



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
RIO GRANDE DO NORTE

Nome: \_\_\_\_\_ N° \_\_\_\_\_

Curso: Mecânica Integrado

Disciplina: Matemática III

3º Ano

Prof. Leonardo

Data: \_\_ / \_\_ / 2018

## Capítulo 01 – Análise Combinatória

Análise combinatória é o ramo da matemática que estuda o número de possibilidades de ocorrência de um determinado acontecimento (evento) sem, necessariamente, descrever todas as possibilidades.

### 1.1 - Fatorial

Sendo  $n$  um número natural maior que 1, define-se fatorial de  $n$  como o produto dos  $n$  números inteiros positivos menores ou iguais a  $n$ .

#### EXEMPLOS

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Genericamente:  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$  e  $n > 1$ .

#### Consequências da Definição:

Sabemos que  $n! = n(n - 1)!$  é válida para todo  $n$ ,  $n$  pertence a  $\mathbb{N}$  e  $n$  é maior ou igual a 3.

Para  $n = 2$

$$2! = 2(2 - 1)! \Rightarrow 2! = 2 \cdot 1! \Rightarrow \text{então } 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1!, \text{ logo } 1 = 1!.$$

Para  $n = 1$

$$1! = 1(1 - 1)! \Rightarrow 1! = 1 \cdot 0! \Rightarrow 1! = 0!$$

Com essas duas definições,  $1! = 1$  e  $0! = 1$ , temos que:

$n! = n(n - 1)!$ , para qualquer  $n$ ,  $n$  pertence aos números naturais  $\mathbb{N}^*$ .

Note que podemos calcular  $5!$  da seguinte forma:

$$5! = 5 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 120$$

Genericamente:  $n! = n \cdot (n - 1)!$

#### Observação:

As seguintes operações **NÃO** são válidas:

✓  $n! + x! = (n + x)!$

✓  $n! - x! = (n - x)!$

✓  $n! \cdot x! = (n \cdot x)!$

**EXEMPLO 1**

Calcule o valor de  $\frac{10!}{3!7!}$  :

Resolução:

$$\frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!} = \frac{10.9.8}{3.2} = 120$$

**EXEMPLO 2**

Resolva a equação  $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 56$

Resolução:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 56 &\Rightarrow \frac{(x+1)x(x-1)!}{(x-1)!} = 56 \Rightarrow (x+1)x = 56 \Rightarrow x^2 + x - 56 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 15}{2} \Rightarrow x' = 7 \text{ e } x'' = -8 \end{aligned}$$

Note que  $x = -8$  não é solução, pois não existe fatorial de um número negativo. Portanto, a única solução é  $x = 7$ .

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Fatorial**

**01.(G1)** Calcule:

a)  $\frac{5!}{3!+2!}$

b)  $\frac{6!+3!-2!}{5!}$

c)  $\frac{4!-2!-0!}{1!}$

d)  $\frac{12!}{9!}$

e)  $\frac{105!}{104!}$

f)  $\frac{3!+4!}{5!}$

g)  $\frac{3!+6!}{5!-4!}$

h)  $(2!)^2 \cdot (6-1)!$

**02.(G1)** Simplifique as expressões:

a)  $\frac{n!}{(n-1)!}$

b)  $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

c)  $\frac{(n+1)!+n!}{2n!}$

d)  $\frac{(n+2)!}{n!}$

e)  $\frac{n!}{(n-2)!}$

f)  $\frac{(n+5)!}{(n+3)!}$

g)  $\frac{(2n)!}{(2n-1)!}$

h)  $\frac{(n+2)!}{2!(n+1)!}$

**03.(G1)** Simplifique:

a)  $\frac{n!-(n+1)!}{n!}$

b)  $\frac{100!+101!}{99!}$

c)  $\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

**04.(G1)** Resolva as equações:

a)  $n! = 6$

b)  $(n-2)! = 1$

c)  $(n+1)! = 24$

d)  $(n-1)! + 20 = 140$

e)  $x! = 15(x-1)!$

f)  $(n-2)! = 2.(n-4)!$

h)  $(x+3)! + (x+2)! = 8(x+1)!$

i)  $n! + 2.(n-1)! = 18.(n-2)!$

j)  $(n+2)! + (n+1)! = 24.n!$

05.(G1) Calcule  $m \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\frac{m! + (m-1)!}{(m+1)! - m!} = \frac{5}{16}$

06.(G1) Resolver a equação:

$$\frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(x-1)!}{(x-3)!} = 91$$

07. (G1 - cftmg 2004) A solução da equação  $\frac{(n!)^2}{[(n+1)!(n-1)!]} = \frac{4}{5}$  é

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6

08. (Ufc 2006) Dentre os cinco números inteiros listados abaixo, aquele que representa a melhor aproximação para a expressão:  $2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5! + 6 \cdot 6!$  é:

- a) 5030
- b) 5042
- c) 5050
- d) 5058

09. (Upe 2014) A seguir, temos o fatorial de alguns números.

$$1! = 1 \quad 2! = 2 \cdot 1 \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Considere o astronômico resultado de 2013! Quanto vale a soma dos seus três últimos algarismos?

- a) 0
- b) 6
- c) 13
- d) 20

10. (Pucrj 2004) O produto  $n(n-1)$  pode ser escrito, em termos de fatoriais, como:

- a)  $n! - (n-2)!$
- b)  $\frac{n!}{(n-2)!}$
- c)  $n! - (n-1)!$
- d)  $\frac{n!}{[2(n-1)!]}$

11. (Espm 2012) Para  $n \in \mathbb{N}$  e  $x > 2$ , a expressão  $\frac{(x^2-1)!x!}{(x^2-2)!(x+1)!}$  é equivalente a:

- a)  $x - 2$
- b)  $(x - 2)!$
- c)  $(x - 1)!$
- d)  $x$
- e)  $x - 1$

12.(Fei 1996) Se  $(n + 4)! + (n + 3)! = 15(n + 2)!$ , então:

- a)  $n = 4$
- b)  $n = 3$
- c)  $n = 2$
- d)  $n = 1$
- e)  $n = 0$

13.(Uff 1999) O produto  $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \dots 6 \cdot 4 \cdot 2$  é equivalente a:

- a)  $\frac{20!}{2}$                       b)  $2 \cdot 10!$                       c)  $\frac{20!}{2^{10}}$                       d)  $2^{10} \cdot 10!$                       e)  $\frac{20!}{10!}$

14.(Unitau 1995) Sendo  $n \neq 0$ , o(s) valor(es) de  $n$  tal que  $\frac{[(n+1)!-n!]}{(n-1)!} = 7n$  são:

- a) 7.                      b) 0 e 7.                      c) 0 e 10.                      d) 1                      e) 0 e 2.

15.(Unaerp 1996) Se  $\frac{x!(x+1)!}{(x-1)!x!} = 20$ , então  $x$  vale:

- a) - 6                      b) - 5                      c) 4                      d) 5                      e) 6

16. (ESPM 2012) Para  $x \in \mathbb{N}$  e  $x > 2$ , a expressão  $\frac{(x^2 - 1)! \cdot x!}{(x^2 - 2)! \cdot (x + 1)!}$  é equivalente a:

- a)  $x - 2$                       b)  $(x - 2)!$                       c)  $(x - 1)!$                       d)  $x$                       e)  $x - 1$

17.(UNESP 2003) Dado os números  $n$  e  $j \in \mathbb{N}$ ,

- a) calcule o valor de  $n$  de modo a satisfazer  $(n + 1)!/n! = 9$ .  
 b) Sabendo-se que  $b_j = [(j + 1)!/(j + 2)!] (j^2 - 4)$ , calcule  $b_{37}$

**GABARITO - FATORIAL**

|    |  |    |  |    |                                 |
|----|--|----|--|----|---------------------------------|
| 01 | a) 15   b)181/30<br>c) 21   d) 1320<br>e) 105   f) 1/4<br>g) 121/16<br>h) 480          | 02 | a) n<br>b) (n+2)(n+1)n<br>c) (n+2)/2<br>d) (n+2)(n+1)<br>e) n(n-1)<br>f) (n+5)(n+4)<br>g) 2n<br>h) (n+2)/2 | 03 | a) -n<br>b) 10200<br>c) 1/(n+2) |
| 04 | a) 3<br>b) n=2 ou n=3<br>c) n=3   d) n=6<br>e) 15   f) 4<br>g) 7   h) 0<br>i) 4   j) 3 | 05 | 4  | 06 | 8                               |
| 07 | B  | 08 | B  | 09 | A                               |
| 10 | B  | 11 | E  | 12 | E                               |
| 13 | D  | 14 | A  | 15 | C                               |
| 16 | E  | 17 | a)8   b)135  |    |                                 |

## 1.2 - Princípio fundamental da contagem

Considere o seguinte exemplo:

Quatro seleções (Itália, Austrália, Japão e Brasil) disputam o torneio dos campeões do mundo. Quantas são as possibilidades para os três primeiros lugares?

Observe o esquema a seguir chamado de árvore de possibilidades:



Note que há 4 possibilidades para o primeiro lugar. Para cada uma delas há 3 possibilidades para o segundo lugar e para cada uma dessas há 2 possibilidades para o terceiro lugar. Sendo assim, o número total de possibilidades é dado por:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ possibilidades}$$

A partir do exemplo podemos enunciar o seguinte princípio:

### Definição - Princípio Fundamental da Contagem:

Se um acontecimento ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes, o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer é dado pelo produto do número de possibilidades em cada etapa.

#### EXEMPLO 1

Num restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com uma salada, um prato quente e uma sobremesa?

Resolução:



Observe que o evento tem três etapas, com 2 possibilidades na primeira etapa (escolha da salada), 3 possibilidades na segunda etapa (escolha do prato quente) e 3 possibilidades na terceira etapa (escolha da sobremesa).

Portanto, o número de possibilidades é:  $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$  possibilidades

#### EXEMPLO 2

3 companhias de ônibus e 2 companhias de avião fazem o percurso entre as cidades A e B. De quantos modos diferentes pode-se viajar entre essas duas cidades?

Resolução:

Observe que se trata de um único evento: viajar de A para B. Há uma única etapa; não há por que multiplicar.

Logo, para ir de A até B, pode-se optar por:

- 3 maneiras se a viagem for de ônibus (uma com cada companhia de ônibus);
- 2 maneiras se a viagem for de avião (uma com cada companhia aérea).

Assim, há 5 maneiras diferentes de ir de A até B.

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Princípio Fundamental da Contagem - Objetivas

**01. (Pucsp 2017)** Uma pessoa dispõe das seguintes cores de tinta: amarela, azul, verde, vermelha e branca, e irá utilizá-las para pintar um pote. Nesse pote serão pintadas a tampa, a lateral e uma lista na lateral, de modo que a tampa e a lateral poderão ter a mesma cor ou cores diferentes. O número de maneiras distintas de pintar esse pote é

- a) 100
- b) 80
- c) 60
- d) 40

**02. (Uemg 2016)** “Genius era um brinquedo muito popular na década de 1980 (...). O brinquedo buscava estimular a memorização de cores e sons. Com formato semelhante a um OVNI, possuía 4 botões de cores distintas que emitiam sons harmônicos e se iluminavam em sequência. Cabia aos jogadores repetir o processo sem errar”.

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre. (Adaptado).



Considerando uma fase do jogo em que 3 luzes irão acender de forma aleatória e em sequência, podendo cada cor acender mais de uma vez.

O número máximo de formas que essa sequência de 3 luzes poderá acender é:

- a) 12
- b) 24
- c) 36
- d) 64

**03. (Eear 2016)** Considere os algarismos 1,2,3,4,5 e 6. A partir deles, podem ser criados \_\_\_\_\_ números pares de quatro algarismos distintos.

- a) 60
- b) 120
- c) 180
- d) 360

**04. (G1 - ifpe 2016)** Um auditório em forma de um salão circular dispõe de 6 portas, que podem ser utilizadas tanto como entrada ou para saída do salão. De quantos modos distintos uma pessoa que se encontra fora do auditório pode entrar e sair do mesmo, utilizando como porta de saída uma porta diferente da que utilizou para entrar?

- a) 6
- b) 5
- c) 12
- d) 30
- e) 36

**05. (Upe-ssa 2 2016)** Um palíndromo ou capicua é um número, que se lê da mesma maneira nos dois sentidos, ou seja, da esquerda para a direita ou ao contrário, como 333, 1661 e 28482. Assinale a alternativa correspondente à quantidade de palíndromos que são números pares de cinco algarismos do nosso sistema de numeração.

- a) 300
- b) 400
- c) 500
- d) 600
- e) 800

**06. (Ueg 2016)** Uma montadora de carros oferece a seus clientes as seguintes opções na montagem de um carro: 2 tipos de motores (1.8 ou 2.0), 2 tipos de câmbios (manual ou automático), 6 cores (branco, preto, vermelho, azul, cinza ou prata) e 3 tipos de acabamento (simples, intermediário ou sofisticado). De quantas maneiras distintas pode-se montar esse carro?

- a) 4
- b) 13
- c) 24
- d) 36
- e) 72

**07. (G1 - ifba 2016)** De acordo com o DETRAN de uma certa cidade, ainda estão disponíveis os prefixos de placa de automóveis com três letras, conforme modelo a seguir:

|   |  |  |
|---|--|--|
| M |  |  |
|---|--|--|

Se estiverem disponíveis para o 2º espaço as letras X, Y e Z, e para o 3º espaço as letras A, B, C, D, E, F, G e H, então o número de prefixos disponíveis para emplacamento é:

- a) 18
- b) 24
- c) 28
- d) 36
- e) 60

**08. (Ueg 2015)** Numa lanchonete o lanche é composto por três partes: pão, molho e recheio. Se essa lanchonete oferece aos seus clientes duas opções de pão, três de molho e quatro de recheio, a quantidade de lanches distintos que ela pode oferecer é de

- a) 9
- b) 12
- c) 18
- d) 24

**09. (Upf 2014)** Alice não se recorda da senha que definiu no computador. Sabe apenas que é constituída por quatro letras seguidas, com pelo menos uma consoante.

|         |       |
|---------|-------|
| Usuário | Alice |
| Senha   | ••••  |

Se considerarmos o alfabeto como constituído por 23 letras, bem como que não há diferença para o uso de maiúsculas e minúsculas, quantos códigos dessa forma é possível compor?

- a)  $23^4$
- b)  $23^3 \cdot 18$
- c)  $23^3 \cdot 72$
- d)  $23^4 - 5^4$
- e)  $18^4 + 5^4$

**10. (Unicamp 2013)** Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

|          |          |
|----------|----------|
| ABC 1234 | ABCD 123 |
|----------|----------|

Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria

- a) inferior ao dobro.
- b) superior ao dobro e inferior ao triplo.
- c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.
- d) mais que o quádruplo.

**11. (Uel 2013)** Os clientes de um banco, ao utilizarem seus cartões nos caixas eletrônicos, digitavam uma senha numérica composta por cinco algarismos. Com o intuito de melhorar a segurança da utilização desses cartões, o banco solicitou a seus clientes que cadastrassem senhas numéricas com seis algarismos. Se a segurança for definida pela quantidade de possíveis senhas, em quanto aumentou percentualmente a segurança na utilização dos cartões?

- a) 10%
- b) 90%
- c) 100%
- d) 900%
- e) 1900%

**12. (Ufjf 2012)** Uma empresa escolherá um chefe para cada uma de suas repartições A e B. Cada chefe deve ser escolhido entre os funcionários das respectivas repartições e não devem ser ambos do mesmo sexo.

Abaixo é apresentado o quadro de funcionários das repartições A e B.

| FUNCIONÁRIOS | REPARTIÇÕES |   |
|--------------|-------------|---|
|              | A           | B |
| Mulheres     | 4           | 7 |
| Homens       | 6           | 3 |

De quantas maneiras é possível ocupar esses dois cargos?

- a) 12.
- b) 24.
- c) 42.
- d) 54.
- e) 72.



**13. (Fgv 2007)** Colocando em ordem os números resultantes das permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, que posição ocupará o número 35241?

- a) 55ª
- b) 70ª
- c) 56ª
- d) 69ª
- e) 72ª

**14. (Uece 2017)** Quantos números inteiros positivos pares, com três dígitos distintos, podemos formar com os algarismos 3,4,5,6 e 7?

- a) 24
- b) 28
- c) 32
- d) 36

**15. (Epcar (Afa) 2017)** Um baralho é composto por 52 cartas divididas em 4 naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por 13 cartas, das quais 9 são numeradas de 2 a 10, e as outras 4 são 1 valete (J), 1 dama (Q), 1 rei (K) e 1 ás (A). Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a

- a) 612
- b) 613
- c) 614
- d) 615

**16. (Espm 2017)** As placas de automóveis no Brasil são formadas por 3 letras do alfabeto completo (26 letras), seguidas por 4 algarismos do sistema decimal de numeração. A quantidade de placas em que as 3 letras e os 4 algarismos são consecutivos (por exemplo: *ABC 0123, MNP 4567* é igual a:

- a) 168
- b) 216
- c) 184
- d) 156
- e) 244

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Em um programa de televisão que revela novos talentos para a música, cada candidato faz uma breve apresentação para os 4 jurados que, inicialmente, ficam de costas, apenas ouvindo. Durante a apresentação, todos os jurados que gostarem da voz daquele candidato viram-se para ele. Se pelo menos um jurado se virar, o candidato é selecionado.

**17. (Insper 2016)** Em certa edição do programa,  $n$  candidatos tiveram pelo menos um dos 4 jurados se virando durante sua apresentação. O conjunto de todos os jurados que se viraram, porém, nunca foi o mesmo para dois quaisquer desses  $n$  candidatos. Dessa forma,  $n$  pode valer, no máximo,

- a) 4
- b) 6
- c) 12
- d) 15

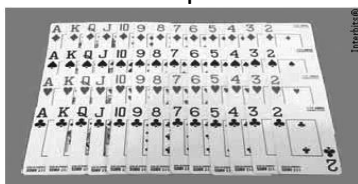
**18. (Fatec 2015)** Dispondo de cinco cores distintas, uma pessoa pretende pintar as letras da palavra de **FATEC** acordo com os seguintes critérios:

- ✓ na palavra, letras que são equidistantes da letra *T* terão a mesma cor;
- ✓ letras adjacentes serão pintadas de cores distintas, e
- ✓ cada letra será pintada com uma única cor.

O número de modos distintos de se realizar essa pintura é

- a) 120
- b) 90
- c) 80
- d) 50
- e) 40

**19. (Uerj 2013)** Na ilustração abaixo, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.



Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:



O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:

- a) 624
- b) 676
- c) 715
- d) 720

**20. (Ucs 2012)** Em uma prova, as seis primeiras questões eram do tipo *C/E*, em que o candidato devia optar entre *certo* ou *errado* para sua resposta. Nas outras quatro questões, o candidato devia escolher, entre três alternativas, a verdadeira. Quantas sequências de respostas são possíveis na resolução da prova?

- a)  $(6 \cdot 2)^2$
- b)  $(6 \cdot 2) + (4 \cdot 3)$
- c)  $6^2 \cdot 4^3$
- d)  $10^{2+3}$
- e)  $2^6 \cdot 3^4$

**GABARITO – PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM - OBJETIVAS**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | A | 02 | D | 03 | C |
| 04 | D | 05 | B | 06 | E |
| 07 | B | 08 | D | 09 | D |
| 10 | A | 11 | D | 12 | D |
| 13 | B | 14 | A | 15 | A |
| 16 | A | 17 | D | 18 | C |
| 19 | A | 20 | E |    |   |

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Princípio Fundamental da Contagem – Discursivas/Somatório

**01. (Uerj 2016)** Com o objetivo de melhorar o tráfego de veículos, a prefeitura de uma grande cidade propôs a construção de quatro terminais de ônibus. Para estabelecer conexão entre os terminais, foram estipuladas as seguintes quantidades de linhas de ônibus:

- ✓ do terminal A para o B, 4 linhas distintas;
- ✓ do terminal B para o C, 3 linhas distintas;
- ✓ do terminal A para o D, 5 linhas distintas;
- ✓ do terminal D para o C, 2 linhas distintas.

Não há linhas diretas entre os terminais A e C.

Supondo que um passageiro utilize exatamente duas linhas de ônibus para ir do terminal A para o terminal C, calcule a quantidade possível de trajetos distintos que ele poderá fazer.

**02. (Uepg 2013)** Para formar uma senha, devem ser escolhidos três elementos distintos do conjunto  $\{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Nesse contexto, assinale o que for correto.

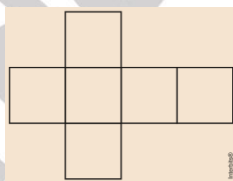
- 01) O número de senhas formadas por dois algarismos e uma letra, nessa ordem, é menor que 60.
- 02) O número de senhas formadas somente por algarismos é 60.
- 04) O número de senhas formadas por letras e algarismos é 140.
- 08) Podem ser formadas mais de 500 senhas.

### **GABARITO – PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM - DISCURSIVAS**

|    |    |    |    |  |  |
|----|----|----|----|--|--|
| 01 | 22 | 02 | 10 |  |  |
|----|----|----|----|--|--|

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Princípio Fundamental da Contagem – Geometria Espacial e Biologia

**01. (Ufpr 2014)** A figura a seguir apresenta uma planificação do cubo que deverá ser pintada de acordo com as regras abaixo:



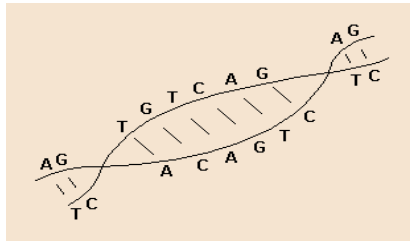
Os quadrados que possuem um lado em comum, nessa planificação, deverão ser pintados com cores diferentes. Além disso, ao se montar o cubo, as faces opostas deverão ter cores diferentes. De acordo com essas regras, qual o MENOR número de cores necessárias para se pintar o cubo, a partir da planificação apresentada?

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.
- e) 6.

**02. (Mackenzie 2012)** Os vértices de um cubo são pintados de azul ou de vermelho. A pintura dos vértices é feita de modo que cada aresta do cubo tenha pelo menos uma de suas extremidades pintada de vermelho. O menor número possível de vértices pintados de vermelho nesse cubo é

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 6
- e) 8

**03. (Uff 2002)** O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A-T, T-A, C-G e G-C. Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

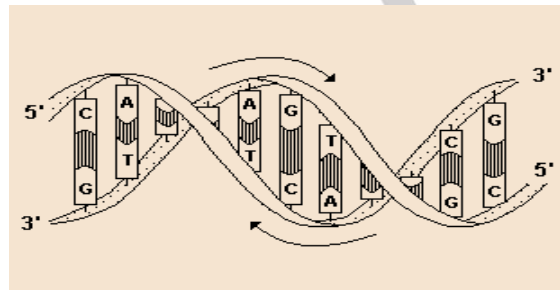


- ✓ dois pares consecutivos não sejam iguais;
- ✓ um par A-T não seja seguido por um par T-A e vice-versa;
- ✓ m par C-G não seja seguido por um par G-C e vice-versa.

Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem. Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

- a)  $2^{11}$
- b)  $2^{20}$
- c)  $2 \times 10$
- d)  $2^{10}$
- e)  $2^2 \times 10$

**04. (Uerj 2001)**



Trechos complementares de duas cadeias de nucleotídeos de uma molécula de DNA.

Observe que uma cadeia se dispõe em relação à outra de modo invertido

(Adaptado de LOPES, Sônia. "BIO 3". São Paulo. Saraiva, 1993.)

Considere as seguintes condições para a obtenção de fragmentos de moléculas de DNA:

- ✓ todos os fragmentos devem ser formados por 2 pares de bases nitrogenadas;
- ✓ cada fragmento deve conter as quatro diferentes bases nitrogenadas.

O número máximo de fragmentos diferentes que podem ser assim obtidos corresponde a:

- a) 4
- b) 8
- c) 12
- d) 24

**GABARITO – PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM – GEOMETRIA ESPACIAL e BIOLOGIA**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | B | 02 | C | 03 | A |
| 04 | D |    |   |    |   |

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO - ENEM

**01. (Enem 2015)** Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6,7,8,9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

| Quesitos   | 1. Fantasia e Alegoria |    | 2. Evolução e Conjunto |    | 3. Enredo e Harmonia |    | 4. Bateria |   | Total |
|------------|------------------------|----|------------------------|----|----------------------|----|------------|---|-------|
|            | A                      | B  | A                      | B  | A                    | B  | A          | B |       |
| Jurado     | A                      | B  | A                      | B  | A                    | B  | A          | B |       |
| Escola I   | 6                      | 7  | 8                      | 8  | 9                    | 9  | 8          |   | 55    |
| Escola II  | 9                      | 8  | 10                     | 9  | 10                   | 10 | 10         |   | 66    |
| Escola III | 8                      | 8  | 7                      | 8  | 6                    | 7  | 6          |   | 50    |
| Escola IV  | 9                      | 10 | 10                     | 10 | 9                    | 10 | 10         |   | 68    |
| Escola V   | 8                      | 7  | 9                      | 8  | 6                    | 8  | 8          |   | 54    |

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

- a) 21
- b) 90
- c) 750
- d) 1250

**02. (Enem 2014)** Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

- a)  $20 \cdot 8! + (3!)^2$
- b)  $8! \cdot 5! \cdot 3!$
- c)  $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$
- d)  $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$
- e)  $\frac{16!}{2^8}$

**03. (Enem PPL 2014)** Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas. Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por

- a) 100
- b) 90
- c) 80
- d) 25
- e) 20

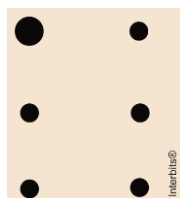
**04. (Enem 2013)** Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

- a)  $\frac{62^6}{10^6}$
- b)  $\frac{62!}{10!}$
- c)  $\frac{62! \cdot 4!}{10! \cdot 56!}$
- d)  $62! - 10!$
- e)  $62^6 - 10^6$

**05. (Enem 2012)** O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

- a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

**06. (Enem 2005)** A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

- a) 12
- b) 31
- c) 36
- d) 63
- e) 720

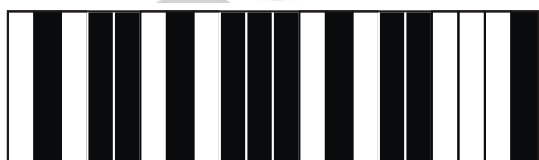
**07. (Enem 2004)** No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.



O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

- a) 6.
- b) 7.
- c) 8.
- d) 9.

**08. (Enem 2002)** O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima. Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

- a) 14.
- b) 12.
- c) 8.
- d) 6.

**GABARITO – PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM - ENEM**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | C | 02 | B | 03 | A |
| 04 | A | 05 | A | 06 | D |
| 07 | B | 08 | D |    |   |

### 1.3.1 - Arranjo simples

Arranjo simples é o tipo de agrupamento sem repetição em que um grupo é diferente de outro pela ordem ou pela natureza dos elementos componentes.

#### EXEMPLO 1

Quantos números de dois algarismos (elementos) distintos podem ser formados usando-se os algarismos (elementos) 2, 3, 4, 5?

| 1º algarismo<br>(4 possibilidades) | 2º algarismo<br>(3 possibilidades) | números formados<br>(12 números) |
|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| 2                                  | 3                                  | 23                               |
|                                    | 4                                  | 24                               |
|                                    | 5                                  | 25                               |
| 3                                  | 2                                  | 32                               |
|                                    | 4                                  | 34                               |
|                                    | 5                                  | 35                               |
| 4                                  | 2                                  | 42                               |
|                                    | 3                                  | 43                               |
|                                    | 5                                  | 45                               |
| 5                                  | 2                                  | 52                               |
|                                    | 3                                  | 53                               |
|                                    | 4                                  | 54                               |

Observe que os grupos obtidos diferem entre si pela ordem dos elementos componentes (24 e 42, por exemplo) ou pela natureza dos elementos componentes (23 e 54, por exemplo). Os grupos assim obtidos são denominados arranjos simples dos 4 elementos tomados 2 a 2 e são indicados por  $A_{4,2}$ .

Genericamente, temos a seguinte definição:

**Arranjo simples** de  $n$  elementos distintos tomados  $p$  a  $p$  é qualquer sequência ordenada de  $p$  elementos escolhidos entre os  $n$  existentes.

Utilizando o princípio fundamental da contagem, se tivéssemos  $n$  elementos distintos para formar grupos de  $p$  elementos ( $p \geq n$ ) obteríamos:

| $n$ possibilidades<br>1º elemento | $(n - 1)$ possibilidades<br>2º elemento | $(n - 2)$ possibilidades<br>3º elemento | ... | $(n - (p - 1))$ possibilidades<br>$p^\circ$ elemento |
|-----------------------------------|---|---|-----|--|
|-----------------------------------|---|---|-----|--|

$$A_{n,p} = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (p - 1))$$

Multiplicando o numerador e o denominador por  $(n - p)!$  a igualdade não se altera:

$$A_{n,p} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (p - 1))(n - p)!}{(n - p)!}$$

Note que no numerador equivale a  $n!$ :

$$A_{n,p} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (p - 1))(n - p)(n - p - 1)(n - p - 2) \dots 2 \cdot 1}{(n - p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Assim, temos a fórmula para calcular o número total de arranjos nos  $n$  elementos distintos tomados  $p$  a  $p$ .

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$



### EXEMPLO 1

Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 1 a 9?

#### Resolução:

Note que  $1234 \neq 4321$ , ou seja, os agrupamentos diferem pela ordem dos elementos, logo trata-se de um arranjo de 9 elementos tomados 4 a 4.

|  |                  |                  |                  |
|--|------------------|------------------|------------------|
| <b>Sem fórmula:</b>  |                  |                  |                  |
| 9 possibilidades   | 8 possibilidades | 7 possibilidades | 6 possibilidades |
| 1° algarismo   | 2° algarismo     | 3° algarismo     | 4° algarismo     |
| $9.8.7.6 = 3024 \text{ números}$   |                  |                  |                  |
| <b>Com fórmula:</b>  |                  |                  |                  |
| 1° algarismo   | 2° algarismo     | 3° algarismo     | 4° algarismo     |
| $A_{9,4}$  |                  |                  |                  |
| $A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!} = 3024 \text{ números}$ |                  |                  |                  |

### EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Arranjos Simples

**01. (Ueg 2017)** Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado o tesoureiro e o menos votado o secretário. Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

- a) 120
- b) 60
- c) 40
- d) 20
- e) 10

**02. (Ueg 2016)** Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor. O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é

- a) 64
- b) 24
- c) 12
- d) 4

**03. (Pucsp 2015)** No vestiário de uma Academia de Ginástica há exatamente 30 armários, cada qual para uso individual. Se, no instante em que dois alunos dessa Academia entram no vestiário para mudar suas roupas, apenas 8 dos armários estão desocupados, quantas opções eles terão para escolher seus respectivos armários?

- a) 14
- b) 28
- c) 48
- d) 56
- e) 112

**04. (Fuvest 2013)** Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é

- a) menor que 7%.
- b) maior que 7%, mas menor que 10%.
- c) maior que 10%, mas menor que 13%.
- d) maior que 13%, mas menor que 16%.
- e) maior que 16%.

**05. (Uepb 2012)** A solução da equação  $A_{n,3} = 4A_{n,2}$  é

- a) 3
- b) 4
- c) 8
- d) 6
- e) 5

**06. (Pucmg 2007)** Em um campeonato de dois turnos, do qual participam dez equipes, que jogam entre si uma vez a cada turno, o número total de jogos previstos é igual a:

- a) 45
- b) 90
- c) 105
- d) 115

**07. (Ufsm 2005)** Para efetuar suas compras, o usuário que necessita sacar dinheiro no caixa eletrônico deve realizar duas operações: digitar uma senha composta por 6 algarismos distintos e outra composta por 3 letras, escolhidas num alfabeto de 26 letras. Se essa pessoa esqueceu a senha, mas lembra que 8, 6 e 4 fazem parte dos três primeiros algarismos e que as letras são todas vogais distintas, sendo E a primeira delas, o número máximo de tentativas necessárias para acessar sua conta será

- a) 210
- b) 230
- c) 2.520
- d) 3.360
- e) 15.120

**08. (G1 - cftmg 2004)** Em um campeonato de tênis de mesa, com dez participantes, em que todos jogam contra todos, um dos participantes vence todas as partidas, as classificações possíveis para os três primeiros colocados é

- a) 72
- b) 78
- c) 82
- d) 90

**09. (Unesp 2003)** O conselho administrativo de um sindicato é constituído por doze pessoas, das quais uma é o presidente deste conselho. A diretoria do sindicato tem quatro cargos a serem preenchidos por membros do conselho, sendo que o presidente da diretoria e do conselho não devem ser a mesma pessoa. De quantas maneiras diferentes esta diretoria poderá ser formada?

- a) 40.
- b) 7920.
- c) 10890.

d) 11!.

e) 12!.

**10. (Ufsm 2002)** Para ter acesso a uma sala reservada, cada usuário recebe um cartão de identificação com 4 listras coloridas, de modo que qualquer cartão deve diferir de todos os outros pela natureza das cores ou pela ordem das mesmas nas listras. Operando com 5 cores distintas e observando que listras vizinhas não tenham a mesma cor, quantos usuários podem ser identificados?

a) 10

b) 20

c) 120

d) 320

e) 625

**11. (Cesgranrio 2002)** Um brinquedo comum em parques de diversões é o "bicho-da-seda", que consiste em um carro com cinco bancos para duas pessoas cada e que descreve sobre trilhos, em alta velocidade, uma trajetória circular. Suponha que haja cinco adultos, cada um deles acompanhado de uma criança, e que, em cada banco do carro, devam acomodar-se uma criança e o seu responsável. De quantos modos podem as dez pessoas ocupar os cinco bancos?

a) 14 400

b) 3 840

c) 1 680

d) 240

e) 120

**12. (Ufrn 2000)** Em virtude de uma crise financeira, uma fábrica dispõe de apenas quatro vigilantes para ocuparem sete postos de vigilância. Considerando que, em cada posto, fica, no máximo, um vigilante e que o posto da entrada principal não pode ficar desguarnecido, indique a opção correspondente ao número de maneiras distintas de que o chefe de segurança pode dispor para distribuir os vigilantes.

Obs.: Duas maneiras são ditas idênticas se, em ambas, os vigilantes ocupam os mesmos postos e cada posto é ocupado pelo mesmo vigilante; caso contrário, são ditas distintas.

a) 35

b) 80

c) 480

d) 840

**13. (Ufrgs 1996)** Quantos números inteiros positivos, com 3 algarismos significativos distintos, são múltiplos de 5?

a) 128

b) 136

c) 144

d) 162

e) 648

**14. (Fgv 1995)** Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco, mas na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é

a) 1 680

- b) 1 344
- c) 720
- d) 224
- e) 136

**15. (Cesgranrio 1995)** Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º. lugar, Brasil; 2º. lugar, Nigéria; 3º. lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

- a) 69
- b) 2024
- c) 9562
- d) 12144
- e) 13824

**16. (Ita 2001)** Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em  $x$  e  $y$ , obtido pelo desenvolvimento do binômio  $(x + y)^n$ , temos que o número de arranjos sem repetição de  $n$  elementos, tomados 2 a 2, é:

- a) 80
- b) 90
- c) 70
- d) 100
- e) 60

**17. (Mackenzie 1999)** Uma prova de atletismo é disputada por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros. Os resultados possíveis para a prova, de modo que pelo menos um brasileiro fique numa das três primeiras colocações, são em número de:

- a) 426
- b) 444
- c) 468
- d) 480
- e) 504

**18. (Mackenzie 1998)** Os números pares com 4 algarismos distintos, que podemos obter com os elementos do conjunto  $\{0; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ , são em número de:

- a)  $6^3$
- b) 420
- c)  $5 \cdot 6^2$
- d)  $5 \cdot 4^3$
- e) 380

**19. (Ufrgs 1997)** O número de múltiplos de três, com quatro algarismos distintos, escolhidos entre 3, 4, 6, 8 e 9 é

- a) 24
- b) 36
- c) 48
- d) 72
- e) 96

**20. (Faap 1997)** Quantas motos podem ser licenciadas se cada placa tiver 2 vogais (podendo haver vogais repetidas) e 3 algarismos distintos?

- a) 25.000
- b) 120
- c) 120.000
- d) 18.000
- e) 32.000

**GABARITO – ARRANJOS SIMPLES**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | B | 02 | B | 03 | D |
| 04 | B | 05 | D | 06 | B |
| 07 | E | 08 | A | 09 | C |
| 10 | D | 11 | B | 12 | C |
| 13 | B | 14 | B | 15 | D |
| 16 | B | 17 | B | 18 | B |
| 19 | D | 20 | D |    |   |

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Arranjos Simples – Funções e Logaritmos**

**01. (Uece 2015)** Se os conjuntos  $X$  e  $Y$  possuem, respectivamente, cinco e oito elementos, quantas funções,  $f: X \rightarrow Y$  injetivas e distintas, podem ser construídas?

- a) 6680
- b) 6700
- c) 6720
- d) 6740

**02. (Ufpe 2001)** Suponha que existam 20 diferentes tipos de aminoácidos. Qual dos valores abaixo mais se aproxima do número de agrupamentos ordenados, formados de 200 aminoácidos, que podem ser obtidos?

Dado: Use a aproximação:  $\log_{10} 2 \approx 0,30$ .

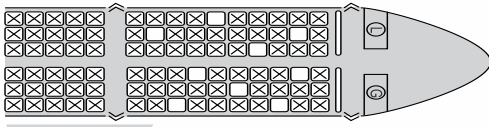
- a)  $10^{220}$
- b)  $10^{230}$
- c)  $10^{240}$
- d)  $10^{250}$
- e)  $10^{260}$

**GABARITO – ARRANJOS SIMPLES – FUNÇÕES e LOGARITMOS**

|    |   |    |   |  |  |
|----|---|----|---|--|--|
| 01 | C | 02 | E |  |  |
|----|---|----|---|--|--|

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – ARRANJOS SIMPLES - ENEM**

**01. (Enem 2015)** Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: [www.gebh.net](http://www.gebh.net). Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

- a)  $\frac{9!}{2!}$   
b)  $\frac{9!}{7! \cdot 2!}$   
c)  $7!$   
d)  $\frac{5!}{2!} \times 4!$   
e)  $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

### **GABARITO – ARRANJOS SIMPLES - ENEM**

|    |   |  |  |  |  |
|----|---|--|--|--|--|
| 01 | A |  |  |  |  |
|----|---|--|--|--|--|

### **Arranjo com repetição**

Os elementos que compõem o conjunto podem aparecer repetidos em um agrupamento, ou seja, ocorre a repetição de um mesmo elemento em um agrupamento.

A fórmula geral para o arranjo com repetição é representada por:

$$A(n, p) = n^p$$

$n$  = Número de elementos do conjunto.

$p$  = Quantidade de elementos por agrupamento.

**Exemplo:** Seja  $P$  um conjunto com elementos:  $P = \{A, B, C, D\}$ , tomando os agrupamentos de dois em dois, considerando o arranjo com repetição quantos agrupamentos podemos obter em relação ao conjunto  $P$ .

$$P = \{A, B, C, D\}$$

$$n = 4$$

$$p = 2$$

$$A(n, p) = n^p$$

$$A(4, 2) = 4^2$$

Representação por extenso dos agrupamentos do arranjo com repetição:

$$A = \{AA, AB, AC, AD, BB, BA, BC, BD, CC, CA, CB, CD, DD, DA, DB, DC\}$$

Observe que os agrupamentos com repetição de elementos do conjunto  $P$  são:  $AA, BB, CC$  e  $DD$ . A existência desses elementos referente ao agrupamento faz com que o arranjo seja do tipo com repetição.

## Exercícios de Fixação

01. Quantos números com 4 algarismos podemos formar com os algarismos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9.
02. Quantas palavras com 3 letras podemos formar com as 26 letras de nosso alfabeto?
03. Quantas placas são possíveis em nosso sistema de trânsito, se em todas devem aparecer 3 letras seguidas por 4 números?
04. No sistema decimal de numeração, quantos números existem com 3 algarismos (repetidos ou não)?
05. Quantos números de 3 dígitos podem ser formados com 5 algarismos?

### GABARITO – ARRANJOS COM REPETIÇÃO

|    |       |    |       |    |           |
|----|-------|----|-------|----|-----------|
| 01 | 10000 | 02 | 17576 | 03 | 175760000 |
| 04 | 100   | 05 | 125   |    |           |

#### 1.4.1 - Permutação simples

**Permutação simples** é o tipo de agrupamento ordenado, sem repetição, em que entram todos os elementos em cada grupo.

As permutações simples de  $n$  elementos distintos diferem entre si somente pela ordem dos elementos. O número de permutações simples de  $n$  elementos distintos é indicado por  $P_n$ .

Podemos interpretar cada permutação de  $n$  elementos como um arranjo simples de  $n$  elementos tomados  $n$  a  $n$ :

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Assim, temos que:

$$P_n = n!$$

#### EXEMPLO 1

Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados por 1, 2, 3, 5 e 8?

Resolução:

Como queremos descobrir o número total de arranjos de 5 elementos tomados 5 a 5, trata-se do número total de permutações de 5 elementos:

Imagem sem identificação de relação (IDIR) não foi encontrada no arquivo.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ números.}$$

## 1.4.2 - Permutação com elementos repetidos

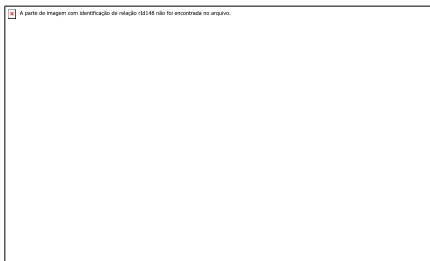
### EXEMPLO 1

Quantos anagramas tem a palavra ARARA?

Resolução:

Se a palavra tivesse as 5 letras distintas, o total de anagramas seria dado por 5!.

Observe que a letra R aparece duas vezes e a letra A aparece três vezes na palavra ARARA. Note também que cada anagrama gera 2! 3! anagramas iguais.



$$2! \cdot 3! = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{ anagramas iguais}$$

Sendo assim, o número de anagramas distintos é:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10 \text{ anagramas distintos}$$

De modo geral, se temos  $n$  elementos, dos quais  $n_1$  são iguais a  $a_1$  ( $a_1$  representa uma letra, por exemplo),  $n_2$  são iguais a  $a_2$ ,  $n_r$  são iguais a  $a_r$ , o número de permutações possíveis é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

### EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – PERMUTAÇÃO – ANAGRAMAS

**01. (Efomm 2017)** Quantos anagramas é possível formar com a palavra **CARAVELAS**, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?

- a) 24
- b) 120
- c) 480
- d) 1920
- e) 3840

**02. (Pucrs 2017)** A capital dos gaúchos, oficialmente fundada em 26 de março de 1772, já foi chamada de Porto de Viamão. Atualmente, a também capital dos Pampas recebe o nome de PORTO ALEGRE. Adicionando o número de anagramas formados com as letras da palavra ALEGRE ao de anagramas formados com as letras da palavra PORTO em que as consoantes aparecem juntas, obtemos \_\_\_\_\_ anagramas.

- a) 378
- b) 396
- c) 738
- d) 756
- e) 840

**03. (Pucrj 2016)** Seja  $n$  a quantidade de anagramas da palavra FILOSOFIA que possuem todas as vogais juntas. Temos que  $n$  vale:

- a) 1800
- b) 3600
- c) 4800



- d) 181440
- e) 362880

**04. (Imed 2016)** O número de candidatos inscritos para realização do último vestibular de verão, em um determinado curso, corresponde ao número de anagramas da palavra VESTIBULAR que começam por VE e terminam por AR. Esse número é igual a:

- a) 120
- b) 240
- c) 360
- d) 540
- e) 720

**05. (Efomm 2016)** A quantidade de anagramas da palavra MERCANTE que não possui vogais juntas é

- a) 40320
- b) 38160
- c) 37920
- d) 7200
- e) 3600

**06. (Imed 2015)** O total de anagramas da palavra LÓGICA é exatamente igual à medida, em graus, da soma dos ângulos internos de um polígono regular. Considerando que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão  $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$ , onde  $n$  corresponde ao número de lados, pode-se afirmar que esse polígono é um:

- a) Triângulo.
- b) Quadrado.
- c) Pentágono.
- d) Hexágono.
- e) Heptágono.

**07. (Pucrj 2015)** A quantidade de anagramas da palavra CONCURSO é:

- a) 2520
- b) 5040
- c) 10080
- d) 20160
- e) 40320

**08. (G1 - ifce 2014)** O número de anagramas da palavra TAXISTA, que começam com a letra X, é

- a) 180.
- b) 240.
- c) 720.
- d) 5040.
- e) 10080.

**09. (Pucrs 2014)** O número de anagramas da palavra BRASIL em que as vogais ficam lado a lado, e as consoantes também, é

- a) 24
- b) 48
- c) 96
- d) 240
- e) 720

**10. (Unioeste 2012)** Quantas palavras podemos formar, independente se tenham sentido ou não, com as 9 letras da palavra BORBOLETA?

- a) 81 440.
- b) 90 720.
- c) 362 880.
- d) 358 140.
- e) 181 440.

**11. (Ibmecrj 2009)** O número de anagramas que podem ser formados com as letras de PAPAGAIO, começando por consoante e terminando por O, é igual a:

- a) 120.
- b) 180.
- c) 240.
- d) 300.
- e) 320.

**12. (Puccamp 1998)** O número de anagramas da palavra EXPLODIR, nos quais as vogais aparecem juntas, é

- a) 360
- b) 720
- c) 1.440
- d) 2.160
- e) 4.320

**GABARITO – PERMUTAÇÃO - ANAGRAMAS**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | C | 02 | A | 03 | A |
| 04 | E | 05 | D | 06 | D |
| 07 | C | 08 | A | 09 | C |
| 10 | B | 11 | B | 12 | E |

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Permutação Simples e com Repetição**

**01. (Unisc 2016)** Newton possui 7 livros distintos, sendo 3 de Álgebra, 2 de Cálculo e 2 de Geometria. O número de maneiras diferentes que Newton pode organizar esses livros em uma estante, de forma que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos, é

- a) 24
- b) 36
- c) 56
- d) 72
- e) 144

**02. (Fatec 2016)** No Boxe, um dos esportes olímpicos, um pugilista tem à sua disposição quatro golpes básicos: o *jab*, o *direto*, o *cruzado* e o *gancho*. Suponha que um pugilista, preparando-se para os Jogos Olímpicos do Rio, em 2016, queira criar uma sequência com 6 golpes, empregando necessariamente dois *jabs*, dois *diretos*, um *cruzado* e um *gancho*. Assim, o número máximo de sequências que ele poderá criar será de

- a) 180
- b) 160
- c) 140
- d) 120
- e) 100

**03. (Upe 2013)** Seguindo a etiqueta japonesa, um restaurante tipicamente oriental solicita aos seus clientes que retirem seus calçados na entrada do estabelecimento. Em certa noite, 6 pares de sapato e 2 pares de sandálias, todos distintos, estavam dispostos na entrada do restaurante, em duas fileiras com quatro pares de calçados cada uma. Se esses pares de calçados forem organizados nessas fileiras de tal forma que as sandálias devam ocupar as extremidades da primeira fila, de quantas formas diferentes podem-se organizar esses calçados nas duas fileiras?

- a) 6!
- b) 2.6!
- c) 4.6!
- d) 6.6!
- e) 8!

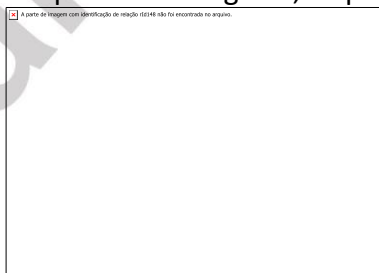
**04. (Upe 2013)** Oito amigos entraram em um restaurante para jantar e sentaram-se numa mesa retangular, com oito lugares, como mostra a figura a seguir:



Dentre todas as configurações possíveis, quantas são as possibilidades de dois desses amigos, Amaro e Danilo, ficarem sentados em frente um do outro?

- a) 1 440
- b) 1 920
- c) 2 016
- d) 4 032
- e) 5 760

**05. (Insper 2012)** Em cada ingresso vendido para um show de música, é impresso o número da mesa onde o comprador deverá se sentar. Cada mesa possui seis lugares, dispostos conforme o esquema a seguir.



O lugar da mesa em que cada comprador se sentará não vem especificado no ingresso, devendo os seis ocupantes entrar em acordo. Os ingressos para uma dessas mesas foram adquiridos por um casal de namorados e quatro membros de uma mesma família. Eles acordaram que os namorados poderiam sentar-se um ao lado do outro. Nessas condições, o número de maneiras distintas em que as seis pessoas poderão ocupar os lugares da mesa é

- a) 96.
- b) 120.
- c) 192.
- d) 384.
- e) 720.

**06. (Ufmg 2010)** Para montar a programação de uma emissora de rádio, o programador musical conta com 10 músicas distintas, de diferentes estilos, assim agrupadas: **4 de MPB, 3 de Rock e 3 de Pop**. Sem tempo para fazer essa programação, ele decide que, em cada um dos programas da emissora, serão tocadas, de forma aleatória, todas as 10 músicas. Assim sendo, é **CORRETO** afirmar que o número de programas distintos em que as músicas vão ser tocadas **agrupadas por estilo** é dado por

- a)  $4! \times 3! \times 3! \times 3!$
- b)  $\frac{10!}{7!}$
- c)  $4! \times 3! \times 3!$
- d)  $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$

**07. (Unesp 2002)** Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é

- a) 2.
- b) 4.
- c) 8.
- d) 16.
- e) 24.

**08. (G1 - ifpe 2016)** Uma urna contém 10 bolas, sendo 3 bolas pretas iguais, 3 bolas brancas iguais, 2 bolas verdes iguais e 2 bolas azuis iguais. Quantas são as maneiras diferentes de se extrair, uma a uma, as 10 bolas da urna, sem reposição?

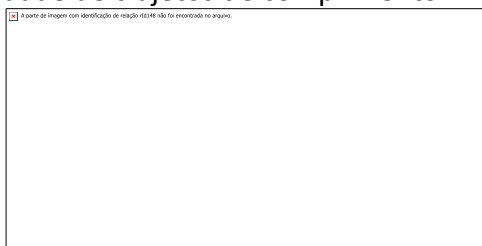
- a) 25200
- b) 10!
- c) 144
- d) 3600
- e) 72000

**GABARITO – PERMUTAÇÃO SIMPLES E COM REPETIÇÃO**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | E | 02 | A | 03 | B |
| 04 | E | 05 | C | 06 | A |
| 07 | C | 08 | A |    |   |

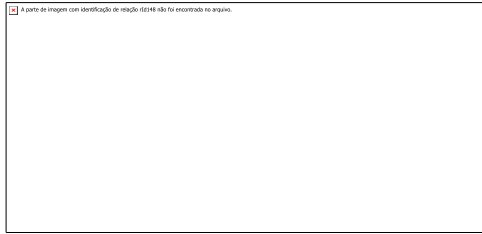
**EEXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Permutação - Caminhos**

**01. (Upf 2016)** Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando *A* a *B* é:



- a) 40320
- b) 6720
- c) 256
- d) 120
- e) 56

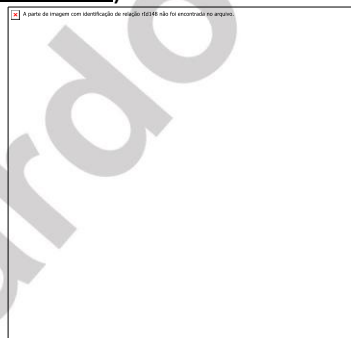
**02. (Ebmsp 2016)**



Na figura, a malha é formada por quadrados do mesmo tamanho cujos lados representam ruas de determinado bairro onde o deslocamento de veículos só é permitido no sentido leste ou norte e ao longo das ruas representadas pelas linhas. Nessas condições, o menor percurso para ir de  $P$  até  $R$  sem passar por  $Q$  pode ser feito por um número máximo de formas distintas igual a

- a) 105
- b) 75
- c) 54
- d) 36
- e) 15

**03. (Ufu 2012)** Um projeto piloto desenvolvido em um curso de Engenharia Mecânica prevê a construção do robô "Eddie", cujos movimentos estão limitados apenas a andar para frente ( $F$ ) e para a direita ( $D$ ). Suponha que Eddie está na posição  $A$  e deseja-se que ele se desloque até chegar à posição  $B$ , valendo-se dos movimentos que lhe são permitidos. Admita que cada movimento feito por Eddie o leve a uma posição consecutiva, conforme ilustra um esquema a seguir, em que foram realizados 10 movimentos (as posições possíveis estão marcadas por pontos e o percurso executado de  $A$  até  $B$ , é representado pela sequência ordenada de movimentos  $D F D D F F D F F D$ ).



Com base nas informações acima, o número de maneiras possíveis de Eddie se deslocar de  $A$  até  $B$ , sem passar pelo ponto  $C$ , é igual a

- a) 192
- b) 60
- c) 15
- d) 252

**GABARITO – PERMUTAÇÃO - CAMINHOS**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | E | 02 | A | 03 | A |
|----|---|----|---|----|---|

### 1.4.3 – Permutação Circular

Numa permutação cíclica ou permutação circular considera-se uma ordem que se inicia num objeto qualquer e termina em um antes dele, como um conjunto de pessoas em volta de uma mesa circular. Duas permutações circulares não se distinguem se as ordenações dos elementos são iguais, ou seja, se os correspondentes elementos nas duas ordenações são precedidos e seguidos pelos mesmos elementos no sentido do deslocamento dos ponteiros de um relógio. Por exemplo, se cinco pessoas estão jogando cartas, não se obtém uma nova permutação se todas elas mudam de lugares em torno da mesa mantendo as mesmas posições relativas, como ocorre quando todas elas se deslocam para a próxima posição à direita, por exemplo.

- ✓ Situação que ocorre quando temos grupos com  $n$  elementos distintos formando uma circunferência de círculo.

$$\text{Fórmula: } P_c(n) = (n - 1)!$$

$$\text{Cálculo para o exemplo: } P(4) = 3! = 6$$

#### **EXEMPLO 1**

Seja um conjunto com 4 pessoas  $K=\{A,B,C,D\}$ . De quantos modos distintos estas pessoas poderão sentar-se junto a uma mesa circular (pode ser retangular) para realizar o jantar sem que haja repetição das posições? Se considerássemos todas as permutações simples possíveis com estas 4 pessoas, teríamos 24 grupos, apresentados no conjunto:

$P_c = \{ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA\}$

Acontece que junto a uma mesa "circular" temos que:

$$ABCD = BCDA = CDAB = DABC$$

$$ABDC = BDCA = DCAB = CABD$$

$$ACBD = CBDA = BDAC = DACB$$

$$ACDB = CDBA = DBAC = BACD$$

$$ADBC = DBCA = BCAD = CADB$$

$$ADCB = DCBA = CBAD = BADC$$

Existem somente 6 grupos distintos, dados por:

$$P_c = \{ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB\}$$

## **EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Permutação Circular**

- 01.** De quantas maneiras 8 crianças podem ocupar os lugares de um carrossel?
- 02.** Cinco pessoas (entre elas 1 casal) devem sentar à a um circular. De quantos modos pode ser feita a sua disposição, de tal forma que o casal fique sempre juntos?
- 03.** De quantos modos podem 6 crianças se colocarem em roda?
- 04.** Das 8 pessoas que devem senta-se à mesa, A e B nunca podem ser vizinhas. Quantas são as disposições possíveis?
- 05.** Um joalheiro dispõe de 4 tipos de pedras preciosas para confeccionar broches (com as pedras em círculo) e alianças, usando em cada jóia uma pedra de cada tipo. Quantos broches diferentes ele pode construir? E quantas alianças?
- 06.** Os 8 lugares de um carrossel serão ocupados por 4 meninos e 4 meninas. Quantas são as maneiras de se fazer a ocupação de modo que meninos e meninas fiquem intercalados?
- 07.** De quantas maneiras oito pessoas podem se organizar em uma roda para fazer uma oração?
- 08.** Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?
- 09.** Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?
- 10.** De quantos modos 5 meninas e 5 meninos podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?
- 11.** De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?
- 12.** De quantos modos 4 casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado da sua mulher e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

### **GABARITO – PERMUTAÇÃO CIRCULAR**

|           |             |           |                      |           |            |
|-----------|-------------|-----------|----------------------|-----------|------------|
| <b>01</b> | <b>5040</b> | <b>02</b> | <b>12</b>            | <b>03</b> | <b>120</b> |
| <b>04</b> | <b>3600</b> | <b>05</b> | <b>6 BRO E 3 ALI</b> | <b>06</b> | <b>144</b> |
| <b>07</b> | <b>5040</b> | <b>08</b> | <b>48</b>            | <b>09</b> | <b>12</b>  |
| <b>10</b> | <b>2880</b> | <b>11</b> | <b>86400</b>         | <b>12</b> | <b>12</b>  |

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Permutação - ENEM

**01. (Enem 2016)** Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha. O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

a)  $10^2 \cdot 26^2$

b)  $10^2 \cdot 52^2$

c)  $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

d)  $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! 2!}$

e)  $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! 2!}$

**02. (Enem 2014)** Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a)  $20 \cdot 8! + (3!)^2$

b)  $8! \cdot 5! \cdot 3!$

c)  $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$

d)  $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$

e)  $\frac{16!}{2^8}$

**03. (Enem 2011)** O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é

a) 24.

b) 31.

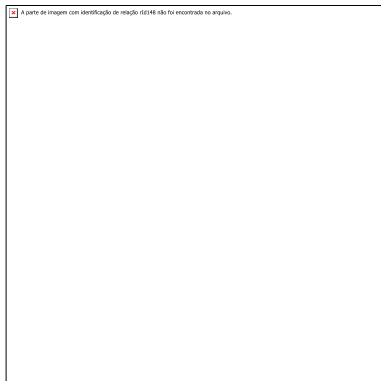
c) 32.

d) 88.

e) 89.

**04. (Enem 2010)** João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele saíra da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.





Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 *min*30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

- a) 60 *min*.
- b) 90 *min*.
- c) 120 *min*.
- d) 180 *min*.

**05. (Enem 2017)** Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

| Opção | Formato |
|-------|---------|
| I     | LDDDDD  |
| II    | DDDDDD  |
| III   | LLDDDD  |
| IV    | DDDDD   |
| V     | LLLDD   |

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. A opção que mais se adequa às condições da empresa é

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.

**GABARITO – PERMUTAÇÃO - ENEM**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | E | 02 | B | 03 | E |
| 04 | B | 05 | E |    |   |

### 1.5.1 - Combinação simples

Combinação simples é o tipo de agrupamento sem repetição em que um grupo é diferente de outro apenas pela natureza dos elementos componentes.

Considere o seguinte exemplo:

Para determinar as combinações simples que podem ser formadas com os elementos do conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$  tomados 3 a 3, basta encontrarmos todos os subconjuntos de  $A$  com três elementos:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Note que permutando os elementos de uma dessas combinações obtemos  $P_3$  arranjos:

$$\{a, b, c\} \rightarrow \begin{array}{l} (a, b, c) \\ (a, c, b) \\ (b, a, c) \\ (b, c, a) \\ (c, a, b) \\ (c, b, a) \end{array} \quad \text{número de arranjos: } P_3 = 3! = 6$$

Considerando o número total de arranjos de 4 elementos tomados 3 a 3 ( $A_{4,3}$ ), podemos descobrir o número total de combinações de 4 elementos tomados 3 a 3 ( $C_{4,3}$ ) estabelecendo a seguinte regra de três:

| número de combinações | número de arranjos |
|-----------------------|--------------------|
| 1                     | $P_3$              |
| $C_{4,3}$             | $A_{4,3}$          |

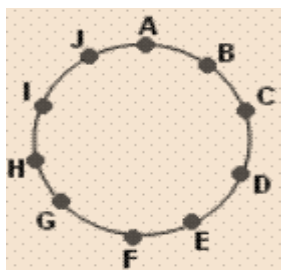
$$C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$$

Genericamente temos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_n} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

#### EXEMPLO 1

Quantos triângulos ficam determinados pelos 10 pontos distintos na circunferência?



Resolução:

Com 3 pontos distintos não alinhados formamos um triângulo. Os grupos de 3 pontos diferem apenas pela natureza, então queremos descobrir o número total de combinações de 10 elementos tomados 3 a 3.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = \frac{720}{6} = 120 \text{ triângulos}$$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – COMBINAÇÃO - OBJETIVAS

**01. (Eear 2017)** Em um campeonato de tênis estão inscritos 10 militares. Para disputar o campeonato, esses militares podem formar \_\_\_\_\_ duplas diferentes.

- a) 34.
- b) 35.
- c) 44.
- d) 45.

**02. (G1 - ifal 2016)** No Instituto Federal de Alagoas, há 7 professores de Matemática para serem distribuídos em 4 turmas. De quantas maneiras distintas se poderá fazer a distribuição dos professores nas turmas, independente da ordem?

- a) 28.
- b) 35.
- c) 70.
- d) 140.
- e) 210.

**03. (Pucrj 2016)** Uma escola quer fazer um sorteio com as crianças. Então, distribui cartelas que têm cada uma 3 números distintos de 1 a 20. No dia da festa, trarão uma urna com 20 bolas numeradas de 1 a 20 e serão retiradas (simultaneamente) três bolas. A criança que tiver a cartela com os três números ganhará uma viagem. Quantas cartelas diferentes são possíveis?

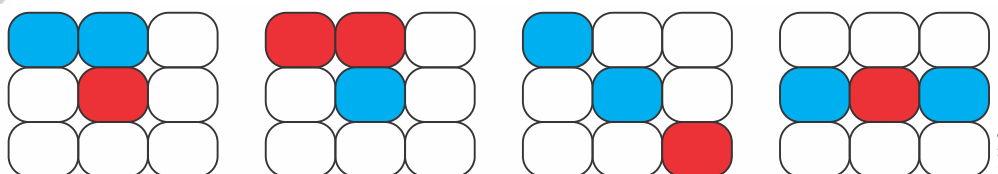
- a) 1140.
- b) 2000.
- c) 6840.
- d) 8000.
- e) 4400.

**04. (G1 - ifpe 2016)** O auditório do IFPE, campus Vitoria de Santo Antônio, tem formato retangular e dispõe de quatro aparelhos de ar-condicionado, sendo um ar-condicionado instalado em cada uma das suas quatro paredes. Em todos os eventos, pelo menos um aparelho deve estar ligado para a refrigeração do ambiente. De quantos modos diferentes este auditório pode ser refrigerado?

- a) 4.
- b) 16.
- c) 8.
- d) 64.
- e) 15.

**05. (Uerj 2016)** Um painel de iluminação possui nove seções distintas, e cada uma delas acende uma luz de cor vermelha ou azul. A cada segundo, são acesas, ao acaso, duas seções de uma mesma cor e uma terceira de outra cor, enquanto as seis demais permanecem apagadas.

Observe quatro diferentes possibilidades de iluminação do painel:



O tempo mínimo necessário para a ocorrência de todas as possibilidades distintas de iluminação do painel, após seu acionamento, é igual a  $x$  minutos e  $y$  segundos, sendo  $y < 60$ . Os valores respectivos de  $x$  e  $y$  são:

- a) 4 e 12.
- b) 8 e 24.
- c) 25 e 12.
- d) 50 e 24.

**06. (Feevale 2016)** Em certo bairro, houve um “troca-troca” de livros usados. João levou 10 livros de romance. Pedro levou 15 de poesia, e Marcelo, 7 de ficção. Marcelo quer levar para casa, em troca de seus livros, 4 de romance e 3 de poesia. Assinale a alternativa que representa o número de formas diferentes com que essa escolha pode ser feita.

- a)  $C_{10,4} \cdot C_{15,3}$
- b)  $C_{10,4} + C_{15,3}$
- c)  $A_{10,4} \cdot A_{15,3}$
- d)  $A_{10,3} \cdot A_{15,4}$
- e)  $A_{10,4} + A_{15,3}$

**07. (Uepa 2015)** Atual tendência alimentar baseada no maior consumo de legumes, verduras e frutas impulsiona o mercado de produtos naturais e frescos sem agrotóxicos e uma diminuição no consumo de produtos que levam glúten, lactose e açúcar. Uma empresa especializada no preparo de refeições, visando a esse novo mercado de consumidores, disponibiliza aos seus clientes uma “quentinha executiva” que pode ser entregue no local de trabalho na hora do almoço. O cliente pode compor o seu almoço escolhendo entradas, pratos principais e sobremesas. Se essa empresa oferece 8 tipos de entradas, 10 tipos de pratos principais e 5 tipos de sobremesas, o número de possibilidades com que um cliente pode compor seu almoço, escolhendo, dentre os tipos ofertados, duas entradas, um prato principal e uma sobremesa é:

- a) 400.
- b) 600.
- c) 800.
- d) 1200.
- e) 1400.

**08. (Unesp 2014)** Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com  $X$  na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa  $A$ , duas com a  $B$ , e assim por diante, como mostra o modelo.

**Modelo de folha de resposta (gabarito)**

|    | A | B | C | D | E |
|----|---|---|---|---|---|
| 01 | X |   |   |   |   |
| 02 |   |   | X |   |   |
| 03 |   | X |   |   |   |
| 04 |   |   |   | X |   |
| 05 | X |   |   |   |   |
| 06 |   |   |   |   | X |
| 07 |   |   |   | X |   |
| 08 |   |   |   |   | X |
| 09 |   | X |   |   |   |
| 10 |   |   | X |   |   |

Nessas condições, a quantidade de folha de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será

- a) 302 400.
- b) 113 400.
- c) 226 800.
- d) 181 440.
- e) 604 800.



**09. (Uemg 2014)** Na Copa das Confederações de 2013, no Brasil, onde a seleção brasileira foi campeã, o técnico Luiz Felipe Scolari tinha à sua disposição 23 jogadores de várias posições, sendo: 3 goleiros, 8 defensores, 6 meio-campistas e 6 atacantes. Para formar seu time, com 11 jogadores, o técnico utiliza 1 goleiro, 4 defensores, 3 meio-campistas e 3 atacantes. Tendo sempre Júlio César como goleiro e Fred como atacante, o número de times distintos que o técnico poderá formar é

- a) 14 000.
- b) 480.
- c)  $8! + 4!$
- d) 72 000.

**10. (Ufsm 2013)** As doenças cardiovasculares aparecem em primeiro lugar entre as causas de morte no Brasil. As cirurgias cardíacas são alternativas bastante eficazes no tratamento dessas doenças. Supõe-se que um hospital dispõe de 5 médicos cardiologistas, 2 médicos anestesistas e 6 instrumentadores que fazem parte do grupo de profissionais habilitados para realizar cirurgias cardíacas. Quantas equipes diferentes podem ser formadas com 3 cardiologistas, 1 anestesista e 4 instrumentadores?

- a) 200.
- b) 300.
- c) 600.
- d) 720.
- e) 1.200.

**11. (Uerj 2012)** A tabela abaixo apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

| País | Descrição  | Exemplo de placa  |
|------|--|---|
| X    | 3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem   |  |
| Y    | um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem |  |

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a  $n$  e no país Y igual a  $p$ . A razão  $\frac{n}{p}$  corresponde a:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 6

### **GABARITO – COMBINAÇÃO SIMPLES - OBJETIVAS**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | D | 02 | B | 03 | A |
| 04 | E | 05 | B | 06 | A |
| 07 | E | 08 | B | 09 | A |
| 10 | B | 11 | B |    |   |

### **EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Combinação - Jogos**

**01. (Uemg 2013)** O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos de 1 a 60. Um apostador, depois de vários anos de análise, deduziu que, no próximo sorteio, os 6 números sorteados estariam entre os 10 números que tinha escolhido. Sendo assim, com a intenção de garantir seu prêmio na Sena, ele resolveu fazer todos os possíveis jogos com 6 números entre os 10 números escolhidos. Quantos reais ele gastará para fazê-los, sabendo que cada jogo com 6 números custa R\$ 2,00?

- a) R\$ 540,00.
- b) R\$ 302.400,00.
- c) R\$ 420,00.
- d) R\$ 5.040,00.

**02. (Uel 2011)** O jogo da Mega-Sena consiste no sorteio de 6 números distintos entre 1 e 60. Um apostador escolhe 20 números distintos e faz todos os  $C_{20,6}$  jogos possíveis de serem realizados com os 20 números. Se ele acertar os seis números sorteados, entre os vinte escolhidos, além da aposta sorteada com a sena, quantas apostas premiadas com a quina (cinco números corretos) ele conseguirá?

- a) 75 apostas
- b) 84 apostas
- c)  $C_{20,5}$  apostas
- d)  $C_{6,5}$  apostas
- e) 70 apostas

**03. (Unesp 2011)** Em um jogo lotérico, com 40 dezenas distintas e possíveis de serem escolhidas para aposta, são sorteadas 4 dezenas e o ganhador do prêmio maior deve acertar todas elas. Se a aposta mínima, em 4 dezenas, custa R\$ 2,00, uma aposta em 6 dezenas deve custar:

- a) R\$ 15,00
- b) R\$ 30,00
- c) R\$ 35,00
- d) R\$ 70,00
- e) R\$ 140,00

**04. (Pucpr 2010)** No jogo da Mega Sena, um apostador pode assinalar entre 6 e 15 números, de um total de 60 opções disponíveis. O valor da aposta é igual a R\$ 2,00 multiplicado pelo número de sequências de seis números que são possíveis, a partir daqueles números assinalados pelo apostador.

Por exemplo: se o apostador assinala 6 números, tem apenas uma sequência favorável e paga R\$ 2,00 pela aposta. Se o apostador assinala 7 números, tem sete sequências favoráveis, ou seja, é possível formar sete sequências de seis números a partir dos sete números escolhidos. Neste caso, o valor da aposta é R\$ 14,00. Considerando que se trata de uma aplicação de matemática, sem apologia a qualquer tipo de jogo, assinale a única alternativa CORRETA.

- a) A aposta máxima custará R\$ 5.005,00.
- b) Uma aposta com 14 números assinalados custará entre R\$ 3.000,00 e R\$ 3.050,00.

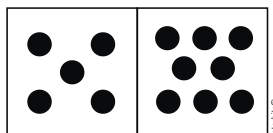
- c) Apostar dois cartões com dez números assinalados, ou cinco cartões com nove números assinalados, são opções equivalentes em termos de custo e de chance de ser ganhador do prêmio máximo.
- d) O custo de uma aposta com 12 números assinalados será inferior a R\$ 1.830,00.
- e) Apostar um cartão com 13 números assinalados custará o dobro da aposta de um cartão com 12 números assinalados.

**GABARITO – COMBINAÇÃO - JOGOS**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | C | 02 | B | 03 | B |
| 04 | C |    |   |    |   |

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Combinação - Discursivas**

**01. (Ufpe 2012)** As pedras de um dominó usual são compostas por dois quadrados, com 7 possíveis marcas (de zero pontos até 6 pontos). Quantas pedras terá um dominó se cada quadrado puder ter até 9 pontos? Veja no desenho abaixo um exemplo de uma nova pedra do dominó.



**02. (Uel 2016)** Leia o texto a seguir.

O movimento Free Hugs começou em 2001 com um único indivíduo, em Sidney, Austrália, conhecido pelo pseudônimo de Juan Mann. Ao se ver em situação desconfortável, com vários problemas pessoais e familiares, Mann decidiu sair sozinho, caminhando pelas ruas e oferecendo abraços às pessoas em lugares públicos como um gesto hipoteticamente neutro e sem interesses. Ele usava um cartaz de papelão nas mãos com a mensagem “Free Hugs” para oferecer abraços a desconhecidos. Nos dias de hoje, várias vezes ao ano e em diferentes cidades no mundo, agentes voluntários saem, sozinhos ou em grupos organizados, pelas ruas, repetindo a ação inicial de Mann para propor a troca de abraços com desconhecidos.

(Adaptado de: MARTINS, F. G. P.; GUSHIKEN, Y. *Free Hugs*: dinâmicas de troca, dádiva e estranhamento na intervenção urbana. Comunicação, mídia e consumo. ano 9. v.9. n.24. maio 2012. p.179-198.)

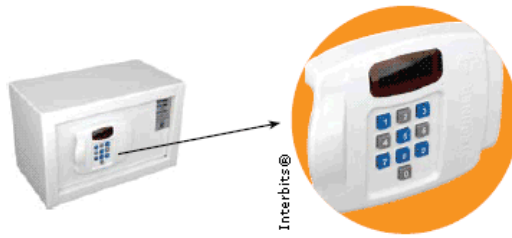
Em um determinado dia, uma apresentadora de um programa de TV, após exibir reportagem sobre o movimento “Free Hugs”, propôs aos espectadores da plateia que saudassem a todos os demais (uns aos outros) com um abraço. Considere que:

- ✓ Todos aceitaram o abraço;
- ✓ Os abraços ocorreram apenas entre pessoas da plateia;
- ✓ Cada abraço envolveu apenas duas pessoas;
- ✓ Duas pessoas se abraçaram apenas uma vez;
- ✓ Quando terminaram as saudações, o total de abraços foi de 496.

Quantas pessoas formavam a plateia do programa naquele dia?

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

**03. (Uerj 2010)** Um cofre eletrônico possui um painel com dez teclas numéricas e pode ser aberto por meio da digitação, em qualquer ordem, de três teclas distintas dentre seis habilitadas previamente pelo fabricante. Considere  $n$  o número máximo de conjuntos distintos de três teclas que abrem o cofre. Na figura em destaque, as teclas azuis representam as habilitadas previamente.



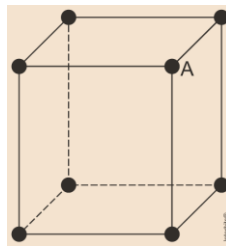
Se o fabricante reduzisse para cinco o número de teclas habilitadas, haveria entre elas um total de  $m$  conjuntos distintos de três teclas distintas para abrir o cofre.  
 Calcule o valor de  $n - m$ .

**GABARITO – COMBINAÇÃO - DISCURSIVAS**

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 01 | 55 | 02 | 32 | 03 | 10 |
|----|----|----|----|----|----|

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Combinação - Geometria e Inequações**

**01. (Pucrs 2016)** O número de triângulos que podem ser formados unindo o vértice  $A$  a dois dos demais vértices do paralelepípedo é



- a) 15
- b) 18
- c) 21
- d) 24
- e) 27

**02. (Mackenzie 2015)** O número de polígonos convexos distintos que podemos formar, com vértices nos pontos de coordenadas  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(0,2)$ ,  $(0,3)$ ,  $(2,0)$ ,  $(2,1)$ ,  $(2,2)$  e  $(2,3)$  do plano, é

- a) 101
- b) 84
- c) 98
- d) 100
- e) 48

**03. (Acafe 2015)** O conjunto  $S$  é formado pela solução da inequação dada a seguir, com  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x(x+5)} - \left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} \geq 0$$

O número de conjuntos de 3 elementos cada um, que podemos formar com os elementos obtidos em  $S$  é igual a:

- a) 10
- b) 120
- c) 64
- d) 20



**04. (Uece 2014)** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas distintas e paralelas. Se fixarmos 10 pontos em  $r$  e 6 pontos em  $s$ , todos distintos, ao unirmos, com segmentos de reta, três quaisquer destes pontos não colineares, formam-se triângulos. Assinale a opção correspondente ao número de triângulos que podem ser formados.

- a) 360
- b) 380
- c) 400
- d) 420

**GABARITO – COMBINAÇÃO – GEOMETRIA PLANA e INEQUAÇÕES**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | C | 02 | B | 03 | D |
| 04 | D |    |   |    |   |

**EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO - ENEM**

**01. (Enem 2016)** O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

- a)  $\frac{10!}{2!.8!} - \frac{4!}{2!.2!}$
- b)  $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$
- c)  $\frac{10!}{2!.8!} - 2$
- d)  $\frac{6!}{4!} + 4.4$
- e)  $\frac{6!}{4!} + 6.4$

**02. (Enem 2013)** Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

| Quantidade de números escolhidos em uma cartela | Preço da cartela (R\$) |
|---|------------------------|
| 6   | 2,00                   |
| 7   | 12,00                  |
| 8   | 40,00                  |
| 9   | 125,00                 |
| 10  | 250,00                 |

Cinco apostadores, cada um com R\$500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

- ✓ Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;
- ✓ Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;
- ✓ Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;
- ✓ Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;
- ✓ Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

- a) Caio e Eduardo.
- b) Arthur e Eduardo.
- c) Bruno e Caio.
- d) Arthur e Bruno.
- e) Douglas e Eduardo.

**03. (Enem 2ª aplicação 2010)** Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

| Museus nacionais      | Museus internacionais    |
|-----------------------|--------------------------|
| Masp — São Paulo      | Louvre — Paris           |
| MAM — São Paulo       | Prado — Madri            |
| Ipiranga — São Paulo  | British Museum — Londres |
| Imperial — Petrópolis | Metropolitan — Nova York |

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

- a) 6
- b) 8
- c) 20
- d) 24
- e) 36

**04. (Enem 2009)** A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase zero. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto  $\{01, 02, 03, \dots, 59, 60\}$ , custava R\$ 1,50. Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R\$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

- a)  $1 \frac{1}{2}$  vez menor.
- b)  $2 \frac{1}{2}$  vezes menor.
- c) 4 vezes menor.
- d) 9 vezes menor.

**05. (Enem 2009)** Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em

seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

- a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
- b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
- c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
- d) duas combinações.

**06. (Enem 2007)** Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir.

| Grupos Taxonômicos | Número de Espécies |
|--------------------|--------------------|
| Artiodáctilos      | 4                  |
| Carnívoros         | 18                 |
| Cetáceos           | 2                  |
| Quirópteros        | 103                |
| Lagomorfos         | 1                  |
| Marsupiais         | 16                 |
| Perissodáctilos    | 1                  |
| Primates           | 20                 |
| Roedores           | 33                 |
| Sirênios           | 1                  |
| Edentados          | 10                 |
| <b>Total</b>       | <b>209</b>         |

**T & C Amazônia**, ano 1, n.º 3, dez./2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos - uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a

- a) 1320.
- b) 2090.
- c) 5845.
- d) 6600.
- e) 7245.

**GABARITO – COMBINAÇÃO - ENEM**

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 01 | A | 02 | A | 03 | D |
| 04 | C | 05 | A | 06 | A |

### 1.5.2 – Combinação com Repetição

✓ **O que se entende por combinações com repetição ?**

Considere um conjunto de  $n$  elementos diferentes. Denominamos de combinações com repetição de  $n$  elementos diferentes  $p$  a  $p$  é todo agrupamento formado por  $p$  elementos iguais ou diferentes escolhidos entre os  $n$  elementos dados de modo que a ordem dos elementos não modifique a combinação.

✓ **Como é representado o número de combinações com repetição de  $n$  elementos  $p$  a  $p$  ?**

O número de combinações com repetição de  $n$  elementos  $p$  a  $p$  é representado por  $C_{rep(n,p)}$ .

✓ **Como se calcula o número de combinações com repetição ?**

Exemplificando vamos considerar um conjunto de **3** elementos **a, b e c**. Vamos formar as combinações com repetição dos **3** elementos em grupos de **2** elementos, de **3** elementos e de **4** elementos para procurar uma lei de formação.

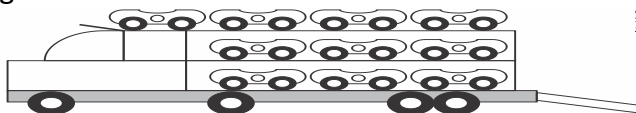
| $n = 3$          | $p = 2$       | $p = 3$       | $p = 4$       |
|------------------|---------------|---------------|---------------|
|                  |               |               | aaaa          |
|                  |               | aaa           | aaab          |
|                  |               |               | aaac          |
|                  | aa            | aab           | aabb          |
|                  |               |               | aabc          |
| a                |               | aac           | aacc          |
|                  | ab            | abb           | abbb          |
|                  |               |               | abbc          |
|                  |               | abc           | abcc          |
|                  | ac            | acc           | accc          |
|                  |               | bbb           | bbbb          |
|                  | bb            | bbc           | bbbc          |
| b                |               | bcc           | bbcc          |
|                  | bc            | bcc           | bccc          |
| c                | cc            | ccc           | cccc          |
| número de grupos | 6             | 10            | 15            |
|                  | $C_{4,2}$     | $C_{5,3}$     | $C_{6,4}$     |
|                  | $C_{3+2-1,2}$ | $C_{3+3-1,3}$ | $C_{3+4-1,4}$ |

Generalizando 

$$C_{rep(n,p)} = C_{n+p-1,p}$$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Combinação com Repetição

01. O mercadinho tem 6 marcas diferentes de café no estoque. De quantas formas uma compra de 8 pacotes de café pode ser feita?
02. De quantas maneiras, uma oficina pode pintar cinco automóveis iguais, recebendo cada um, tinta de uma única cor, se a oficina dispõe apenas de três cores e não quer misturá-las?
03. Seja o conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Quantos são os subconjuntos possíveis contendo dois elementos?
04. Qual é o número total de maneiras distintas de se distribuírem dez notas de R\$ 10,00 entre três pessoas?
05. (Enem 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

- a)  $C_{6,4}$                       b)  $C_{9,3}$                       c)  $C_{10,4}$                       d)  $6^4$                       e)  $4^6$
06. De quantos modos podemos comprar 4 salgadinhos em uma lanchonete que oferece 7 opções de escolha de salgadinhos?
07. Podendo escolher entre 5 tipos de queijos e 4 marcas de vinhos, de quantos modos é possível fazer um pedido num restaurante, com duas qualidades de queijo e 3 garrafas de vinho?
08. Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação  $x + y + z < 10$ ?
09. De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?
10. Quantas são as peças de um dominó comum? Como é possível calcular este número?
11. Determinar o número de combinações com 4 elementos tomados com repetição de 7 livros.
12. Determine o número de soluções inteiras e positivas da equação :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$

## GABARITO – COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

|    |      |    |     |    |       |
|----|------|----|-----|----|-------|
| 01 | 1287 | 02 | 21  | 03 | 6     |
| 04 | 66   | 05 | B   | 06 | 210   |
| 07 | 300  | 08 | 84  | 09 | 60480 |
| 10 | 28   | 11 | 210 | 12 | 2002  |