resouver. Se valendo do aspecto lúdico de uma proposta como esta, se permiti que o processo ensino-aprendizagem de matemática, seja mais interessante e divertido.

Esta proposta de atividade é apresentada em uma configuração muito parecida a um plano de aula o que pode facilitar o seu entendimento e possível aplicação, é organizado em tópicos e figuras ilustrativas norteiam o seu desenvolvimento. A lenda que acompanha o

brinquedo também não deixa de ser um aspecto motivador em uma exposição didática, ao levar a conhecimento das crianças a fábula criada pelo matemático Eduard Lucas evidencia toda a criatividade de um matemático.

Foi possível chegar a um trabalho sintético que pode ser modificado a atender preferências particulares de quem venha a interessar-se pelo assunto. Evidentemente não se trata de um trabalho completo sobre o tema e outras pesquisas já trazem desenvolvimentos similares. Assim, novas ideias podem ser incorporadas ao mesmo como é o caso dos conceitos de função exponencial e indução finita. No mais a presente exposição satisfaz os objetivos pretendidos.

Palavras-chave: Torre de Hanói. Progressão Geométrica. Ensino.

INTRODUÇÃO

Tive contato pela primeira vez com o jogo Torre de Hanói em meu primeiro ano da graduação. Um dos meus professores explicou-nos as regras do jogo e propôs possibilidades de se trabalhar com alunos do ensino fundamental e médio utilizando conceitos matemáticos. Não dei muita importância na época, mas no ano seguinte, na semana acadêmica de Matemática da Unioeste (Universidade Estadual do Oeste do Paraná), participei de um mine curso relacionado a esse jogo e pude entendê-lo melhor.

Posteriormente surgiu a oportunidade de desenvolver trabalhos, como professor estagiário, na Escola Atílio Destro, da cidade de Cascavel no Paraná, onde foi possível colocar em prática alguns dos conhecimentos adquiridos em minha graduação. A escola dispõe de laboratórios de ensino, dentre esses o de matemática onde atuei por um ano. Tive contado com muitos jogos matemáticos e criei alguns outros. Apliquei o jogo Torre de Hanói a crianças do 4º ano do ensino fundamental e o aproveitamento foi um sucesso. Com algumas adaptações foi possível trabalhar conceitos matemáticos, substituindo a potenciação por multiplicações sucessivas. Além de terem construídos suas próprias torres os alunos se mostraram interessados pela lenda e motivados a descobrir uma forma de se ganhar no jogo. Como os jogos estavam sempre disponíveis vários alunos os procuravam no decorrer do ano.

Essas experiências me levaram a pensar e pesquisar atividades interessantes para se trabalhar no ensino médio, pois se trata do público alvo principal de minha licenciatura, e por ser a Torre de Hanói um jogo bastante conhecido pelos professores de matemática.

Acredito que a possibilidade de atividades que envolvam jogos matemáticos possam nos ser interessante, como relata Giménez e Rosich (1998) um jogo possui as características de vertente lúdica, fator de azar, tempo limitado e conteúdo curricular implícito. Por si só o jogo é capaz de conceber atitudes mais positivas em relação ao processo de aprendizagem, além de promover a socialização, pois estabelece incontestáveis e reais reações de aceitação, cumprimento de regras, etc.

Torre de Hanói

Trata se de um jogo inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. Constitui-se de uma torre com oito discos, inicialmente empilhados por tamanhos decrescentes em três pinos dados. O objetivo é transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor.

A Lenda

Lucas anexou ao seu brinquedo à seguinte lenda romântica (FERRERO, 1991; MACHADO, 1992): “No tempo de Benares, cidade santa da Índia, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e da grossura do corpo de uma abelha. Durante a Criação, Deus colocou 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, o maior deles imediatamente acima da bandeja e os demais, cada vez menores, por cima. Esta torre foi chamada de Torre de Brahma. Dia e noite os sacerdotes trocavam os discos de uma agulha para outra, de acordo com as leis imutáveis de Brahma. Essa lei dizia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de um disco por vez, e que o disco fosse colocado na outra agulha, de maneira que o debaixo nunca fosse menor do que o de cima. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos da agulha colocada por Deus no dia da Criação para outra agulha, o mundo deixaria de existir. Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de 1 disco por segundo”. Será que veremos o mundo acabar?

Materiais a serem utilizados

Uma Torre de Hanói de madeira, encontrada em qualquer loja de brinquedos educativos; folhas de papelão; régua milimetrada; caneta; tesoura; folhas impressa com o desenho representativo dos pinos do jogo; protótipo da construção da torre simples; cadernos e o quadro de giz.

A possível metodologia

1. Levar ao conhecimento dos alunos quem foi o criador do jogo apresentado lhes a lenda construída pelo próprio Édouard Lucas. Deixar os alunos manipular o jogo para que se familiarizem com ele.

Figura 1: Jogo Torre de Hanói confeccionado em madeira

2. Como na lenda de Lucas o objetivo e as regras do jogo são transferir a pilha de discos de um pino para outro, conseguindo completar a transferência com o número mínimo possível de movimentos, movendo um disco de cada vez, nunca permitindo que um disco maior fique acima de um menor. Ao passo em que se vai explicando essas regras pode se praticar com o jogo em madeira com apenas 4 discos, possibilitando aos alunos uma boa visualização de como é possível transportar a torre para outro pino seguindo as regra.

3. Deixar os alunos praticar segundo as regras e apenas observar;

4. Após essa abordagem introdutória propor a construção de uma Torre de Hanói simples que pode ser facilmente confeccionado utilizando papelão, que o próprio professor disponibilizará ou os alunos levarão de casa, régua, tesoura e uma caneta. A construção não leva mais que quinze minutos. De preferência expor um protótipo para auxiliar na confecção do jogo.

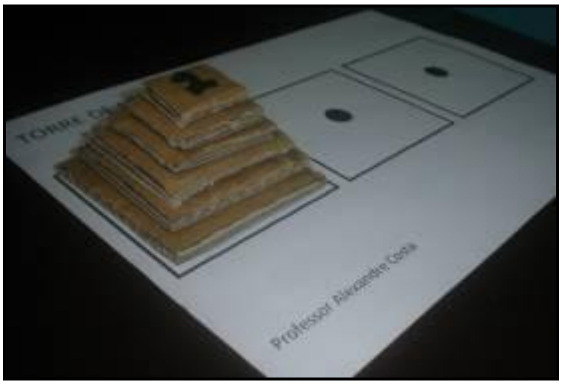

Figura 2- protótipo simples da torre

Construção da torre

Sobre um pedaço retangular de papelão toma-se um dos cantos e desenha-se com o auxilio da régua um quadrado de 8x8 cm, ao lado desse quadrado desenha-se outro de 7x7 cm, prosseguimos desenhando quadrados cada vez menores com a diferença de 1 cm do anterior até obtermos 6 quadrados;

Os quadrados serão as peças que substituirão os discos e devem ser enumerados de 1 a 6 da menor para a maior; em seguida recortamos esses quadrados que empilhados do maior para o menor formando uma torre de 6 peças;

Fornecer uma folha (Figura-3) para cada dois alunos representando os pinos da Torre de Hanói onde serão colocadas as peças.

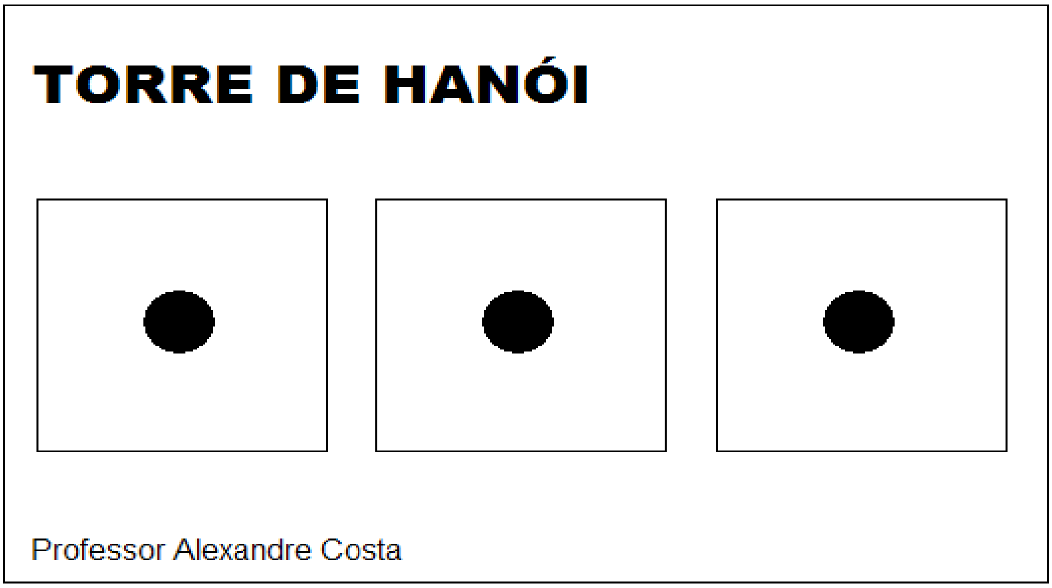

Figura 3- Folha disponibilizada pelo professor

5. Em seguida, com os alunos jogando com os jogos confeccionados por eles mesmos, vamos introduzindo idéias matemáticas. Inicialmente, solicitamos que as crianças iniciem com as seis peças. Obviamente terão dificuldade em jogar, sugerir que iniciem com menos peças. Primeiro com uma peça e pedir qual o número mínimo de movimentos necessários para transportar a torre para o terceiro pino. Fazer o mesmo com duas peças, depois com três e quatro. Um dos alunos pode contar os movimentos e observar as regras enquanto o outro joga e inverter os papéis a cada peça adicionada. Eles podem encontrar o menor número de movimentos para transferir a torre de um pino a outro, bem como uma regularidade entre as jogadas, obtendo uma solução para um número qualquer de discos. (WATANABE, 2004).

6. Os alunos devem construir uma tabela auxiliar relacionando o número de peças com o número mínimo de movimentos necessários para o transporte.

Tabela 1 – número mínimo de movimentos para 6 peças

Quantidade de discos das torres	Quant. de movimentos de cada peça						Total de movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	
1	1	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	31
6	32	16	8	4	2	1	63

Fonte: Proveniente de tentativas dos alunos ao jogar

Enquanto isso, algumas questões podem ser postas para ajudar o raciocínio:

- O número de movimentos é alterado quando a torre é transportada para o outro pino?
- Acrescentando uma peça à torre, em quanto aumentaria o número de movimentos?
- Existe alguma relação matemática entre o número mínimo de jogadas necessárias para transportar uma torre, e o número necessário para transportar a torre acrescida de uma peça?
- Existe alguma relação entre estes números e o que ocorre no jogo?
- Você utiliza alguma idéia matemática para escolher suas jogadas? Em caso afirmativo, qual, ou quais? Como você mobiliza essas idéias?

Nessa altura os discentes já deverão ter percebido algumas estratégias para se vencer com o mínimo de movimentos possíveis. Se não tiverem percebido fazer com que observem por qual pino se deve começar quando o número de peças é par e quando o número de peças é impar, questioná-los quanto a esse fato.

Estratégia de vitória

7. Descrever a estratégia de vitória em termos de estabelecer uma seqüência de transporte de modo que para se retirar cada peça da torre original, possa montar a subtorre acima dela em um único pino para então deslocar a referida peça para o outro pino.

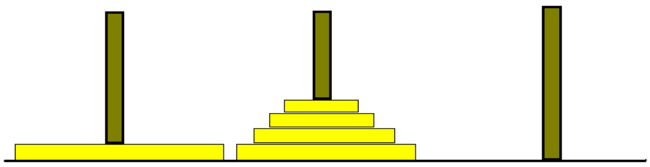

Figura 4 – subtorre no segundo pino

8. Sugerir que os alunos observem a tabela em especial às colunas Pç 1, Pç 2, Pç 3, Pç 4, Pç 6, e o que podemos notar nessas colunas em seguida nas linhas, o que podemos notar? É evidente que os termos das linhas estão decrescendo em razão dois **(q = 2)**. Podemos dizer que o termo seguinte é a metade do anterior. Notamos também que o total mínimo de movimentos para cada quantidade de peças é a soma dos termos das respectivas linhas (soma de P.G.). Dessa forma introduz-se o conceito de Progressão Geométrica e também o de soma dos termos de uma P.G..

9. Nas seqüências acima, a lei de formação é?

É fácil notar que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por um número fixo, no caso o 2, e os alunos deverão perceber isso.

Atentar para o fato de que toda seqüência que tiver essa lei de formação será denominada progressão geométrica.

O número fixo pelo qual estamos multiplicando cada termo é chamado razão da progressão.

10. Formalizando:

Progressão geométrica é uma seqüencia de números não nulos em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamado razão da progressão.

Obs. 2: A quantidade mínima de movimentos das torres com n discos é igual à soma de uma P.G. finita de razão 2, 1º termo igual a 1 e com nº de termos igual ao nº de discos da torre.

Ao movimentarmos o número de discos, a quantidade de movimentos de cada peça cresce em P.G. de razão 2, com 1º termo igual a 1.

O nº de movimentos de uma torre com n discos é igual ao dobro de movimentos da torre com (n-1) discos, acrescido de 1 movimento.

Considerações finais

1) Se ao invés de 6 peças tivermos 7 ou então 9, como é mais comum nesse jogo, qual seria o nº mínimo de movimentos necessários para transportar a torre?

2) E se aumentarmos o n° de pinos, por exemplo, mais um pino ou então mais dois, o que muda no jogo?

3) Desafiar os alunos a calcular o n° mínimo de movimentos com 64 peças como no problema original de Édouard Lucas.

Para uma proxima aula pode se deduzir uma fórmula recurssiva e em seguida uma lei geral para descobrir o número de movimentos necessários com uma determinada quantia de peças (n discos) no intuito de se chegar a fórmula da soma dos n termos de um P.G. finita.

O público alvo desta atividade são alunos do ensino médio, mas outras atividades podem ser adaptadas ao jogo para trabalhos com alunos do fundamental.

REFERÊNCIAS

WATANABE, R. Uma lenda: Torre de Hanói. In: Druck, S. (org.). **Explorando o ensino da Matemática: atividades: v.2**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. p. 132-135.

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Movendo discos, construindo torres e matematizando com futuros professores.** Publicado no Boletim GEPEM n. 38, pp. 95-110, fev/2001. Disponível em: < http://www.ufrrj.br/institutos/ie/geometria/>. Acesso em: 04 Abr. 2010.

FERRERO, L. **El juego y la matemática. Madrid**: La Muralla, 1991.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação: alegorias, tecnologias e temas afins**. São Paulo: Cortez, 1992. Coleção Questões da Nossa Época, n. 2

GIMÉNEZ, J. e ROSICH, N. **Jugand amb les matemàtiques de la diversitat**. Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya, 1998.

[1] Acadêmico do 4° ano do curdo de Licenciatura em Matemática – UNIOESTE. Email: alex2dc@hotmail.com