Nome: ______________________________ Nº _____

Curso: Licenciatura em Matemática

Disciplina: Equações Diferenciais Ordinárias

7ºPeríodo	**Prof. Leonardo**	**Data:__ /__ /2018**

Equações Ordinarias 1ªOrdem - Lineares

1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1.1 - Introdução

Muitas vezes em física, engenharia e outros ramos técnicos, há necessidade de encontrar uma função incógnita. Em muitos casos esta pesquisa leva a uma equação envolvendo derivadas (ou diferenciais) da função incógnita. Tais equações envolvendo derivadas (ou diferenciais) são chamadas **equações diferenciais**, em que a incógnita não é um número, mas uma função.

Aplicação em Física

Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante Tm do meio ambiente, isto é:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm),$$

em que k é uma onstante de proporcionalidade.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um ovo duro, a $98°\ C$, é colocado em uma pia contendo água a $18°\ C$. Depois de 5 minutos, a temperatura do ovo é de $38°\ C$. Suponha que durante o experimento a temperatura da água não aumente apreciavelmente, quanto tempo a mais será necessário para que o ovo atinja $20°\ C$?

Solução :

$Tm = 18°\ C$

$T(0) = 98°\ C$

$T(5) = 38°\ C$

$t = ?\ qdo\ T\ (t) = 20°\ C$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - 18) \Rightarrow \frac{dT}{T - 18} = k\ dt$$

Resolvendo essa equação diferencial, obtemos $t \simeq 13$ minutos.

Simbolicamente, uma equação diferencial pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'', \dots, \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{n})) = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = \mathbf{0}.$$

1.2 - CLASSIFICAÇÃO DAS EDOs

1.2.1 - Classificação quanto ao tipo:

Se a função incógnita depende apenas de uma variável, temos uma ***equação diferencial ordinária***. Se depender de mais de uma variável, temos uma ***equação diferencial parcial***.

EXEMPLOS:

$(I)\ \frac{dy}{dx} = x^2y$

$(II)x^2\frac{d^3y}{dx^3} + 2y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 3 = 0$

$(III)\ \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

$(IV)\ \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial t^2} = 0\ , onde\ u = (x,t)$

1.2.2 - Classificação quanto a ordem:

A ***ordem*** de uma equação diferencial é o número n que corresponde à ordem máxima das derivadas da equação.

- Na expressão (I) acima, a equação tem ordem 1 e na expressão (III), ordem 2.

OBS : O ***grau*** de uma equação diferencial é a maior potência da derivada de maior ordem.

1.2.3 - Classificação quanto a linearidade:

Uma equação diferencial é chamada linear se pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d^1y}{dx^1} + a_0(x)y = g(x)$$

- ✓ As variaveis dependentes de y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, cada potência de um termo envolvendo y e igual a 1.
- ✓ Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

EXEMPLOS

$(I)\ xdy + ydx = 0$ $\quad$ $(II)\ y'' - 2y' + y = 0$ $\quad$ (III) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 6y = e^{3x}$

Uma equacão que não é linear é dita não-linear

EXEMPLOS

$(I)\ xy'' + yy' = 0$ $(II)\ y'' - 2y' + xy = 0$ $(III)\ x^3\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)^4 - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + 6y = e^{3x}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determinar o grau e a ordem de cada uma das seguintes equações diferenciais.

$(I)\ \frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ (II) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$

Solução:

A Equação (I) é uma equação diferencial de primeiro grau de ordem 2 porque $\frac{d^2y}{dx^2}$ é a derivada de maior ordem na equação e está elevada à primeira potência. Notar que a terceira potência de $\frac{dy}{dx}$ não tem influência no grau da Equação (I) porque $\frac{dy}{dx}$ é de menor ordem que $\frac{d^2y}{dx^2}$.

A Equação (II), por outro lado, é uma equação diferencial de segundo grau e primeira ordem; $\frac{dy}{dx}$ é a derivada de maior ordem (ordem 1) e 2 é a maior potência de $\frac{dy}{dx}$aparecendo na equação.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – TIPO, ORDEM e LINEARIDADE

01. Classifique as Equações Diferenciais de acordo com os critérios de ordem e linearidade:

a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = senx$

b) $(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x$

c) $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 1$

d) $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$

e) $\frac{d^2y}{dx^2} + sen(x+y) = senx$

f) $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + (cos^2x)y = x^3$

02. Classifique as Equações Diferenciais de acordo com os critérios de ordem e grau:

a) $(y''')^4 + (y')^2 + 6y = x^3$

b) $y''' + 3y' + 5 = 0$

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x^2 - 3y = 0$

d) $5\left(\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}\right)^2 + 7\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 10x = 0$

03. Classifique cada equação a seguir dizendo se elas são lineares ou não-lineares e dê também a sua ordem.

a) $(1+x)y'' - 4sen(x)y' + 5y = \cos(x)$

b)$x^3y^{(4)} + x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

c)$y^{(3)}y^5 + x^2y' = x$

d)$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

GABARITO – TIPO,ORDEM e LINEARIDADE

01	**a) Ordem 2/Linear** **b) Ordem 2/Não Linear** **c) Ordem 4/Linear** **d) Ordem 1/Não Linear** **e) Ordem 2/Não Linear** **f) Ordem 3/Linear**	**02**	**a) Ordem 3/Grau 4** **b) Ordem 3/Grau 1** **c) Ordem 2/Grau 1** **d) Ordem 3 /Grau 2**	**03**	**a) Linear/Ordem 2** **b) Linear/Ordem 4** **c) Não Linear/Ordem 3** **d) Não Linear/Ordem 2**

1.3 – SOLUÇÃO DE UMA EDO

Uma ***solução*** de uma equação diferencial é uma função y= f (x) a qual, juntamente com as suas derivadas, satisfaz a equação diferencial dada.

EXEMPLO 1

A função $y = e^{2x}$ é uma solução para a equação linear $y'' - 5y' + 6y$ = 0.

Solução:

De fato, calculando y' e y'' temos

$$y' = 2e^{2x} \text{ e } y'' = 4e^{2x}$$

Onde substituindo no lado esquerdo da EDO dada, temos

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x} - 5.2e^{2x} + 6e^{2x} = 0$$

Que é justamente o lado direito.

EXEMPLO 2

A função $y = x^2 + 2x$ não é solução para a EDO $y' = 2x + 1$ em nenhum intervalo real.

Solução:

$$y = x^2 + 2x \Longrightarrow y' = 2x + 2 \neq 2x + 1,$$

para todo x real.

EXEMPLO 3

Verifique que a função $y - \frac{3}{x} = 1$ é uma solução no intervalo $(0, +\infty)$ da EDO de primeira ordem

$$xdy = (1 - y)dx.$$

Solução:

Devemos reorganizar a EDO $xdy = (1 - y)dx$, que fica melhor escrita assim:

$$xdy = (1 - y)dx \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = 1 - y.$$

Além disso, $y = 1 + \frac{3}{x}$. Note que $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^2}$, donde obtemos

$$x\frac{dy}{dx} = x\left(-\frac{3}{x^2}\right) \Leftrightarrow -\frac{3}{x} = 1 - 1 - \frac{3}{x} = 1 - \left(1 + \frac{3}{x}\right) = 1 - y.$$

EXEMPLO 4

Verifique que $y = 4.e^{-x} + 5$ é uma solução da equação diferencial de segunda ordem e primeiro grau $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$.

Observando que $\frac{dy}{dx} = -4e^{-x}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{-x}$ e substituindo na equação diferencial dada, temos:

$$4e^{-x} + (-4e^{-x}) = 0$$

A solução $y = 4.e^{-x} + 5$ no exemplo 4 acima é um exemplo de uma ***solução particular*** de uma equação diferencial. Podemos verificar que $y = 4.e^{-x} + 3$ é também uma **solução particular** da equação diferencial no exemplo 4. Deste modo, uma equação diferencial pode ter mais do que uma solução particular.

Uma solução $y = f(x)$ de uma equação diferencial de ordem $\boldsymbol{n}$ contendo $\boldsymbol{n}$ constantes arbitrárias é chamada uma ***solução geral***. Assim, a solução exemplo 4 , $y = 4.e^{-x} + C$ é um exemplo de uma solução geral.

Uma solução particular pode ser obtida se forem dadas certas condições iniciais. Uma ***condição inicial*** de uma equação diferencial é uma condição que especifica um valor particular de y, y_o, correspondente a um valor particular de x, x_o. Isto é, se $y = f(x)$ pode ser uma solução da equação diferencial, então a função deve satisfazer a condição: $y_o = \mathrm{f}(x_o)$. O problema de ser dada uma equação diferencial com condições iniciais é chamado um ***problema de valor inicial.***

Um estudo completo de equações diferenciais incluiria um estudo de equações diferenciais de todos os graus e equações diferenciais parciais e ordinárias. Limitamos deste modo as nossas considerações às equações diferenciais ordinárias do primeiro grau.

EXEMPLO RESOLVIDO

Mostre que $y = C.e^{-2x}$ é uma solução para a equação diferencial $y' + 2y = 0$ e encontre a solução particular determinada pela condição inicial $y(0) = 3$.

Sabemos que $y = C.e^{-2x}$ é solução porque $y = C.e^{-2x}$ e $y' + 2y = -2.C.e^{-2x} + 2.(C.e^{-2x}) = 0$.

Usando a condição inicial $y(0) = 3$, ou seja, $y = 3$ e $x = 0$, obtêm:

$$y = C.e^{-2x} \Longrightarrow 3 = C.e^{-2.0} \Longrightarrow \mathrm{C} = 3$$

e concluímos que a solução particular é $y = 3.e^{-2x}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – SOLUÇÃO DE UMA EDO e PROBLEMA DO VALOR INICIAL

01. Verificar que cada uma das funções dadas $y = f(x)$ é uma solução da equação diferencial dada.

a) $\frac{dy}{dx} = 3 \; e \; y = 3x - 7$

b) $x\frac{dy}{dx} = x^2 + y \; e \; y = x^2 + Cx$

c) $\frac{dy}{dx} + y + 2x + 4 = x^2 \; e \; y = x^2 - 4x$

d) $x\frac{dy}{dx} - 2y = 4x \; e \; y = x^2 - 4x$

e) $\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 \; e \; y = x^5 + 3x - 2$

f) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \; e \; y = 2senx + 3cosx$

02. Determine uma solução particular para cada uma das seguintes equações diferencial sujeitas às condições iniciais dadas.

a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4 - 9x^2 - 6x^5 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = cosx \\ y(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (2x - 1)^5 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

***GABARITO* – SOLUÇÃO DE UMA EDO e PROBLEMA DO VALOR INICIAL**

01	**a) Discursiva** **b) Discursiva** **c) Discursiva** **d) Discursiva** **e) Discursiva** **f) Discursiva**	**02**	**a)** $y = 4e^x - 3$ **b)** $y = 4x - 3x^3 - x^6 + 2$ **c)** $y = senx + 1$ **d)** $y = \frac{(2x-1)^6}{12} + \frac{23}{12}$

1.2.4 Equações Diferenciais Lineares de Primeira ordem

Definimos a forma geral para uma equação diferencial linear de ordem n como,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d^1 y}{dx^1} + a_0(x)y = g(x)$$

Lembre-se de que linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x somente e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Agora, quando $n = 1$, obtemos uma equação linear de primeira ordem.

1.2.5 - Solução de uma Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem

Um fator integrante para a equação diferencial linear de primeira ordem $\boldsymbol{y' + P(x).y = Q(x)}$ é $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$. A solução da equação diferencial é $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x).e^{-\int P(x)dx}dx + C\right]$.

Exemplo Encontre a solução geral de $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$.

Solução Escreva a equação como

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$$

Como $P(x) = -\frac{4}{x}$, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4lnx} = x^{-4}$.

Aqui, usamos a identidade básica $b^{\log_b N} = N, N > 0$. Agora, multiplicamos por este termo

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - x^{-4}\frac{4}{x}y = x^{-4}x^5 e^x.$$

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x$$

e obtemos

$$\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x$$.

Segue-se da integração por partes que $x^{-4}y = xe^x - e^x + c$ ou $y(x) = x^5 e^x - x^4 e^x + cx^4$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES

01. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

a) $(x^2 - 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

b) $y' + 3x^2y = x^2$

c) $\frac{dy}{dx} = 5y$

d) $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

e) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

f) $xy' + 2y = 3$

g) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2senx$

h) $x^2y' + xy = 1$

i) $\frac{dy}{dx} + y = x$

j) $xy' + 2y = senx$

k) $y' - y = 2e^{2x}$

l)$x^2y' + 2xy = cosx$

m) $y' - 2xy = x$

02.Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

a) $\begin{cases} y' - y = 2xe^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' + 2y = xe^{-2x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2y' + 2xy = cosx \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

GABARITO **– RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES**

01	a) $y = \frac{c}{\sqrt{x^2-9}}$ b) $y = ce^{-x^3} + \frac{1}{3}$ c) $y = ce^{5x}$ d) $y = ce^{-2x}$ e) $y = \frac{e^{3x}}{4} + ce^{-x}$ f) $y = \frac{c}{x^2} + \frac{3}{2}$ g)$y = cx - xcosx$ h)$y = \frac{c}{x} + \frac{lnx}{x}$ i)$y = ce^{-x} + x - 1$ j)$y = \frac{c}{x^2} + \frac{senx}{x^2} - \frac{cosx}{x}$ k)$y = ce^{x} + 2e^{2x}$ l)$y = \frac{c}{x^2} + \frac{senx}{x^2}$ m)$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$	**02**	a) $y = e^x(2e^x(x-1) + 3)$ b) $y = \frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 - 1)$ c) $y = -x + 2e^x - 1$ d)$y = \frac{senx}{x^2}$ e) $y = \frac{1}{1-x}$