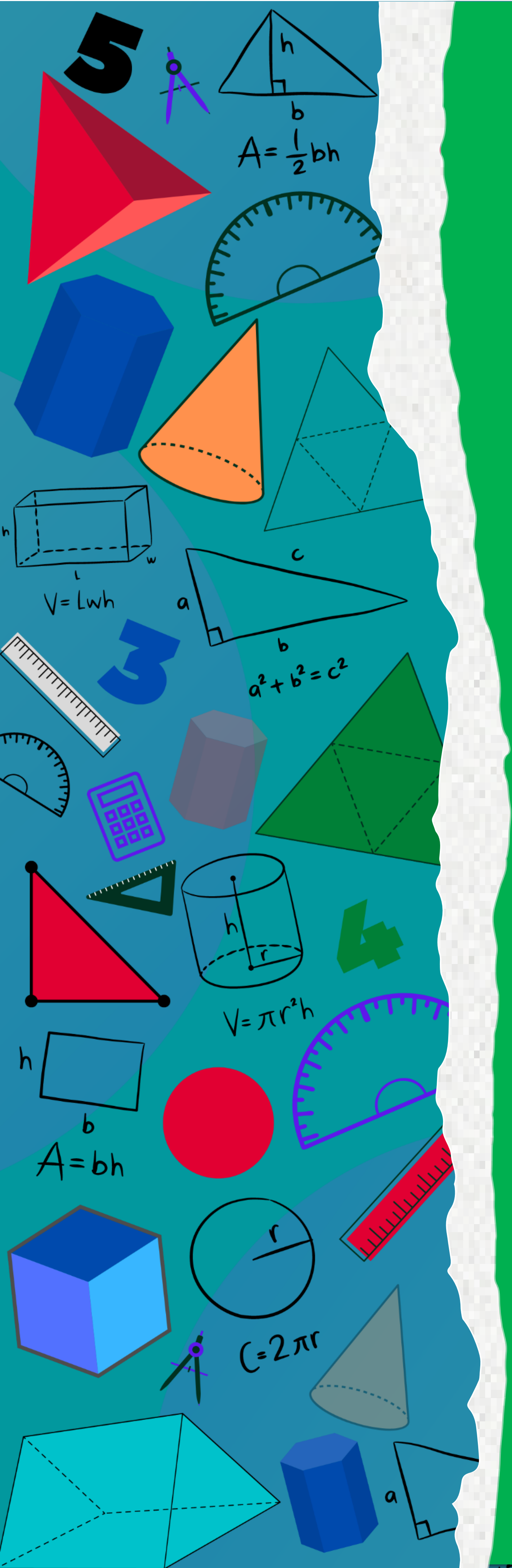


SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA UTILIZAÇÃO DE **SÓLIDOS GEOMÉTRICOS** NA MATEMÁTICA

Autora:
Camila Maciel da Silva

Orientação:
Sonní Lemos Barreto
Juliana Schivani

2022

PÚBLICO-ALVO DA UTILIZAÇÃO DO MATERIAL:

Ensino Médio, podendo ser adaptado para os anos finais do Ensino Fundamental.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER TRABALHADOS COM O MATERIAL:

Geometria plana (cálculo de áreas de figuras planas, ângulos, Teorema de Pitágoras), Geometria espacial (cálculo de volumes de sólidos geométricos, elementos de poliedros e corpos redondos).

O QUE É?

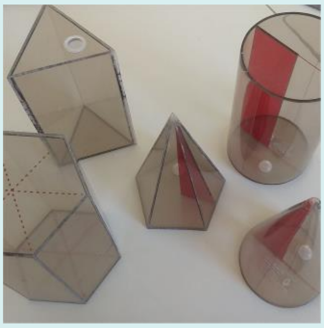
Os materiais manipulativos apresentados nesta sequência didática são sólidos geométricos classificados como poliedros (prismas e pirâmides) e corpos redondos (cones e cilindros).

Por definição, “os poliedros são sólidos formados por um número finito de polígonos e pela região do espaço limitada por eles. ” (BONJORNO; GIOVANNI JUNIOR; CÂMARA, 2020, p. 78). Estes polígonos podem ser triângulos, quadrados, retângulos, hexágonos, entre outros. Os poliedros que serão explorados neste material são prismas e pirâmides.

Já os corpos redondos “têm pelo menos uma parte da sua superfície curva” (BONJORNO; GIOVANNI JUNIOR; CÂMARA, 2020, p. 110), como por exemplo, os cilindros, cones e esferas, sólidos que também serão trabalhados nesta sequência.

Na figura 1 abaixo tem-se alguns sólidos geométricos feitos com material de acrílico e produzidos industrialmente com finalidade pedagógica.

Figura 1: Poliedros e corpos redondos de acrílico

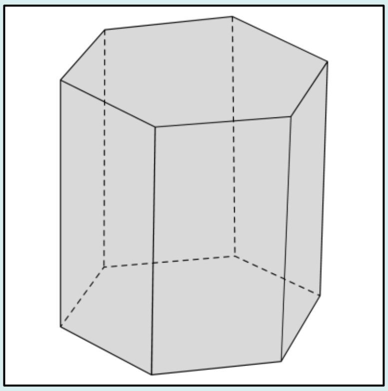


Fonte: Autores, 2022.

Na sequência é dada as definições dos sólidos geométricos a serem trabalhados neste material.

• **Prisma**: É um poliedro, pois é um sólido cuja superfície é formada por polígonos e seus interiores, em que dois polígonos estão em planos paralelos e há faces laterais formadas por paralelogramos. Podem ser denominados de acordo com o polígono da base, por exemplo: o prisma é pentagonal quando sua base é um pentágono, é triangular quando sua base é um triângulo. Na figura 2 temos um exemplo de prisma com base hexagonal regular. (SMOLE, 2020, p. 72)

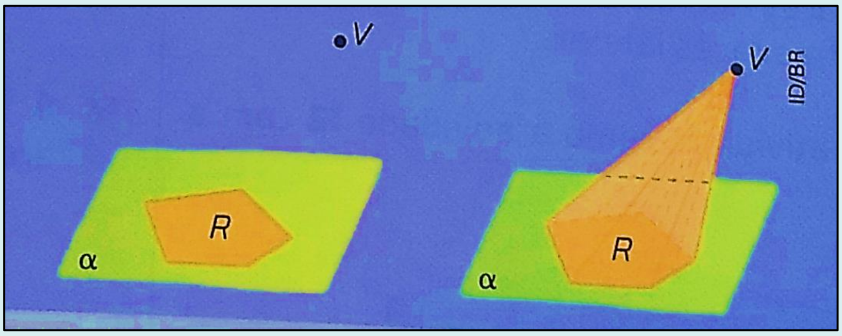
Figura 2: Prisma com base hexagonal regular



Fonte: Autores, 2022.

• **Pirâmide**: Seja *R* uma superfície poligonal contida em um plano α e *V* um ponto fora desse plano. A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em *V* e a outra em *R* é denominada **pirâmide**. As pirâmides podem ser classificadas de acordo com suas bases, por exemplo pirâmide quadrangular, pirâmide hexagonal. (SMOLE, 2020)

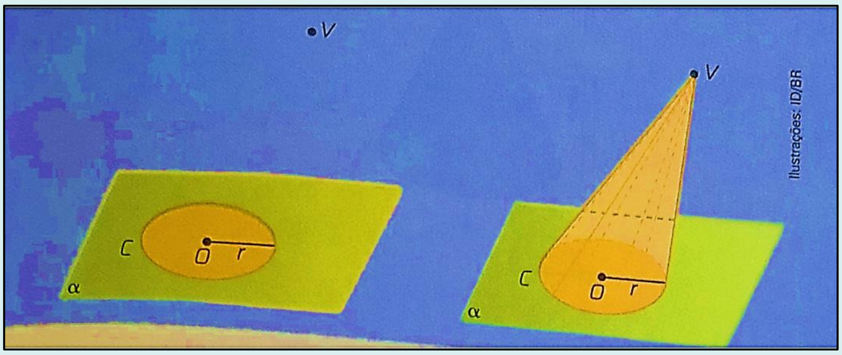
Figura 3: Ilustração da definição de Pirâmide



Fonte: Smole, 2020.

• **Cone**: Sejam um círculo *C*, de centro *O* e raio *r*, contido em um plano $\boldsymbol{\alpha}$, e um ponto *V* não pertencente a $\boldsymbol{\alpha}$. A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em *V* e a outra em *C* é denominada **cone circular**. (SMOLE, 2020)

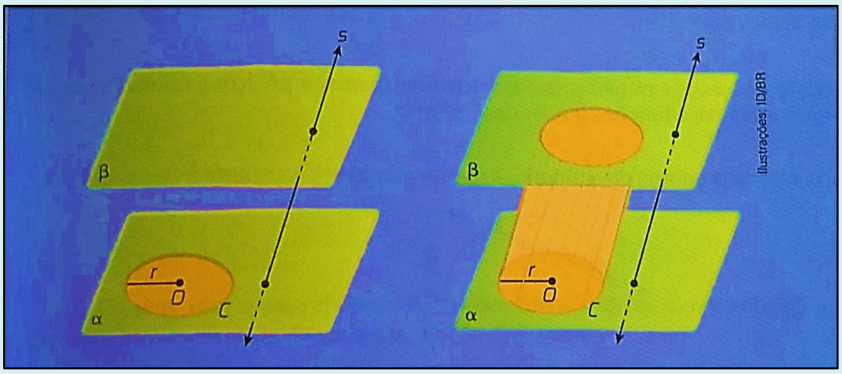
Figura 4: Ilustração da definição de Cone circular



Fonte: Smole, 2020.

• **Cilindro**: Sejam $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ dois planos paralelos, *C* um círculo de centro *O* e de raio *r*, contido em $\boldsymbol{\alpha}$, e *s* uma reta secante a $\boldsymbol{\alpha}$. A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a *s*, com extremidade em *C* e a outra em $\boldsymbol{\beta}$, é denominada **cilindro circular**. (SMOLE, 2020, p.93)

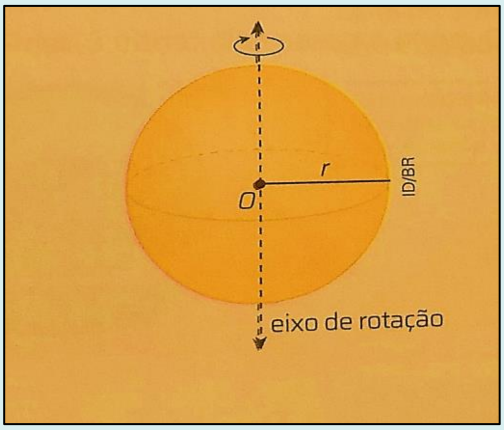
Figura 5: Ilustração da definição de Cilindro circular



Fonte: Smole, 2020.

• **Esfera**: Seja um ponto *O* e um segmento *r*, não nulo. A esfera é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a *O* são iguais ou menores que *r*. É gerado pela rotação de um semicírculo de raio *r* em torno de seu diâmetro. (SMOLE, 2020, p. 99)

Figura 6: Ilustração da definição de Esfera



Fonte: Livro, 2022.

COMO USAR?

O uso de sólidos geométricos pode facilitar a observação de algumas propriedades úteis no cálculo do volume, por exemplo.

Ao utilizar um prisma e uma pirâmide, ambos apresentando mesma área de base e mesma altura, é possível estabelecer uma relação entre os volumes desses sólidos. O volume desse prisma será igual a três vezes o volume da pirâmide, ou ainda, o volume da pirâmide será igual a um terço do volume do prisma.

A mesma relação é estabelecida entre cilindro e cone de mesma altura e de mesmo raio de base, onde o volume do cilindro é igual a três vezes o volume do cone, ou o volume do cone é um terço do volume do cilindro.

Acerca da esfera, o volume desta é 4 vezes maior que o volume de um cone cuja altura e raio medem exatamente o raio da esfera.

Para realizar estas constatações sem uso de fórmulas, o professor pode pedir que os alunos encham sólidos geométricos construídos por eles mesmos com algum líquido ou grão e compare as quantidades utilizadas.

É possível trabalhar, também, com planificações, teorema de Pitágoras, ângulos e áreas de figuras planas à medida que se constrói cada poliedro ou corpo redondo.

Alguns conhecimentos acerca dos cálculos de volumes de sólidos geométricos podem auxiliar para que os alunos consigam propor ações comunitárias adequadas, por exemplo, a região em que vivem envolvendo o cálculo de volume, de capacidade, segundo a BNCC. Além disso, possibilita a resolução e elaboração de problemas que envolvam o cálculo de volumes destes sólidos, sejam eles pirâmides, prismas e corpos redondos, cilindros e cones, em situações reais.

RELEITURA ARTESANAL PASSO A PASSO DO MODO DE FAZER:

Neste tópico, será apresentado o passo a passo da construção dos seguintes sólidos geométricos:

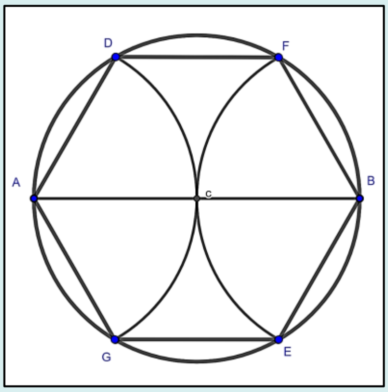
- Prisma;
- Pirâmide;
- Cilindro;
- Cone.

Para a construção de cada sólido geométrico listado, serão necessários os seguintes materiais:

- 01 Caneta/lápis de sua preferência;
- 01 Calculadora (se necessário);
- 01 Cola ou Fita Adesiva ou Grampeador;
- 01 Compasso;
- 01 Papel Cartão;
- 01 Régua;
- 01 Tesoura.

Para iniciar a construção do **Prisma com Base Hexagonal Regular**, constrói-se a **base**, que neste caso será hexagonal, conforme figura 7 a seguir, usando compasso, régua e lápis, mas pode ser qualquer outro polígono.

Figura 7: Construção de um hexágono a partir de uma circunferência



Fonte: Autores, 2022.

Para desenhar o hexágono regular, traça-se uma circunferência de centro C. Traça-se uma reta AB que será o diâmetro, conforme figura 7 anterior. Com o compasso aberto na mesma medida do raio desta circunferência, a ponta seca do compasso em A, traça-se um arco. Com a ponta seca em B realiza o mesmo processo. Dessa forma, a circunferência foi dividida em seis partes iguais. Para finalizar o desenho da base hexagonal regular, basta traçar os segmentos de retas AG, EG, BE, BF, DF e AD.

Note que, se traçarmos retas a partir dos vértices do hexágono e passando pelo centro obtemos 6 triângulos iguais (triângulos equiláteros). Ou seja, com mesma medida de lados e ângulos internos iguais, pois são congruentes.

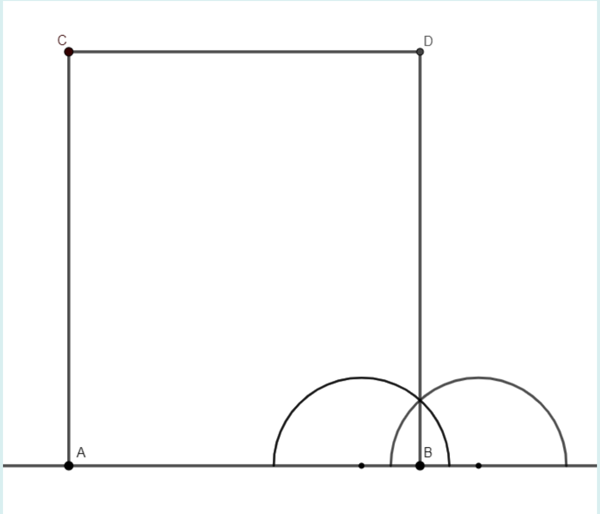
Para obter a área desta base, toma-se como referência um dos triângulos. Pode-se obter a altura deste triângulo através do Teorema de Pitágoras, pois ao traçar um segmento de reta que será a altura do triângulo, obtém-se um triângulo retângulo cuja hipotenusa é igual ao raio da circunferência e um dos catetos é igual a metade deste raio. A área do triângulo é dada por $\boldsymbol{A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}}$, logo a **área da base hexagonal regular** é $\boldsymbol{A_{base\ do\ prisma} = 6 \cdot A_{triângulo}}$.

Vale lembrar que visto o objetivo de utilizar esses sólidos para trabalhar os volumes, uma das bases não foi feita no material produzido para poder deixar aberto.

Agora, fazendo uso dos mesmos materiais, produz as **laterais** do prisma.

Na figura 8 abaixo temos o desenho da face ABCD, uma das laterais do prisma.

Figura 8: Construção de face lateral do prisma

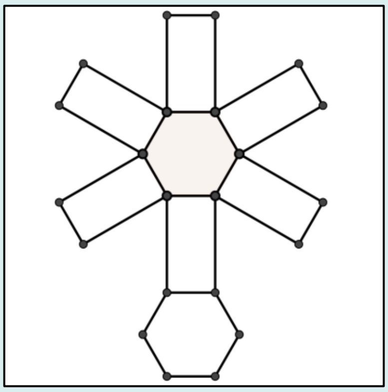


Fonte: Autores, 2022.

Para construção de uma das faces laterais do prisma, inicialmente traça um segmento de reta maior para auxiliar no desenho, e um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre essa reta maior. Em seguida, coloca o compasso com a ponta seca em B e raio menor que o centro da reta $\overline{AB}$, e traça dois pontos sobre a reta. Em seguida, colocando o compasso sobre um dos pontos traçados e com raio maior que a distância entre ele e B, traça-se um arco, mantendo o compasso com essa medida de raio e, repetindo o processo colocando o compasso no outro ponto e traça-se um arco. Dessa forma, é obtido um ponto na interseção desses dois arcos que permite desenhar uma reta perpendicular com a reta $\overline{AB}$ e passe pelo ponto B. Por fim, para obter o ponto C, abre o compasso de B até A, coloca a ponta seca do compasso em D para traçar um arco. Repete o processo com o compasso aberto de B até D, retira para colocar em A e traçar um arco. O encontro desses dois arcos será o ponto C. Dessa forma, tem-se uma das faces $ABCD$ para lateral do prisma. Poderá ser repetido o processo para fazer as outras faces ou utilizar a que foi feita como modelo para produzir as demais faces, basta recortar e desenhar ao redor da base.

Na sequência, para fazer a planificação do prisma, é possível recortar o modelo feito anteriormente para produção das laterais e desenhar ao redor da base feita inicialmente. Ficando da seguinte forma:

Figura 9: Planificação do Prisma com Base Hexagonal Regular



Fonte: Autores, 2022.

Após recortar e colar, tem-se o prisma com base hexagonal regular.

Figura 10: Prisma com Base Hexagonal Regular

Fonte: Autores, 2022.

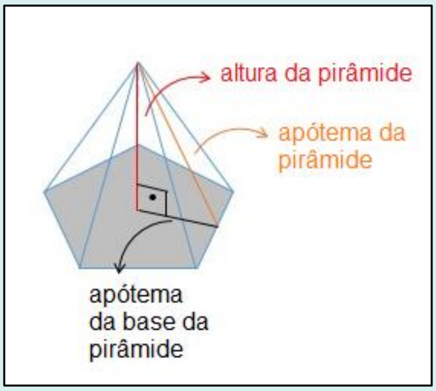
O volume de um prisma é dado pela quantidade de bases empilhadas, isto é, $\boldsymbol{V_{prisma} = A_{base} \cdot h}$. No caso do prisma hexagonal construído e a área da base é $\boldsymbol{A_{base\ do\ prisma\ hexagonal} = 6 \cdot A_{triângulo}}$, logo, $\boldsymbol{V_{prisma\ hexagonal} = (6 \cdot A_{triângulo}) \cdot h}$.

Agora, reconstruiremos uma **Pirâmide com Base Hexagonal Regular**.

Para construção da base desta pirâmide, como ela deverá ser igual a base do prisma feito anteriormente, basta repetir os passos para construção do hexágono regular.

Enfatizamos que a altura dos triângulos que compreendem a face lateral da pirâmide não é igual a altura da pirâmide devido a inclinação destas faces. Para encontrar a altura da pirâmide deve-se recorrer ao Teorema de Pitágoras, onde a hipotenusa é a altura do triângulo da face lateral, isto é, a apótema da pirâmide, o cateto menor é a apótema da base da pirâmide, ou seja, o segmento que liga uma face lateral até o centro da base. Observe a figura 11 a seguir.

Figura 11: Segmentos da pirâmide



Fonte: Autores, 2022.

De acordo com a figura 11, usando o Teorema de Pitágoras, têm-se:

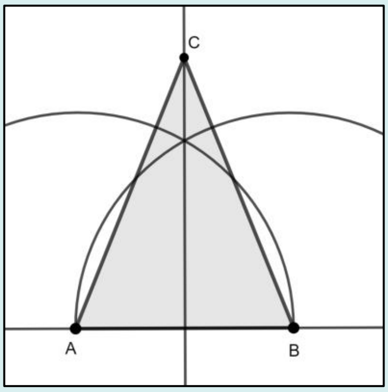
$$\left(\boldsymbol{Ap\acute{o}tema}_{\boldsymbol{pir\hat{a}mide}}\right)^{2}=\left(\boldsymbol{Altura}_{\boldsymbol{pir\hat{a}mide}}\right)^{2}+\left(\boldsymbol{Ap\acute{o}tema}_{\boldsymbol{base\ da\ pir\hat{a}mide}}\right)^{2}$$

$$\left(\boldsymbol{Altura}_{\boldsymbol{pir\hat{a}mide}}\right)^{2}=\left(\boldsymbol{Ap\acute{o}tema}_{\boldsymbol{pir\hat{a}mide}}\right)^{2}-\left(\boldsymbol{Ap\acute{o}tema}_{\boldsymbol{base\ da\ pir\hat{a}mide}}\right)^{2}$$

$$\boldsymbol{Altura}_{\boldsymbol{pir\hat{a}mide}}=\sqrt{\left(\boldsymbol{Ap\acute{o}tema}_{\boldsymbol{pir\hat{a}mide}}\right)^{2}-\left(\boldsymbol{Ap\acute{o}tema}_{\boldsymbol{base\ da\ pir\hat{a}mide}}\right)^{2}}$$

A face deverá ser produzida conforme figura 12 abaixo.

Figura 12: Face da pirâmide



Fonte: Autores, 2022.

Para produção das demais faces da pirâmide, fará uso da régua, lápis e compasso. Inicialmente traça-se um segmento de reta $\overline{AB}$. Com a ponta seca do compasso no ponto A e uma abertura igual a $\overline{AB}$, traça-se um arco cujo raio será igual a $\overline{AB}$. Em seguida, com a ponta seca em B e mesma abertura $\overline{AB}$, descreve um outro arco, que intersecta o primeiro num ponto C. Por fim, se deve traçar uma reta que passe no centro da reta $\overline{AB}$ e passe pelo ponto intersectado dos arcos, será a altura da face e o vértice dessa reta será o ponto C. Por fim, basta traçar AC e BC formando o triângulo ABC.

Figura 14: Pirâmide com base hexagonal regular confeccionada

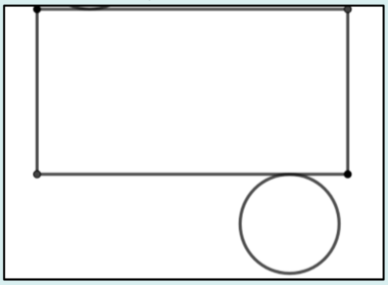
Fonte: Autores, 2022.

Ao encher esta pirâmide com grãos e transferir para o prisma hexagonal de mesma base e altura, constatará que cabe exatamente três volumes de pirâmides dentro do prisma. Uma vez que o volume do prisma é dado por $\boldsymbol{V_{prisma}} = \boldsymbol{A_{base}} \cdot \boldsymbol{h}$, então o **volume da pirâmide** é dado pela fórmula $\boldsymbol{V_{pirâmide}} = \frac{\boldsymbol{V_{prisma}}}{\boldsymbol{3}}$ ou $\boldsymbol{V_{pirâmide}} = \frac{(\boldsymbol{Ab \cdot h})}{\boldsymbol{3}}$.

Para reconstrução do **Cilindro** de forma acessível e com baixo custo, também será preciso compasso e lápis para, inicialmente, fazer a base do cilindro traçando um círculo com determinada medida de raio.

O comprimento desta circunferência é dado por 2πR. Este valor será exatamente a medida da base da faixa retangular que pertencerá ao cilindro. Para a produção desta faixa retangular lateral, pode se usar os passos iguais a produção da lateral do prisma de base hexagonal regular, ficando a planificação como na figura 14. Vale lembrar que visto o objetivo de utilizar esses sólidos para comparar os volumes, no material produzido uma das bases não foi construída para deixá-lo aberto.

Figura 15: Planificação de cilindro circular reto



Fonte: Autores, 2022.

Após recortar e colar, tem-se o cilindro.

Figura 16: Cilindro

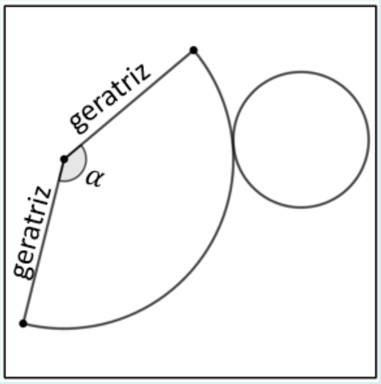
Fonte: Autores, 2022.

O volume de um cilindro é análogo ao volume do prisma, ou seja, é dado pelo produto entre a área da base e sua altura. Sendo a base sempre um círculo e a área de um círculo dado por πR^2, temos então $\boldsymbol{V_{cilindro} = \pi R^2 h}$.

Para construção do **cone** cujo volume será relacionado com o cilindro é preciso que contenha o mesmo raio de base do cilindro produzido anteriormente, logo, realiza-se o mesmo procedimento anterior para construção da base.

Na figura 16 a seguir é exibido a planificação de um cone circular reto.

Figura 17: Planificação de cone circular reto



Fonte: Autores, 2022.

De forma análoga a pirâmide, o comprimento da geratriz mostrada na figura 16 não é igual a altura do cone. Uma vez que já se sabe o valor da altura deste cone, pois deve ser a mesma do cilindro construído anteriormente, encontra-se então, o valor da geratriz através do Teorema de Pitágoras, da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{geratriz^2 = altura\ do\ cone^2 + raio\ da\ base^2}$$

$$\boldsymbol{geratriz = \sqrt{altura\ do\ cone^2 + raio\ da\ base^2}}$$

Uma vez determinado o valor da geratriz, abre-se o compasso no tamanho igual a medida da geratriz e traça-se um arco que terá medida igual a medida da circunferência da base.

Caso não seja possível abrir o compasso na medida da geratriz devido ao seu formato ou limitação de tamanho, pode-se traçar o arco de outra forma. Primeiramente, encontra-se o ângulo α através de uma regra de três simples:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot Geratriz}{2 \cdot \pi \cdot Raio\ da\ base} = \frac{360°}{\alpha}$$

Com uma régua, traça-se um segmento de reta de tamanho igual a geratriz. Usa-se um transferidor para medir o ângulo α encontrado a partir desta geratriz. Traça-se outro segmento de reta de mesmo tamanho da geratriz ao fim do ângulo α. Usa-se um barbante para traçar o arco entre as duas geratrizes, fixando uma extremidade do barbante na origem dos dois segmentos de reta e esticando-o até percorrer toda a geratriz. Movimente o barbante entre as duas geratrizes de modo a traçar o arco da figura 16 anterior.

Vale lembrar que é necessário ter um cone aberto, logo, foi construído sem a base circular. Após recortar e colar a planificação, temos nosso cone.

Figura 18: Cone circular reto

Fonte: Autores, 2022.

Comparando os volumes dos cones e cilindros de mesma base e altura, constata-se que o volume do cone é 1/3 do volume do cilindro, logo $\boldsymbol{V_{cone}} = \frac{V_{cilindro}}{3}$ ou $\boldsymbol{V_{cone}} = \frac{(\pi \cdot r^2 \cdot h)}{3}$.

Nos sólidos reproduzidos, foram utilizados papel cartão, um material mais grosso que apresenta uma maior resistência, porém, pode ficar um pouco amassado ou curvado sendo necessário durante o uso segurar com as mãos de forma a deixar reto.

Sugere-se em todos os sólidos deixar uma ou mais abas adjacentes aos vértices das faces para poder conseguir fechar melhor seja com cola, com fita adesiva ou grampeador.

Um exemplo de atividade é a produção de determinados sólidos pelos alunos para a comparação de volumes em que deverão aplicar alguns conhecimentos acerca do cálculo de áreas e volumes.

O professor deve pedir que cada aluno ou grupos de alunos construam inicialmente um prisma e uma pirâmide de mesma base e altura. Após construções, o docente pede que cada grupo encha a pirâmide com grãos de arroz e despeje o conteúdo dentro do prisma conforme figura 18 a seguir.

Figura 19: Comparação de volume entre pirâmide e prisma, utilizando arroz

Fonte: Autores, 2022.

Este processo deve se repetir até o prisma estiver totalmente cheio. Por fim, cada grupo deve apresentar seus sólidos e informar quantos volumes de pirâmide coube dentro do prisma. É esperado, então, que a turma conclua que independente da altura e da base, sempre caberá três volumes de pirâmides dentro de um prisma que contenham mesma base e mesma altura. Isto significa dizer que o volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma.

A mesma atividade pode ser feita para comparar volume de cilindro e cones. No caso das esferas, pode-se utilizar semiesfera de isopor e construir um cone cuja altura e raio de base sejam iguais ao raio da esfera utilizada.

REFERÊNCIAS PARA SABER MAIS:

ANDRADE, Fabiana Chagas de. **Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio**. Ronaldo da Silva Busse. 2014. 63f. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT), UNIRIO, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/metodologia-do-ensino-de-matematica-ii/materiais-concretos/solidos-geometricos-construcao. Acesso em: 10 set. 2022.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy; CÂMARA; Paulo Roberto. **Prisma matemática**: geometria – ensino médio. São Paulo: FTD, 2020.

MIRANDA, Dilene Gomes de. **Produto educacional vinculado à Dissertação: Modelo dos campos semânticos: produção de significados para as noções de áreas e perímetros no ensino fundamental II** [Manuscrito]/Dilene Gomes de Miranda. 2017. 30f. Acesso em: 10 de set. 2022.

SMOLE, Kátia Stocco. DINIZ, Maria Ignez. **Ser protagonista**: geometria plana e espacial. São Paulo: Edições SM, 2020. (p.72-99)