



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
RIO GRANDE DO NORTE

Nome: \_\_\_\_\_ N° \_\_\_\_\_

Curso: Geologia Integrado

Disciplina: Matemática II

2º Ano

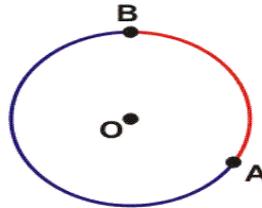
Prof. Leonardo

Data: \_\_ / \_\_ / 2018

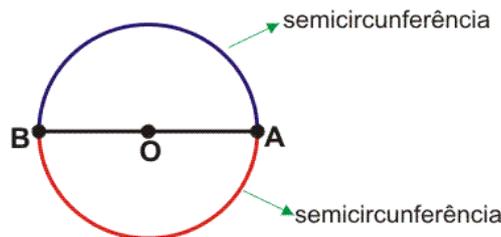
## Trigonometria - Parte I

### 1.1 - Arcos de circunferência

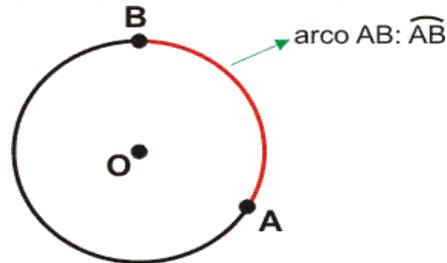
Arco de circunferência é cada uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos. Esses dois pontos são chamados de extremos e dividem a circunferência em um arco maior e um arco menor.



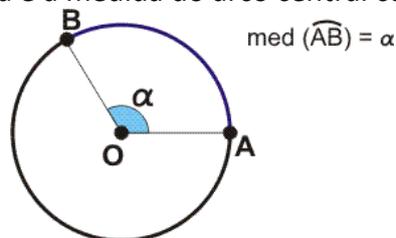
Se as extremidades de um arco coincidem com as extremidades de um diâmetro, cada um dos arcos denomina-se semicircunferência.



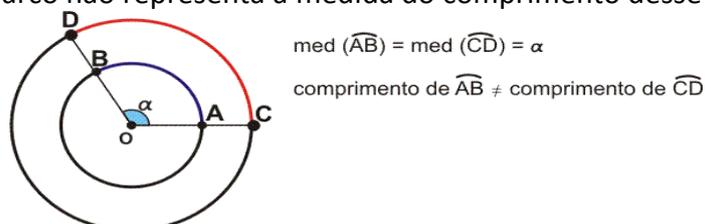
Geralmente, indicamos os arcos menores de uma semicircunferência apenas pelos extremos.



A medida de um arco de circunferência é a medida do arco central correspondente.



Note que a medida de um arco não representa a medida do comprimento desse arco:



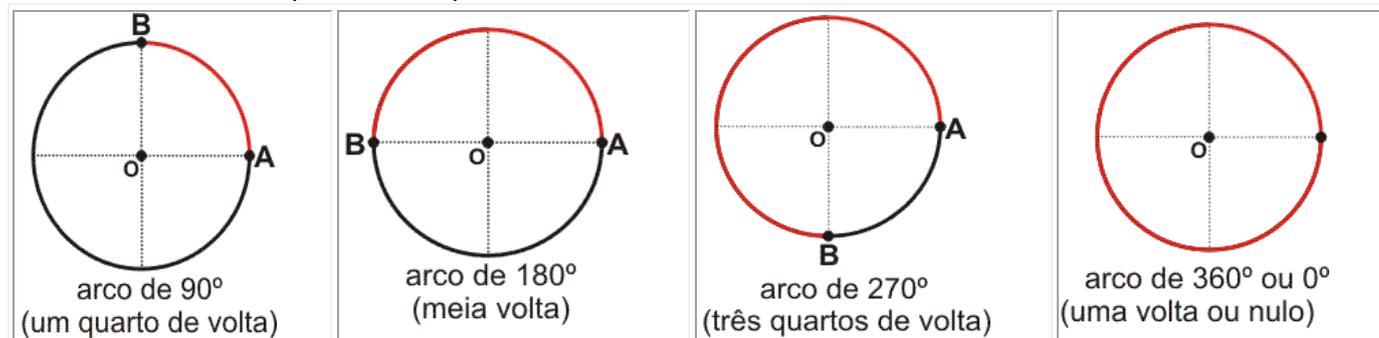
Para expressar a medida de um arco, as unidades mais utilizadas são o grau e o radiano.

## 1.2 - Tipos de Ângulos

### 1.2.1 - Grau

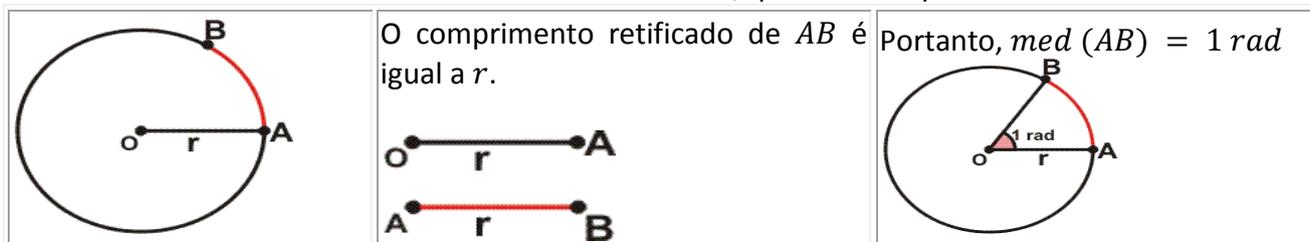
Quando dividimos uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um arco de um grau ( $1^\circ$ ). Isso significa que a circunferência possui  $360^\circ$ .

Considere o arco  $AB$  que vai de  $A$  para  $B$  no sentido anti-horário:

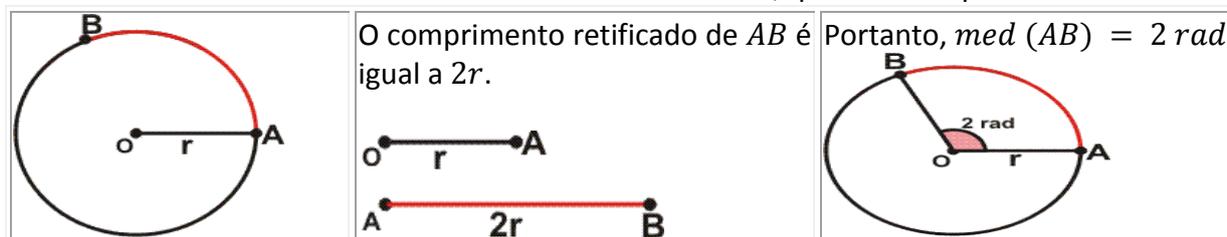


### 1.2.2 - Radiano

Um arco de um radiano ( $1 \text{ rad}$ ) é o arco cujo comprimento é igual à medida da circunferência que o contém. Vamos considerar uma circunferência de raio  $r$  e o arco  $AB$ , que tem comprimento  $r$ :



Agora vamos considerar uma circunferência de raio  $r$  e o arco  $AB$ , que tem comprimento  $2r$ :



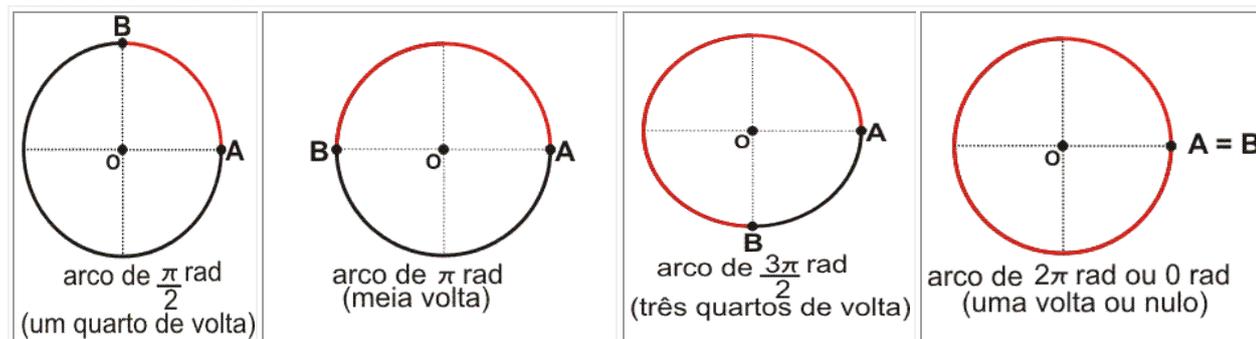
Para determinar a medida de um arco em radianos, basta dividir o comprimento do arco pela medida do raio da circunferência. Por exemplo, a medida de um arco  $AB$  de comprimento  $14 \text{ cm}$ , contido numa circunferência de raio igual a  $7 \text{ cm}$ , é  $2 \text{ rad}$ , pois:

$$med(AB) = \frac{\text{comprimento } AB}{r} = \frac{14 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 2 \text{ rad}$$

Como o comprimento da circunferência é  $C = 2\pi r$ , a medida de toda a circunferência é:

$$\alpha = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

Sendo assim temos:





**04. (Uepg 2014)** Sobre arcos e ângulos, assinale o que for correto.

- 01) O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 1 hora e 40 minutos é  $170^\circ$ .  
02) Um trem desloca-se na velocidade constante de  $60\text{km/h}$  num trecho circular de raio igual a  $500\text{m}$ . Então, em um minuto ele percorre um arco de  $2\text{rad}$ .  
04) Uma pessoa caminhando em volta de uma praça circular descreve um arco de  $160^\circ$  ao percorrer  $120\text{m}$ . O diâmetro da praça é maior que  $100\text{m}$ .  
08) Em 50 minutos, o ponteiro dos minutos de um relógio percorre  $\frac{5\pi}{3}\text{rad}$ .

**05. (Unesp 2014)** A figura mostra um relógio de parede, com  $40\text{ cm}$  de diâmetro externo, marcando 1 hora e 54 minutos.



(www.euroferragens.com.br)

Usando a aproximação  $\pi = 3$ , a medida, em  $\text{cm}$ , do arco externo do relógio determinado pelo ângulo central agudo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos, no horário mostrado, vale aproximadamente

- a) 22.
- b) 31.
- c) 34.
- d) 29.
- e) 20.

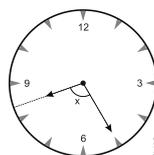
**06. (G1 - ifce 2014)** Considere um relógio analógico de doze horas. O ângulo obtuso formado entre os ponteiros que indicam a hora e o minuto, quando o relógio marca exatamente 5 horas e 20 minutos, é

- a)  $330^\circ$ .
- b)  $320^\circ$ .
- c)  $310^\circ$ .
- d)  $300^\circ$ .
- e)  $290^\circ$ .

**07. (Ifsp 2013)** Considere uma circunferência de centro  $O$  e raio  $6\text{ cm}$ . Sendo  $A$  e  $B$  pontos distintos dessa circunferência, sabe-se que o comprimento de um arco  $AB$  é  $5\pi\text{ cm}$ . A medida do ângulo central  $A\hat{O}B$ , correspondente ao arco  $AB$  considerado, é

- a)  $120^\circ$ .
- b)  $150^\circ$ .
- c)  $180^\circ$ .
- d)  $210^\circ$ .
- e)  $240^\circ$ .

**08. (G1 - cftmg 2013)** Se o relógio da figura marca 8 h e 25 min, então o ângulo  $x$  formado pelos ponteiros é



- a)  $12^\circ 30'$ .
- b)  $90^\circ$ .
- c)  $102^\circ 30'$ .
- d)  $120^\circ$ .

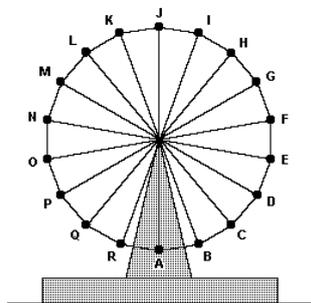
**09. (Udesc 2012)** O relógio *Tower Clock*, localizado em Londres, Inglaterra, é muito conhecido pela sua precisão e tamanho. O ângulo interno formado entre os ponteiros das horas e dos minutos deste relógio, desprezando suas larguras, às 15 horas e 20 minutos é:

- a)  $\frac{\pi}{12}$                       b)  $\frac{\pi}{36}$                       c)  $\frac{\pi}{6}$                       d)  $\frac{\pi}{18}$                       e)  $\frac{\pi}{9}$

**10. (Unemat 2010)** Quanto ao arco  $4555^\circ$ , é correto afirmar.

- a) Pertence ao segundo quadrante e tem como cômplemento o ângulo de  $55^\circ$   
 b) Pertence ao primeiro quadrante e tem como cômplemento o ângulo de  $75^\circ$   
 c) Pertence ao terceiro quadrante e tem como cômplemento o ângulo de  $195^\circ$   
 d) Pertence ao quarto quadrante e tem como cômplemento o ângulo de  $3115^\circ$   
 e) Pertence ao terceiro quadrante e tem como cômplemento o ângulo de  $4195^\circ$

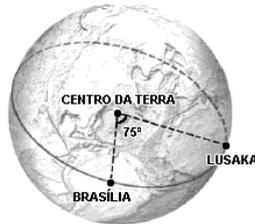
**11. (G1 - cps 2008)** A roda-gigante de um parque de diversões tem dezoito cadeiras, igualmente espaçadas ao longo do seu perímetro e move-se no sentido anti-horário, isto é, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.



Na figura, as letras A, B, C, ... e R indicam as posições em que as cadeiras ficam cada vez que a roda gigante para. Com a roda gigante parada, Bruna senta-se na cadeira que está na posição A, posição mais baixa da roda gigante. A roda gigante move-se  $\frac{5}{6}$  de uma volta e para. Nesse momento, a letra relativa à posição da cadeira ocupada por Bruna é

- a) D.                      b) I.                      c) K.                      d) P.                      e) R.

**12. (Uel 2006)** Os primeiros relógios baseavam-se no aparente movimento do Sol na abóboda celeste e no deslocamento da sombra projetada sobre a superfície de um corpo iluminado pelo astro. Considere que: a Terra é esférica e seu período de rotação é de 24 horas no sentido oeste-leste; o tempo gasto a cada  $15^\circ$  de rotação é de 1 hora; o triângulo Brasília/Centro da Terra/Luzaka (Zâmbia) forma, em seu vértice central, um ângulo de  $75^\circ$ .

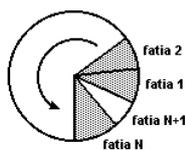


A hora marcada em Luzaka, num relógio solar, quando o sol está a pino em Brasília é:

- a) 5 horas.  
 b) 9 horas.  
 c) 12 horas.  
 d) 17 horas.  
 e) 21 horas.

**13. (Ufscar 2005)** Uma pizza circular será fatiada, a partir do seu centro, em setores circulares. Se o arco de

cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo N de fatias idênticas, sobrando, no final, uma fatia menor, que é indicada na figura por fatia N+1.



Considerando  $\pi = 3,14$ , o arco da fatia N+1, em radiano, é

- a) 0,74.
- b) 0,72.
- c) 0,68.
- d) 0,56.
- e) 0,34.

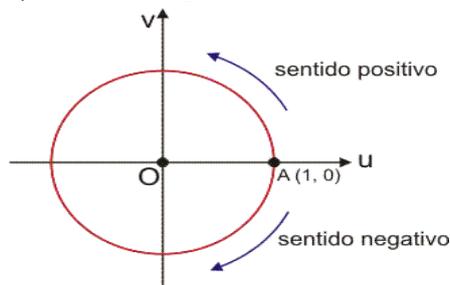
**GABARITO**

01	09	02	D	03	B
04	11	05	B	06	B
07	B	08	C	09	E
10	E	11	D	12	D
13	C				

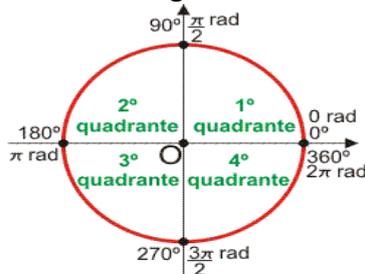
**1.5 - Circunferência trigonométrica**

Denomina-se circunferência trigonométrica a circunferência com as seguintes características:

- ✓ O sentido positivo é o anti-horário e o raio é 1 unidade de comprimento
- ✓ Associando-se um sistema de coordenadas cartesianas à circunferência de centro  $O$ , fixa-se o ponto  $A$  de coordenadas  $(1, 0)$  como a origem dos arcos.



Os eixos do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes iguais, chamadas de quadrantes, numeradas a partir do ponto  $A$ , no sentido anti-horário. Observe as extremidades dos quadrantes do ciclo trigonométrico em graus e radianos:

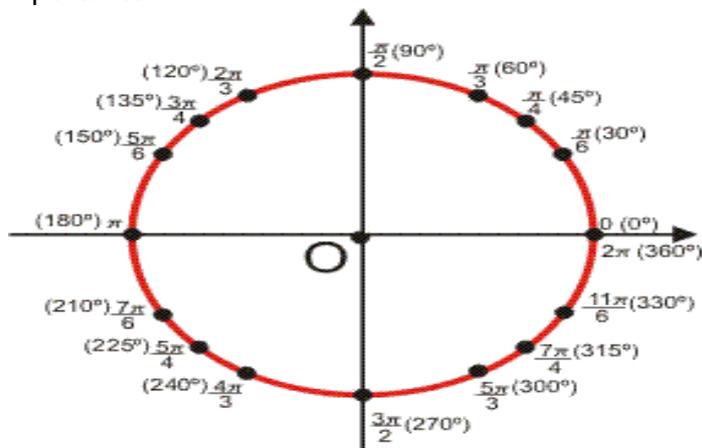


Como a circunferência trigonométrica tem raio igual a 1, a medida em radianos de um arco é igual ao seu comprimento, pois, como vimos anteriormente, a medida de um arco  $\alpha$  em radianos é a razão entre o comprimento e o raio desse arco .

$$\alpha = \frac{\text{comprimento do arco}}{r} = \frac{\text{comprimento do arco}}{1} = \text{comprimento do arco}$$

Isso significa que, quando o nosso ambiente é a circunferência trigonométrica, não precisamos escrever  $\alpha$  rad. Basta escrevermos apenas  $\alpha$  para nos referirmos ao arco cuja medida é  $\alpha$  radianos.

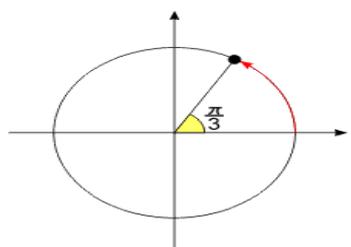
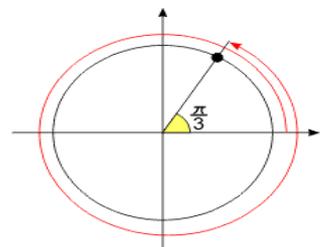
Como a origem de todos os arcos trigonométricos é a mesma, indicamos cada arco pelo ponto que representa a sua outra extremidade. Veja abaixo a circunferência trigonométrica com os pontos que representam alguns arcos importantes:



### 1.6 - Arcos Côngruos

Toda vez que um ponto da circunferência que representa a extremidade de um arco for o mesmo para dois arcos diferentes, dizemos que estes dois arcos são côngruos.

Por exemplo:

<p>Considere um arco de medida <math>\frac{\pi}{3}</math> rad.</p> 	<p>Um arco de medida <math>\frac{\pi}{3} + 2k\pi</math> tem extremidade no mesmo ponto, pois percorremos uma volta completa, retornando a origem, e depois mais <math>\frac{\pi}{3}</math>.</p> 
--	--

Assim, os arcos de medidas  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  são côngruos

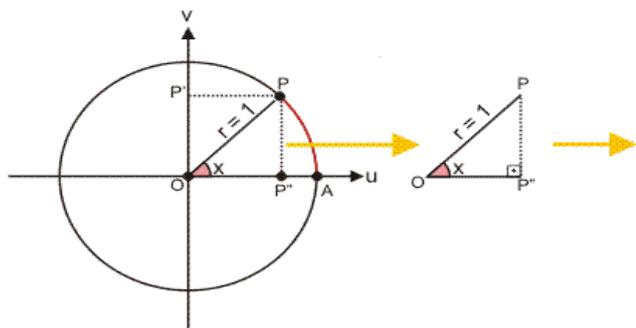
Dois arcos são côngruos quando a diferença entre eles é um múltiplo de  $2\pi$  rad ( $360^\circ$ ).

Por exemplo:

- ✓  $45^\circ$  e  $405^\circ$  são côngruos, pois  $405^\circ - 45^\circ = 360^\circ$
- ✓  $\frac{14\pi}{3}$  e  $\frac{2\pi}{3}$  são côngruos, pois  $\frac{14\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi = 2.2\pi$

### 1.7 - Seno, cosseno e tangente de um arco

Associando cada número real  $x$  a um arco da circunferência trigonométrica, com origem no ponto A e extremidade em um ponto P, tal que a medida do arco  $\widehat{AP}$  é  $x$ , temos a seguinte situação:

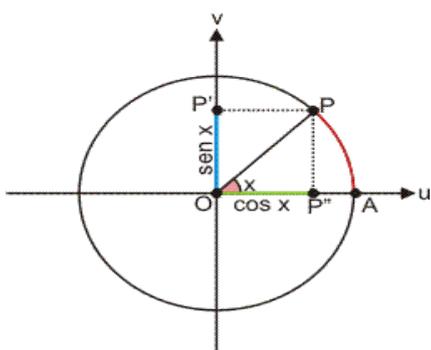


$$\text{sen } x = \frac{PP''}{1} \Rightarrow \text{sen } x = PP''$$

Como os segmentos  $PP''$  e  $OP''$  são congruentes:

$$\boxed{\text{sen } x = OP''}$$

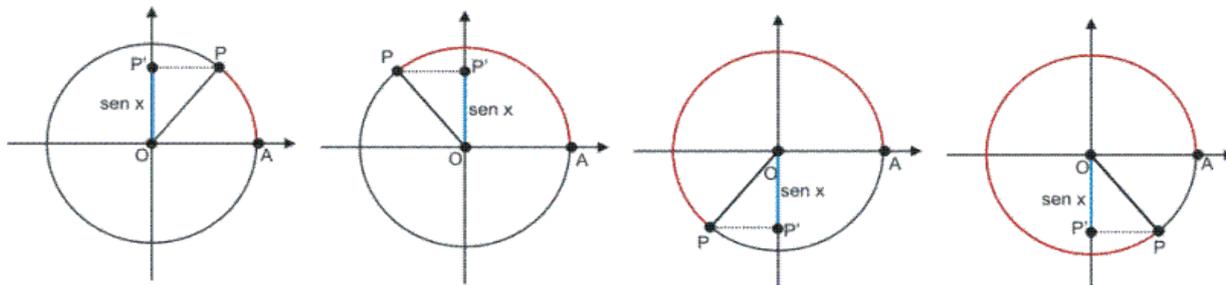
$$\text{cos } x = \frac{OP''}{1} \Rightarrow \boxed{\text{cos } x = OP''}$$



Note que  $\text{cos } x$  é a abscissa de P e  $\text{sen } x$  é a ordenada de P. Sendo assim, podemos escrever:

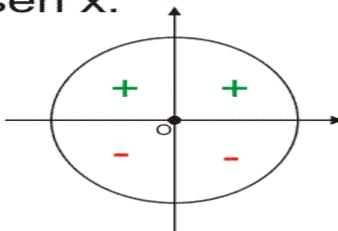
$$P(\text{cos } x, \text{sen } x)$$

Vamos analisar o sinal de  $\text{sen } x$ , conforme o quadrante em que se encontra o ponto P:

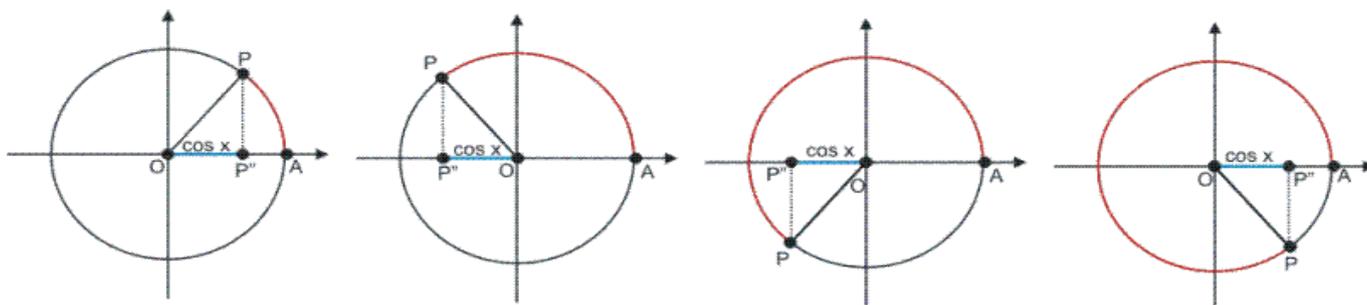


Note que  $\text{sen } x$  é positivo no 1° e 2° quadrantes e negativo no 3° e 4° quadrantes.

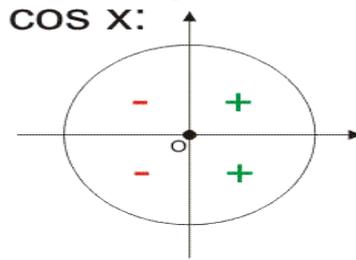
sen x:



Em seguida, analisamos o sinal de  $\text{cos } x$ , conforme o quadrante em que se encontra o ponto P:

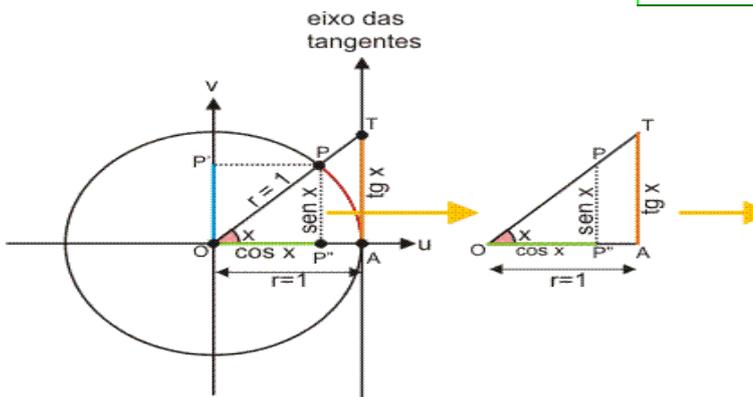


Note que  $\cos x$  é positivo no 1° e 4° quadrantes e negativo no 2° e 3° quadrantes.



Agora vamos estabelecer um novo eixo, o eixo das tangentes, que é paralelo ao eixo das ordenadas, orientado para cima e com origem no ponto A. Traçando uma reta que passe pelo centro O e pelo ponto P, essa reta interceptará o eixo das tangentes no ponto T. Definimos como tangente do arco  $\widehat{AP}$  a medida algébrica do segmento AT e indicamos:

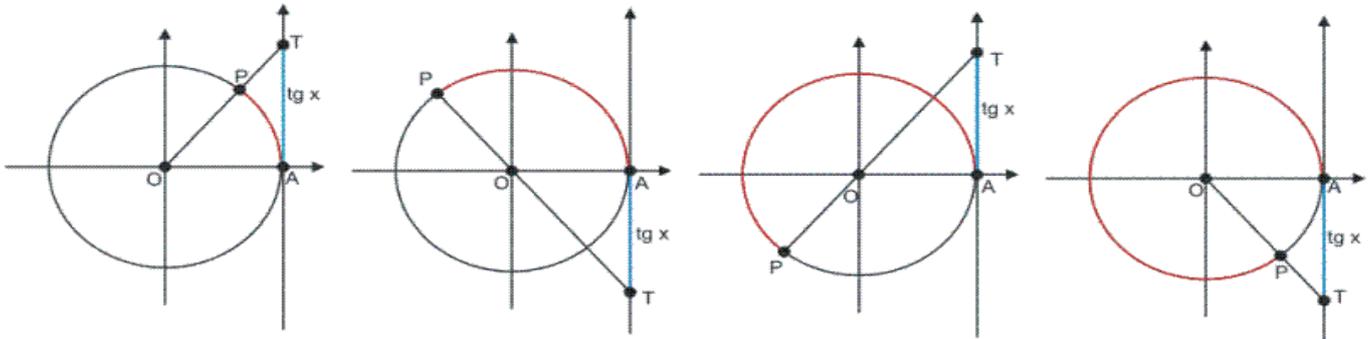
$$\boxed{\text{tg } x = AT}$$



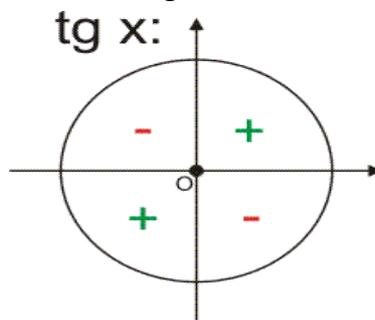
Como os triângulos OAT e OP'P são semelhantes:

$$\frac{\text{tg } x}{\text{sen } x} = \frac{1}{\text{cos } x} \Rightarrow \boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}}$$

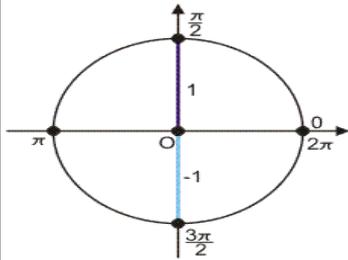
Vamos analisar o sinal de  $\text{tg } x$ , conforme o quadrante em que se encontra o ponto P:



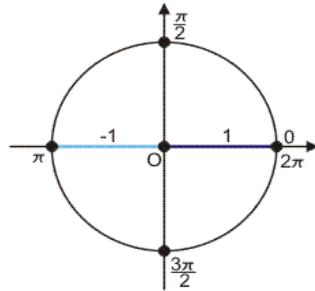
Note que  $\text{tg } x$  é positiva no 1° e 3° quadrantes e negativa no 2° e 4° quadrantes.



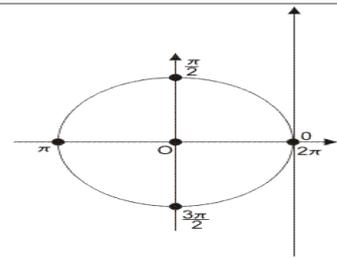
## Valores importantes de seno, cosseno e tangente



$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} &= 1 \\ \sin \pi &= 0 \\ \sin \frac{3\pi}{2} &= -1 \\ \sin 2\pi &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos 0 &= 1 \\ \cos \frac{\pi}{2} &= 0 \\ \cos \pi &= -1 \\ \cos \frac{3\pi}{2} &= 0 \\ \cos 2\pi &= 1 \end{aligned}$$

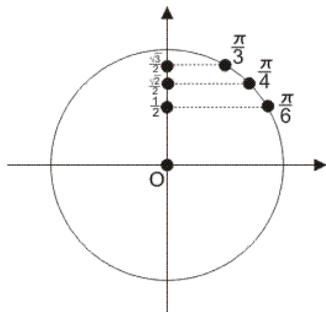


$tg 0 = 0$   
 $tg \frac{\pi}{2}$  não existe, pois a reta que passa pelo centro e por  $\frac{\pi}{2}$  não intercepta o eixo das tangentes.

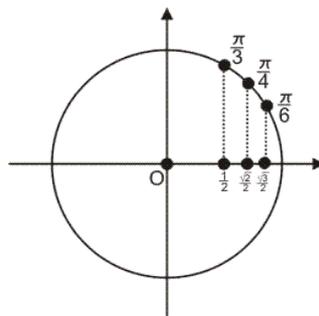
$tg \pi = 0$   
 $tg \frac{3\pi}{2}$  não existe, pois a reta que passa pelo centro e por  $\frac{3\pi}{2}$  não intercepta o eixo das tangentes.

$$tg 2\pi = 0$$

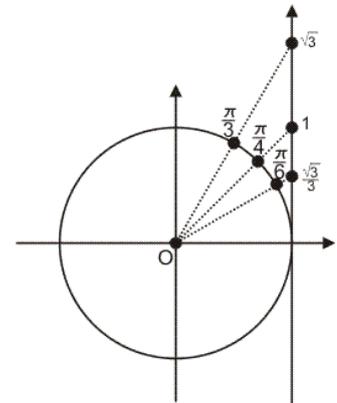
Da trigonometria nos triângulos, conhecemos os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis:  $\frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ),  $\frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ) e  $\frac{\pi}{3}$  ( $60^\circ$ ):



$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

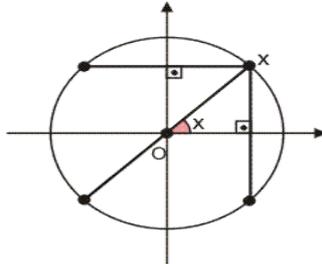


$$\begin{aligned} tg \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ tg \frac{\pi}{4} &= 1 \\ tg \frac{\pi}{3} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

### 1.8 - Redução ao primeiro quadrante

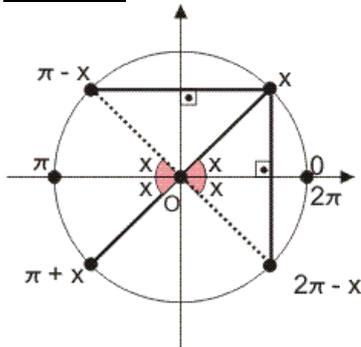
É conveniente associarmos um arco de qualquer quadrante a um arco do 1º quadrante, pois conhecemos os valores de seno, cosseno e tangente de alguns arcos desse quadrante.

Consideremos o ponto da circunferência trigonométrica associado a um arco do 1º quadrante, de medida  $x$ . Por esse ponto traçamos 3 retas: uma perpendicular ao eixo das ordenadas, uma perpendicular ao eixo das abscissas e outra que passa pelo centro da circunferência. Os pontos de intersecção dessas três retas com a circunferência são chamados de simétricos do ponto associado à medida  $x$ .

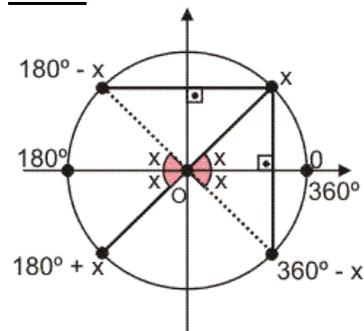


Através de congruência de triângulos e oposição de vértices, podemos encontrar as medidas associadas a esses pontos:

#### Radianos

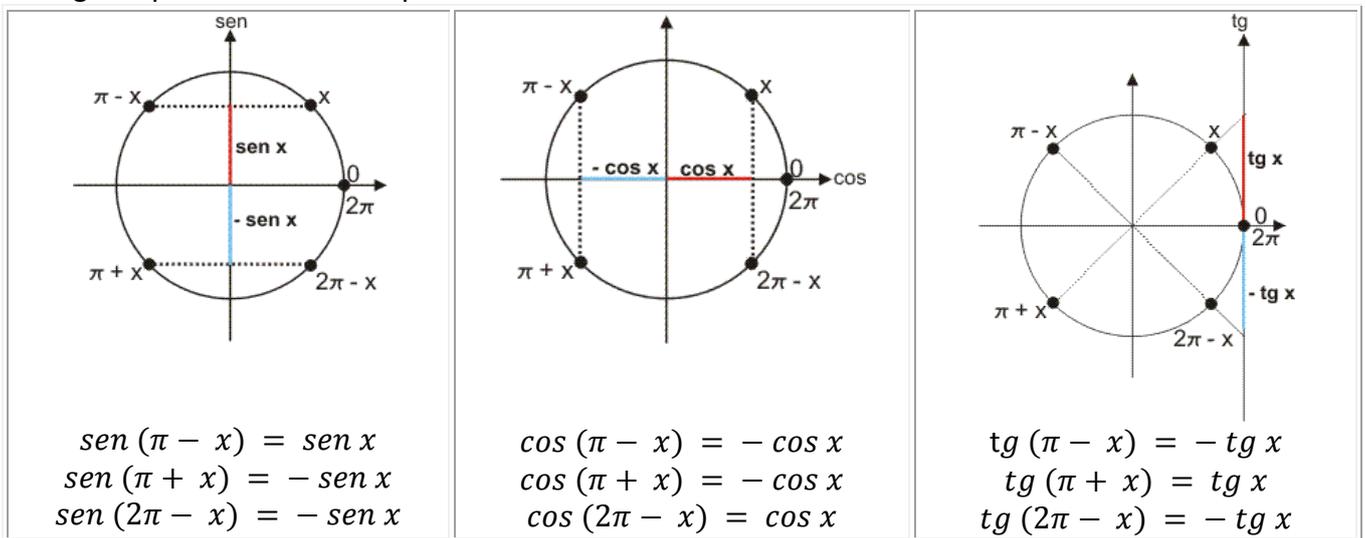


#### Graus



### Simetria no estudo de seno, cosseno e tangente

Pelas figuras podemos concluir que:



### EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (G1 - ifal 2016) O valor da expressão  $\frac{\text{sen } 30^\circ + \text{tg } 225^\circ}{\text{cos } \frac{\pi}{2} - \text{sen } (-60^\circ)}$  é

- 1.
- $\frac{1}{2}$ .
- $-\sqrt{3}$ .
- $\sqrt{3}$ .

**02. (Udesc 2016)** Assinale a alternativa que corresponde ao valor da expressão:

$$6 \cos^2\left(\frac{13\pi}{6}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{11\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{31\pi}{3}\right)$$

- a) 6
- b) 5
- c)  $\frac{9}{2}$
- d) 3
- e)  $\frac{23}{4}$

**03. (Espcex (Aman) 2015)** O valor de  $(\cos 165^\circ + \sin 155^\circ + \cos 145^\circ - \sin 25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$  é

- a)  $\sqrt{2}$ .
- b)  $-1$ .
- c) 0.
- d) 1.
- e)  $\frac{1}{2}$ .

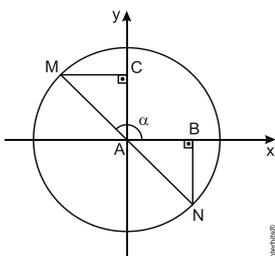
**04. (G1 - ifal 2012)** Considerando-se o arco trigonométrico  $\alpha = \frac{23\pi}{3}$  rad, assinale a alternativa **falsa**.

- a)  $\alpha = 1.380^\circ$ .
- b)  $\alpha$  dá três voltas e para no 4º quadrante.
- c)  $\sin \alpha = -\sin 60^\circ$ .
- d)  $\cos \alpha = \cos 60^\circ$ .
- e)  $\alpha$  dá três voltas e para no 1º quadrante.

**05. (Insper 2012)** O professor de Matemática de Artur e Bia pediu aos alunos que colocassem suas calculadoras científicas no modo “radianos” e calculassem o valor de  $\sin \frac{\pi}{2}$ . Tomando um valor aproximado, Artur digitou em sua calculadora o número 1,6 e, em seguida, calculou o seu seno, encontrando o valor A. Já Bia calculou o seno de 1,5, obtendo o valor B. Considerando que  $\frac{\pi}{2}$  vale aproximadamente 1,5708, assinale a alternativa que traz a correta ordenação dos valores A, B e  $\sin \frac{\pi}{2}$ .

- a)  $\sin \frac{\pi}{2} < A < B$ .
- b)  $A < \sin \frac{\pi}{2} < B$ .
- c)  $A < B < \sin \frac{\pi}{2}$ .
- d)  $B < \sin \frac{\pi}{2} < A$ .
- e)  $B < A < \sin \frac{\pi}{2}$ .

**06. (G1 - cftmg 2012)** A figura abaixo representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo  $\alpha$  mede  $\frac{5\pi}{6}$  radianos.



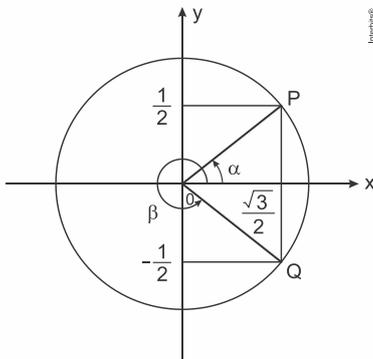
A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é

- a)  $26\sqrt{3}$ .
- b)  $\sqrt{3}$ .
- c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- d)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

07. (G1 - ifce 2012) O valor de  $\cos(2.280^\circ)$  é

- a)  $-\frac{1}{2}$ .      b)  $\frac{1}{2}$ .      c)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

08. (G1 - cftmg 2008) Na figura, P e Q são pontos da circunferência trigonométrica de centro O e raio unitário.



$\text{sen } \alpha$  : ordenada do ponto P

$\text{cos } \alpha$  : abscissa do ponto P

$\text{sen } \beta$  : ordenada do ponto Q

$\text{cos } \beta$  : abscissa do ponto Q

O valor de  $\alpha + \beta$  em radianos, é

- a)  $2\pi$   
 b)  $\frac{11\pi}{6}$   
 c)  $\frac{13\pi}{6}$   
 d)  $\frac{25\pi}{12}$

09. (G1 - cftmg 2005) O número

$$N = (3 \cos 180^\circ - 4 \sin 210^\circ + 2 \text{tg} 135^\circ) / (6 \text{sen}^2 45^\circ)$$

pertence ao intervalo

- a)  $] -4, -3 [$   
 b)  $] -3, -2 [$   
 c)  $] -2, -1 [$   
 d)  $] -1, 0 [$

10. (Pucsp 2004) Na sequência de termo geral  $a_n = 5n + \text{sen}(n \cdot \pi/2)$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ , a soma dos 20 primeiros termos de ordem ímpar é igual a

- a) 1800  
 b) 1874  
 c) 1896  
 d) 2000

11. (Mackenzie 2001) I)  $\cos 225^\circ < \cos 215^\circ$     II)  $\text{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) > \text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$     III)  $\text{sen} 160^\circ > \text{sen} 172^\circ$

Das afirmações acima:

- a) todas são verdadeiras.    b) todas são falsas.    c) somente II e III são verdadeiras.  
 d) somente II é verdadeira.    e) somente I e II são verdadeiras.

**12. (Uel 2001)** Para qualquer número real  $x$ ,  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  é igual a:

- a)  $-\sin x$
- b)  $2\sin x$
- c)  $(\sin x)(\cos x)$
- d)  $2\cos x$
- e)  $-\cos x$

**13. (Ufal 2000)** O seno de um arco de medida  $2340^\circ$  é igual a

- a) -1
- b)  $-\frac{1}{2}$
- c) 0
- e)  $\frac{1}{2}$

**14. (Ufrgs 2000)** Considere as afirmativas abaixo.

- I.  $\tan 92^\circ = -\tan 88^\circ$
- II.  $\tan 178^\circ = \tan 88^\circ$
- III.  $\tan 268^\circ = \tan 88^\circ$
- IV.  $\tan 272^\circ = -\tan 88^\circ$

Quais estão corretas?

- a) Apenas I e III.
- b) Apenas III e IV.
- c) Apenas I, II e IV.
- d) Apenas I, III e IV.
- e) Apenas II, III e IV.

**15. (Ufal 2000)** Analise as afirmativas a seguir, nas quais  $x$  é um número real.

( ) ( )  $\sin 495^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

( ) ( )  $\operatorname{tg}\left(\frac{8\pi}{7}\right) < 0$

( ) ( )  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

( ) ( ) A equação  $\operatorname{tg}x = 1000$  não tem solução

( ) ( ) Para  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$  tem-se  $\cos x > \sin x$

**GABARITO**

01	D	02	A	03	C
04	E	05	E	06	B
07	A	08	A	09	C
10	D	11	C	12	E
13	C	14	D	15	VFFFV