



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E  
DE COMPUTAÇÃO



# **Generalização do Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto Indireto**

**Leonardo Rodrigues de Lima Teixeira**

Orientador: Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo

Natal/RN, julho de 2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E  
DE COMPUTAÇÃO



# **Generalização do Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto Indireto**

**Leonardo Rodrigues de Lima Teixeira**

Orientador: Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo

**Qualificação de Doutorado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da UFRN (área de concentração: Automação e Sistemas) como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Natal/RN, julho de 2014

---

# Resumo

---

Nesse trabalho, é proposta uma generalização do Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto Indireto (IDMARC), o qual une as características transitórias e de robustez típicas dos Sistemas a Estrutura Variável, mais especificamente do Controlador Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável Indireto (IVS-MRAC), com um sinal de controle suave em regime permanente, típico dos Controladores Adaptativos convencionais, como o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência Indireto (IMRAC). Por fazer uso da abordagem indireta, ele proporciona uma maneira mais intuitiva de realizar o projeto do controlador, baseado nos parâmetros físicos da planta, tais como: resistência, momento de inércia, capacitância, dentre outros. Com a generalização, será possível realizar o controle de plantas com grau relativo maior que um ou de fase não-mínima.

**Palavras-chave:** Sistemas com Estrutura Variável, Controle Adaptativo por Modelo de Referência, Controle Adaptativo Indireto.

---

# Abstract

---

In this work is proposed a generalization to the Indirect Dual Mode Adaptive Robust Controller (IDMARC), combining the typical transient and robustness properties of Variable Structure Systems, more specifically of Indirect Variable Structure Model Reference Adaptive Controller (IVS-MRAC), with a smooth control signal in steady-state, typical of conventional Adaptive Controllers, as Indirect Model Reference Adaptive Controller (IMRAC). Due to use the indirect approach it provides a more intuitive controller design, based on physical plant parameters, as resistances, inertia moments, capacitances, etc. With the generalization, it will be possible to perform the control for plants with arbitrary relative degree or non-minimum phase.

**Keywords:** Variable Structure Systems, Model Reference Adaptive Control, Indirect Adaptive Control.

---

# Sumário

---

<b>Sumário</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>7</b>
2.1 IMRAC . . . . .	7
2.1.1 Descrição do Problema . . . . .	8
2.1.2 Leis Adaptativas . . . . .	12
2.1.3 Simulações . . . . .	12
2.2 IVS-MRAC . . . . .	14
2.2.1 Leis Adaptativas . . . . .	14
2.2.2 Simulações . . . . .	15
2.3 B-MRAC . . . . .	17
2.3.1 Lei Adaptativa . . . . .	17
2.3.2 Simulações . . . . .	18
2.4 DMARC . . . . .	21
2.4.1 Lei Adaptativa . . . . .	21
2.4.2 Ajuste do DMARC . . . . .	22
2.4.3 Simulações . . . . .	23
<b>3 IB-MRAC</b>	<b>27</b>
3.1 Leis Adaptativas . . . . .	28
3.2 Análise de Estabilidade . . . . .	29
3.3 Simulações . . . . .	37
<b>4 IDMARC</b>	<b>42</b>
4.1 Leis Adaptativas . . . . .	43
4.2 Análise de Estabilidade . . . . .	43
4.3 Simulações . . . . .	52
<b>5 IDMARC Generalizado</b>	<b>57</b>
5.1 Compensador Shunt . . . . .	58

<b>6 Cronograma</b>	<b>61</b>
<b>7 Conclusões</b>	<b>62</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>

---

# Lista de Figuras

---

1.1	Estrutura do controle adaptativo direto . . . . .	2
1.2	Estrutura do controle adaptativo indireto . . . . .	3
1.3	Diagrama de blocos do controle adaptativo por modelo de referência . . . . .	4
2.1	Estrutura do controle adaptativo por modelo de referência indireto . . . . .	8
2.2	Desempenho do sistema com o IMRAC aplicado à planta de 2 <sup>a</sup> ordem . . . . .	13
2.3	Adaptação dos parâmetros da planta com $\theta_p^{*T} = [k_p^* \beta^{*T} \alpha_1^* \alpha^{*T}] = [11-21]$ . . . . .	13
2.4	Desempenho do sistema com o IVS-MRAC aplicado à planta de 2 <sup>a</sup> ordem . . . . .	16
2.5	Desempenho com o IVS-MRAC na presença de perturbação . . . . .	16
2.6	Desempenho do B-MRAC para ganho adaptativo de baixa magnitude . . . . .	19
2.7	Adaptação dos parâmetros . . . . .	19
2.8	Desempenho do B-MRAC com ganho adaptativo elevado . . . . .	20
2.9	Adaptação dos parâmetros . . . . .	20
2.10	Representação gráfica do parâmetro $\mu$ . . . . .	22
2.11	Desempenho com o DMARC aplicado à planta de 2 <sup>a</sup> ordem com $L = 10^{-9}$ . . . . .	23
2.12	Desempenho com o DMARC aplicado à planta de 2 <sup>a</sup> ordem com $L = 10^{-7}$ . . . . .	24
2.13	Desempenho com o DMARC aplicado à planta de 2 <sup>a</sup> ordem com $L = 10^{-5}$ . . . . .	25
2.14	Desempenho do DMARC para o caso da Tabela (2.2) com $L = 10^{-9}$ . . . . .	26
2.15	Desempenho do DMARC para o caso da Tabela com $L = 10^{-7}$ . . . . .	26
3.1	Desempenho do IB-MRAC para $r(t) = 1$ e ganhos adaptativos iguais a 10 . . . . .	38
3.2	Adaptação paramétrica para $r(t) = 1$ e ganhos adaptativos iguais a 10 . . . . .	38
3.3	Desempenho do IB-MRAC para $r(t) = 1$ e ganhos adaptativos iguais a $10^4$ . . . . .	39
3.4	Adaptação paramétrica para $r(t) = 1$ e ganhos adaptativos iguais a $10^4$ . . . . .	39
3.5	Desempenho do IB-MRAC com saturação . . . . .	40
3.6	Adaptação paramétrica com saturação . . . . .	40
3.7	Desempenho do IB-MRAC no teste de robustez . . . . .	41
3.8	Adaptação dos parâmetros no teste de robustez . . . . .	41
4.1	Desempenho com o IDMARC para $r(t) = 1$ sem perturbação . . . . .	52
4.2	Adaptação paramétrica para $r(t) = 1$ sem perturbação . . . . .	53
4.3	Desempenho com o IDMARC para o caso da Tabela (2.2) com $L = 10^{-9}$ . . . . .	54
4.4	Adaptação paramétrica para o caso da Tabela (2.2) com $L = 10^{-9}$ . . . . .	54
4.5	Desempenho do IDMARC para o caso da Tabela (2.2) com $L = 10^{-7}$ . . . . .	55
4.6	Adaptação paramétrica para o caso da Tabela (2.2) com $L = 10^{-7}$ . . . . .	55
4.7	Desempenho do IDMARC com perturbação e variação paramétrica . . . . .	56
4.8	Adaptação paramétrica com perturbação e variação paramétrica . . . . .	56

5.1	Diagrama de blocos do sistema com o shunt . . . . .	60
-----	---	----



---

# Lista de Tabelas

---

2.1	Mudanças da perturbação na entrada do sistema com o IVS-MRAC . . . . .	15
2.2	Mudanças de referências e perturbações na entrada da planta . . . . .	25
4.1	Casos para definição do valor de $\sigma_{\alpha_1}$ . . . . .	47
4.2	Casos para definição do valor de $\sigma_{k_p}$ . . . . .	51

---

# Capítulo 1

## Introdução

---

Na área de controle de processos, considerando sistemas com única entrada e única saída - *Single Input Single Output* (SISO), são estudadas técnicas para definição de um sinal de controle, ou ação de controle,  $u$  tal que possa conduzir a variável do processo (representada pela saída  $y$ ), como pressão, temperatura, nível de um reservatório, dentre outras, para uma determinada referência  $r$ .

Alguns sistemas apresentam variações ou incertezas paramétricas, fazendo com que um controlador previamente projetado deixe de funcionar de forma adequada, havendo assim a necessidade de refazer o projeto do controlador para a nova situação. Adicionalmente, temos ainda a existência de ruídos e interferências de várias naturezas que podem influenciar diretamente no desempenho do controlador e, conseqüentemente, do sistema, podendo inclusive levá-lo à instabilidade. Para realizar o controle destes tipos de sistema, uma estratégia adequada é o controle adaptativo.

A ideia básica do controle adaptativo é estimar os parâmetros (seja da planta ou do controlador) em tempo real, baseado em medições dos sinais do sistema, e fazer uso das estimativas geradas para calcular o sinal de controle. Assim, um sistema de controle adaptativo pode ser visto como um sistema de controle com estimação paramétrica em tempo real. O objetivo do controle adaptativo é manter o desempenho do sistema, mesmo na presença de incertezas ou variações nos parâmetros da planta. Este tipo de controle é útil em muitos contextos industriais, tais como: robótica, controle de navios, aviação, processos químicos e metalúrgicos [Slotine & Li 1991].

A forma como a estimação paramétrica, também conhecida como lei adaptativa, é combinada com a lei de controle leva a duas abordagens diferentes: a direta e a indireta.

No controle adaptativo direto, o modelo da planta  $P(\theta^*)$ , onde  $\theta^*$  é o vetor com os parâmetros da planta, é parametrizado em termos do vetor desconhecido dos parâmetros do controlador  $\theta_c^*$ , com o qual  $C(\theta_c^*)$  atende aos requisitos de desempenho, para obter o modelo  $P_c(\theta_c^*)$  com exatamente as mesmas características de entrada/saída de  $P(\theta^*)$  [Ioannou & Sun 1996].

O estimador de parâmetros em tempo real é projetado baseado em  $P_c(\theta_c^*)$  ao invés de  $P(\theta^*)$  para prover estimativas diretas  $\theta_c(t)$  de  $\theta_c^*$  em cada instante  $t$  através do processamento da entrada  $u$  e da saída  $y$  da planta. A estimativa  $\theta_c(t)$  é então usada para atualizar o vetor de parâmetros do controlador  $\theta_c$  sem cálculos intermediários. A escolha da classe de leis de controle  $C(\theta_c)$  e os estimadores de parâmetros que geram  $\theta_c(t)$ , de forma que

$C(\theta_c(t))$  atenda os requisitos de desempenho para o modelo  $P(\theta^*)$  são os principais problemas no controle adaptativo direto. As propriedades do modelo  $P(\theta^*)$  são fundamentais na obtenção do modelo parametrizado  $P_c(\theta_c^*)$  que é conveniente para a estimação em tempo real. Como consequência, o controle adaptativo direto é restrito a certas classes de modelos de planta [Ioannou & Sun 1996].

O diagrama de blocos que representa o controle adaptativo direto está representado na Figura (1.1).

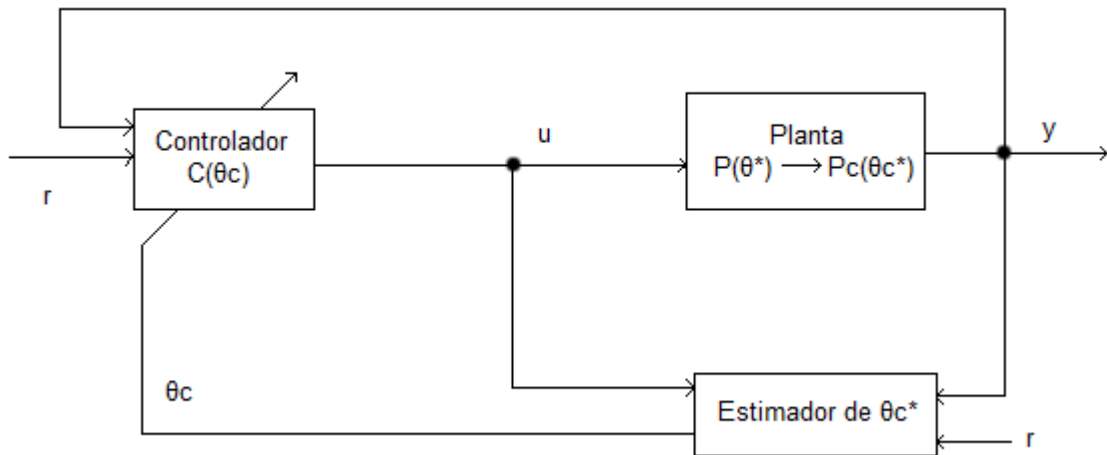


Figura 1.1: Estrutura do controle adaptativo direto

No controle adaptativo indireto (abordagem utilizada neste trabalho), o modelo da planta  $P(\theta^*)$  é parametrizado em relação a um vetor de parâmetros desconhecidos  $\theta^*$ . Por exemplo, para uma planta linear, invariante no tempo (LIT) e monovariável (SISO),  $\theta^*$  pode representar os coeficientes desconhecidos do numerador e do denominador da função de transferência do modelo. Um estimador em tempo real gera uma estimativa  $\theta(t)$  de  $\theta^*$  a cada instante  $t$ , processando a entrada  $u$  e a saída  $y$ . A estimativa dos parâmetros  $\theta(t)$  especifica um modelo estimado caracterizado por  $\hat{P}(\theta(t))$  que, para os propósitos do projeto do controlador, é tratado como o verdadeiro modelo da planta no instante  $t$ , e é usado para calcular os parâmetros do controlador ou vetor de ganhos  $\theta_c(t)$  através da equação algébrica  $\theta_c(t) = F(\theta(t))$  a cada instante  $t$ . As formas da lei de controle  $C(\theta_c)$  e da equação algébrica  $\theta_c = F(\theta)$  são escolhidas como as mesmas que seriam usadas (lei de controle  $C(\theta_c^*)$  e equação  $\theta_c^* = F(\theta^*)$ ) para atender os requisitos de desempenho para o modelo  $P(\theta^*)$  se  $\theta^*$  fosse conhecido. É claro, neste método, que  $C(\theta_c(t))$  é projetada a cada instante  $t$  de modo a satisfazer os requisitos de desempenho do modelo estimado  $\hat{P}(\theta(t))$ , que pode ser diferente do modelo da planta desconhecida  $P(\theta^*)$ . Assim, o principal problema no controle adaptativo indireto é escolher a classe de leis de controle  $C(\theta_c)$  e a classe de estimadores de parâmetros que geram  $\theta(t)$ , bem como a equação algébrica  $\theta_c(t) = F(\theta(t))$ , de forma que  $C(\theta_c(t))$  atenda os requisitos de desempenho para o modelo  $P(\theta^*)$  com  $\theta^*$  desconhecido [Ioannou & Sun 1996]. Na Figura (1.2), temos a estrutura do

controle adaptativo indireto.

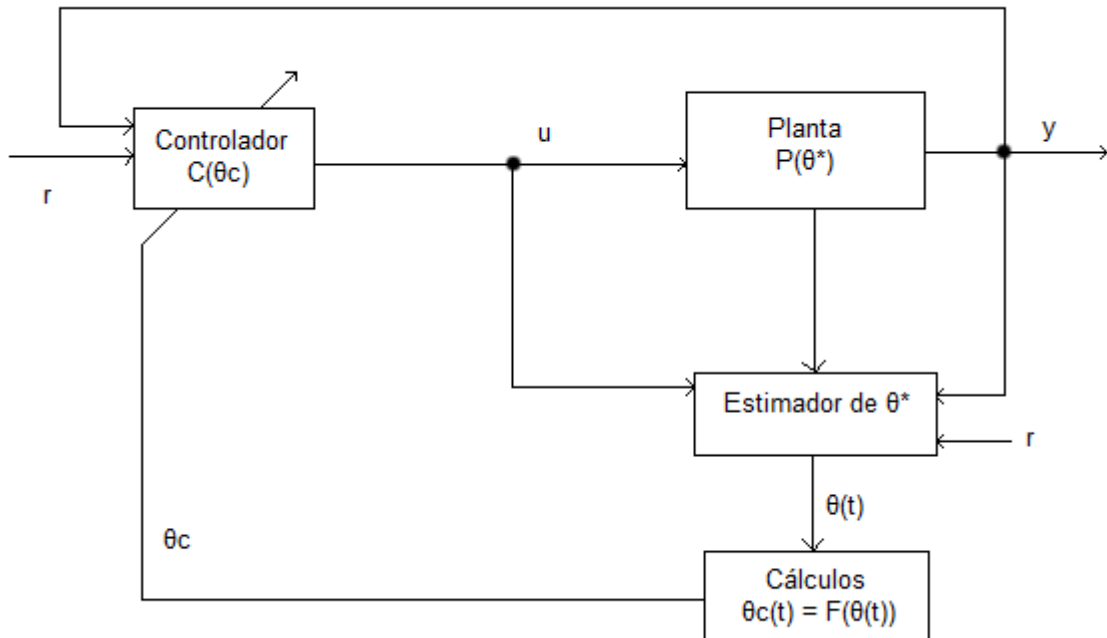


Figura 1.2: Estrutura do controle adaptativo indireto

O controle adaptativo por modelo de referência é uma das estratégias mais difundidas e utilizadas dos sistemas adaptativos. Ele pode ser considerado um servo-sistema, cujo desempenho desejado é expresso em termos de um modelo de referência, o qual fornece a resposta desejada para um dado sinal de comando. Isso é uma forma conveniente de fornecer especificações para um servo-problema. O diagrama de blocos do controle adaptativo por modelo de referência pode ser verificado através da Figura (1.3). A partir dele podemos observar que o sistema tem uma malha comum composta pelo processo e pelo controlador, e outra que fica responsável pelas mudanças nos parâmetros do controlador. Os parâmetros são alterados com base na realimentação do erro, o qual é a diferença entre a saída do sistema e a saída do modelo de referência [Aström & Wittenmark 1989]. O mecanismo de ajuste dos parâmetros pode ser obtido por métodos diversos de estimação de parâmetros, tais como: gradiente, mínimos quadrados, dentre outros.

Neste tipo de controle adaptativo, quando o erro entre a saída da planta e a do modelo de referência se anula, podemos dizer que a condição de *matching* foi alcançada. Isso é possível porque durante o período de adaptação os polos da planta são reposicionados, e os zeros da planta são cancelados e, posteriormente, substituídos pelos zeros do modelo de referência.

Controladores baseados na estimação de parâmetros, como o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência convencional - MRAC [Narendra et al. 1980] -, costumam possuir um bom comportamento em regime permanente, com um sinal de controle suave, porém costumam apresentar transitório lento e oscilatório. Além disso, este algoritmo

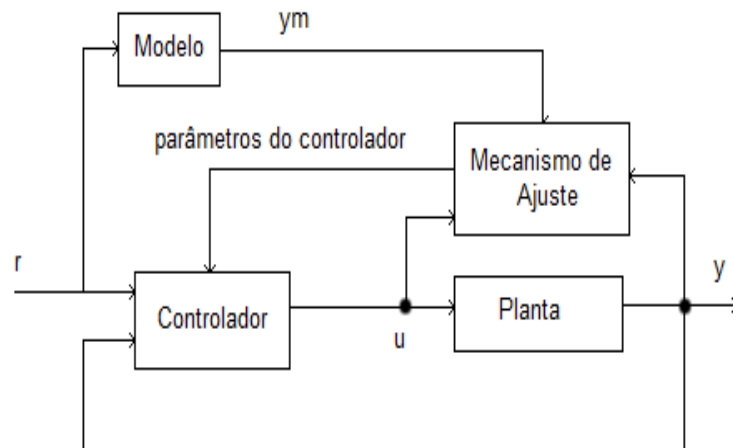


Figura 1.3: Diagrama de blocos do controle adaptativo por modelo de referência

não é robusto na presença de dinâmicas não-modeladas e/ou distúrbios externos [Rohrs et al. 1985]. É importante deixar claro que o problema de falta de robustez do MRAC convencional já foi superado com a inserção de várias estratégias aplicadas nas suas leis adaptativas originais, tais como: modificação  $\sigma$  [Ioannou & Kokotovic 1984], modificação  $\sigma$  com normalização [Ioannou & Tsakalis 1986] e projeção [Naik et al. 1993].

Uma outra linha de estudos que tem sido bastante utilizada no tratamento de problemas de sistemas de controle com incertezas são os chamados Sistemas a Estrutura Variável (*Variable Structure Systems - VSS*), principalmente na forma conhecida como Controle por Modos Deslizantes (*Sliding Mode Control - SMC*). Neste método, as funções de chaveamento das variáveis de controle devem ser projetadas de modo a restringir a dinâmica do sistema a uma superfície denominada superfície deslizante [Oliveira 2007]. O projeto de um Controlador por Modos Deslizantes provê uma abordagem sistemática para o problema de manter a estabilidade na presença de imprecisões na modelagem [Slotine & Li 1991].

Os Sistemas a Estrutura Variável surgiram a partir do estudo dos controladores a relé, e costumam apresentar como principais características um rápido transitório e robustez na presença de incertezas paramétricas e/ou distúrbios externos. Em contrapartida, os controladores baseados nesta técnica costumam apresentar um sinal de controle de alta frequência, gerando o fenômeno de *chattering* [Oliveira 2003].

Com o pensamento de fornecer robustez ao sistema, mantendo a ideia básica do controle adaptativo por modelo de referência, [Hsu & Costa 1989] desenvolveram o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (*Variable Structure Model Reference Adaptive Control - VS-MRAC*), o qual possui leis adaptativas chaveadas, ao invés de leis integrais como no MRAC convencional, e faz uso apenas de medidas da entrada e da saída do sistema. Este algoritmo foi desenvolvido para plantas lineares com grau relativo (diferença entre polos e zeros) unitário e apresentou estabilidade assintótica global. O mesmo algoritmo foi generalizado posteriormente para grau relativo

arbitrário em [Hsu 1990]. O VS-MRAC apresentou uma melhoria considerável no que diz respeito às características transitórias assim como de robustez, porém o sinal de controle é de alta frequência, impondo certa dificuldade para sua implementação. [Hsu et al. 1994] reduziram o problema do *chattering* através da inserção de regiões lineares nas funções a relé, mantendo as propriedades principais do VS-MRAC original. Porém, essa suavização no sinal de controle leva a um erro em regime permanente, que pode ser corrigido por um compensador proporcional-integral (PI) com saturação, no caso de referência do tipo degrau.

Na tentativa de conciliar o bom desempenho em regime permanente dos controladores adaptativos com as características transitórias dos controladores a estrutura variável, [Hsu & Costa 1990] observaram o sistema adaptativo segundo a Teoria de Controle Binário descrita em [Emelyanov 1987], e propuseram o Controlador Adaptativo Binário por Modelo de Referência (*Binary Model Reference Adaptive Control* - B-MRAC) para plantas com grau relativo unitário, e posteriormente, em [Hsu & Costa 1994], para grau relativo arbitrário. Uma particularidade dos algoritmos binários propostos por [Emelyanov 1987] é que o controle gerado pelo controlador é uma função contínua ou contínua por partes no tempo. Isso satisfaz os requisitos impostos nos atuadores. Na prática, o B-MRAC consiste de uma lei adaptativa gradiente de alto ganho com projeção. Quando este ganho fixo é elevado, o B-MRAC tende ao VS-MRAC [Hsu & Costa 1994].

Mesmo com as diversas técnicas de suavização do sinal de controle aplicáveis ao VS-MRAC, como em [Hsu 1997], o sistema resultante baseia-se em síntese de sinal em lugar de adaptação paramétrica. Assim, se a planta é invariante no tempo, lentamente variante no tempo ou não tem frequentes saltos de variações, parece mais razoável a escolha de um esquema de adaptação que combine adaptação paramétrica com um esquema de estrutura variável. Do esquema de controle resultante, espera-se as boas propriedades transitórias do controle de estrutura variável e as desejáveis propriedades de regime permanente dos controladores de parâmetros adaptativos [Cunha 2008].

Assim sendo, [Cunha et al. 2001] desenvolveram o Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto (DMARC), o qual faz uso das estratégias de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) e Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC) através da Lógica *Fuzzy*, utilizando funções de pertinência descritas seguindo o modelo Mamdani. Posteriormente, [Mota & Araujo 2002] propuseram o mesmo controlador, porém com o modelo Takagi-Sugeno, o qual permitiu a obtenção de uma expressão analítica para a lei de adaptação. Em ambos, a atuação do MRAC é predominante para o erro de saída pequeno, enquanto o VS-MRAC atua de forma mais incisiva quando o erro cresce. O grande diferencial do DMARC com relação ao B-MRAC é devido ao fato de que no primeiro o parâmetro que determina qual estratégia atuará de forma mais incisiva é ajustado dinamicamente, enquanto no segundo, o parâmetro é fixo, definido no projeto. O DMARC foi criado com o intuito de obter as propriedades de regime permanente do MRAC (como um sinal de controle suave), com a robustez e características transitórias do VS-MRAC.

Todas estas soluções citadas (MRAC, VS-MRAC, B-MRAC e DMARC) são baseadas na abordagem direta do controle adaptativo, na qual faz-se necessária a utilização de equações de *matching* para estimar os valores iniciais dos parâmetros do controlador e/ou

as amplitudes dos relés. Uma característica desta estratégia é que para sistemas de maior ordem, essas expressões tornam-se complexas.

A abordagem indireta possibilita um projeto mais intuitivo do controlador. Isso se deve à relação entre os parâmetros do modelo da planta e os do sistema físico real, tais como: momento de inércia, resistências, capacitâncias, dentre outros, os quais possuem valores de tolerância conhecidos ainda na fase de modelagem da planta.

A versão indireta do MRAC é conhecida por MRAC Indireto - IMRAC - [Ioannou & Sun 1996], e a do VS-MRAC é denominada IVS-MRAC [Oliveira & Araujo 2004]. Ambos mantêm as principais características de suas respectivas versões diretas, mas proveem um projeto mais simples e intuitivo.

Neste trabalho, será apresentado o desenvolvimento das versões indiretas do B-MRAC e do DMARC, denominadas IB-MRAC e IDMARC, respectivamente, para plantas com grau relativo unitário, com demonstração de prova de estabilidade e resultados em simulações. Adicionalmente, é proposta uma generalização para o IDMARC - principal foco do trabalho - para plantas com grau relativo arbitrário, fazendo uso de um compensador *shunt* em paralelo, de forma a tornar a planta aumentada (planta e compensador) de grau relativo unitário. Além dessa técnica permitir a generalização do algoritmo para plantas com grau relativo maior que um, ela também tornará possível o controle em plantas de fase não-mínima.

No Capítulo 2, será feita a revisão dos algoritmos que formaram a base para este trabalho (IMRAC, IVS-MRAC, B-MRAC e DMARC). No Capítulo 3, será detalhada a construção do Controlador Adaptativo Binário Indireto por Modelo de Referência (IB-MRAC), apresentando sua prova de estabilidade e resultados de simulações. Em seguida, no Capítulo 4, teremos a apresentação do IDMARC, também com prova de estabilidade e simulações. No Capítulo 5, a ideia de generalização do IDMARC para plantas com grau relativo maior que um e/ou de fase não-mínima é discutida. O cronograma para conclusão do trabalho é detalhado no Capítulo 6. E, finalmente, no Capítulo 7, são traçadas as conclusões.

---

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

---

### 2.1 IMRAC

O Controlador Adaptativo Indireto por Modelo de Referência (IMRAC), assim como o MRAC, atua baseado na existência de um modelo de referência do sistema, o qual dita a dinâmica desejada para a planta. Em ambos há a adaptação dos parâmetros com o objetivo de tornar o erro de saída (entre a planta e o modelo de referência) nulo, ou pelo menos próximo disso. Quando o erro de saída é nulo, podemos dizer que a condição de *matching* foi obtida.

A diferença entre os algoritmos está no fato de que o MRAC estima o vetor dos parâmetros do controlador  $\theta(t)$  a partir das leis adaptativas de uma forma direta, tentando obter o vetor da condição de *matching*  $\theta^*$ . Já o IMRAC estima o ganho de alta frequência  $k_p$  e os coeficientes dos polinômios da planta  $Np(s)$  e  $Dp(s)$ , e estes, por sua vez, são usados para determinar o vetor dos parâmetros do controlador  $\theta(t)$  a cada instante  $t$  [Ioannou & Sun 1996].

A vantagem de usar o IMRAC, ao invés do MRAC, é determinar as estimativas iniciais para os parâmetros da planta de uma forma mais intuitiva já que eles são obtidos a partir da modelagem do sistema, sendo diretamente relacionados com os parâmetros físicos, os quais possuem incertezas conhecidas.

O vetor de parâmetros da planta, composto pelo ganho de alta frequência, e pelos coeficientes do numerador e do denominador da função de transferência da planta é comumente denominado de  $\theta_p^*$ . Como, a princípio, não conhecemos o vetor  $\theta_p^*$ , a estimativa do mesmo no instante  $t$  -  $\theta_p(t)$  - é utilizada como se fosse  $\theta_p^*$  para calcular o vetor dos parâmetros do controlador  $\theta$ .

O controle adaptativo indireto já foi representado através da Figura (1.2). Adicionando o modelo de referência ao diagrama de blocos, obtemos o esquema do IMRAC como representado pela Figura (2.1). O erro entre a saída da planta e a do modelo de referência é representado por  $e_o$ .

O IMRAC, assim como o MRAC convencional, pode apresentar um transitório lento, devido ao processo de adaptação, e falta de robustez na presença de dinâmica não modelada e/ou distúrbios externos [Rohrs et al. 1985]. Em contrapartida, o sinal de controle é suave em regime permanente.



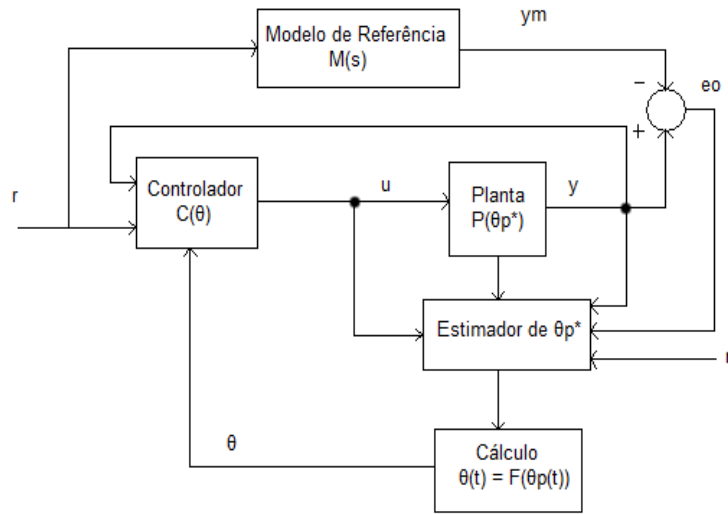


Figura 2.1: Estrutura do controle adaptativo por modelo de referência indireto

### 2.1.1 Descrição do Problema

Considere uma planta linear SISO com parâmetros desconhecidos ou conhecidos com incertezas, invariante no tempo, com função de transferência

$$W(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)},$$

$$N_p(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i s^{n-1-i}, \quad (2.1)$$

$$D_p(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} s^{n-1-i},$$

e entrada  $u$  e saída  $y$ .

O modelo de referência tem entrada  $r$ , saída  $y_m$ , e função de transferência da forma

$$M(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)},$$

$$N_m(s) = s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{m,i} s^{n-1-i}, \quad (2.2)$$

$$D_m(s) = s^n + \alpha_{m,1} s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{m,i+1} s^{n-1-i}.$$

A proposta é determinar uma lei de controle  $u$  tal que o erro de saída

$$e_o = y - y_m \quad (2.3)$$

tenda a zero para condições iniciais e sinais de referência  $r(t)$  uniformemente limitados e contínuos por partes arbitrários.

As seguintes hipóteses são feitas:

- a) A planta é monovariável, observável e controlável, com  $\text{grau}[D_p(s)] = n$  e  $\text{grau}[N_p(s)] = n-1$ , ou seja, grau relativo  $n^* = 1$ ;
- b)  $\text{sgn}(k_p) = \text{sgn}(k_m)$ , positivo por simplicidade;
- c)  $N_p(s)$ ,  $N_m(s)$  e  $D_m(s)$  são polinômios mônicos Hurwitz;
- d)  $M(s)$  tem o mesmo grau relativo da planta e é escolhido ser Estritamente Real Positivo (ERP);
- e)  $D_p(s)$  é um polinômio mônico.

Considere os seguintes filtros de entrada e saída:

$$\dot{v}_1 = \Lambda v_1 + gu, \quad (2.4)$$

$$\dot{v}_2 = \Lambda v_2 + gy,$$

onde  $v_1, v_2 \in \mathfrak{R}^{n-1}$ ,  $g = [0 \ \dots \ 0 \ \gamma]^T \in \mathfrak{R}^{n-1}$ ,  $\gamma > 0$ , e  $\Lambda \in \mathfrak{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  é escolhido tal que  $N_m(s) = \det(sI - \Lambda)$ .

Definindo  $\theta^T(t) = [ \theta_{v_1}^T(t) \ \theta_n(t) \ \theta_{v_2}^T(t) \ \theta_{2n}(t) ]$  como o vetor dos parâmetros adaptativos do controlador, e  $\omega^T = [ v_1^T \ y \ v_2^T \ r ]$  como o vetor regressor, a lei de controle é definida da seguinte forma:

$$u = \theta^T(t)\omega(t). \quad (2.5)$$

Se a planta  $W(s)$  for conhecida, então é possível determinar o valor do vetor constante  $\theta^*$  tal que a função de transferência da planta em malha fechada seja  $M(s)$ . Quando esse vetor é obtido, a condição de *matching* é alcançada com  $u = \theta^{*T}\omega$ . Quando  $W(s)$  é desconhecida,  $\theta(t)$  é adaptada até que  $e_o(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . Sob uma condição de riqueza de sinal, temos  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$ .

Tome  $A, b, h^T$  como uma realização mínima da planta e  $x \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estado. Definindo  $X^T = [ x^T \ v_1^T \ v_2^T ] \in \mathfrak{R}^{3n-2}$ , a planta e os filtros podem ser representados no espaço de estado como segue:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_0 X + b_0 u, \\ y &= h_c^T X, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde,

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ gh^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} b \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, h_c^T = [ h^T \ 0 \ 0 ].$$

Sabendo que  $b_0\theta^{*T}\omega - b_0\tilde{\theta}^{*T}\omega = 0$ , e somando esses termos no lado direito de  $\dot{X}$ , temos:

$$\dot{X} = A_c X + b_c r + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega, \quad (2.7)$$

$$y = h_c^T X,$$

onde  $A_c = A_0 + b_0 \begin{bmatrix} \theta_n^* h^T & \theta_{v1}^{*T} & \theta_{v2}^{*T} \end{bmatrix}$ ,  $b_c = b_0 \theta_{2n}^*$ , e  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ .

O modelo de referência por variáveis de estado é representado da seguinte forma:

$$\dot{X}_m = A_c X_m + b_c r, \quad (2.8)$$

$$y_m = h_c^T X_m.$$

Definindo o vetor erro  $e \triangleq X - X_m$ , e sabendo que  $\tilde{\theta}^T \omega = u - \theta^{*T} \omega$ , é possível extrair a equação do erro:

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{\theta_{2n}^*} (u - \theta^{*T} \omega), \quad (2.9)$$

$$e_o = h_c^T e.$$

No domínio da frequência,

$$e_o(s) = \frac{1}{\theta_{2n}^*} M(s) [u(s) - \theta^{*T} w(s)]. \quad (2.10)$$

No caso indireto, os parâmetros da planta são estimados a cada instante de tempo  $t$ , representado por  $\hat{\theta}_p^T(t) = \begin{bmatrix} \hat{k}_p(t) & \hat{\beta}^T(t) & \hat{\alpha}_1(t) & \hat{\alpha}^T(t) \end{bmatrix}$ , onde

- $\hat{\beta}(t) \in \mathfrak{R}^{(n-1)}$  é um vetor composto pelos elementos  $\beta_i$ ,  $i = n - 1, \dots, 1$  de  $N_p(s)$  no instante  $t$ ;
- $\hat{\alpha}_1(t) \in \mathfrak{R}$  é o elemento  $\alpha_1$  de  $D_p(s)$  no instante  $t$ ;
- $\hat{\alpha}(t) \in \mathfrak{R}^{(n-1)}$  é um vetor composto pelos elementos  $\alpha_{i+1}$ ,  $i = n - 1, \dots, 1$  de  $D_p(s)$  no instante  $t$ ;
- $\beta_m \in \mathfrak{R}^{(n-1)}$  é um vetor composto pelos elementos  $\beta_{m,i}$ ,  $i = n - 1, \dots, 1$  de  $N_m(s)$ ;
- $\alpha_{m1} \in \mathfrak{R}$  é o elemento  $\alpha_{m1}$  de  $D_m(s)$ ;
- $\alpha_m \in \mathfrak{R}^{(n-1)}$  é um vetor composto pelos elementos  $\alpha_{m,i+1}$ ,  $i = n - 1, \dots, 1$  de  $D_m(s)$ .

A partir das estimativas dos parâmetros da planta, podemos calcular os parâmetros do controlador [Ioannou & Sun 1996]:

$$\begin{aligned}
 \theta_{v1}(t) &= \frac{\beta_m - \hat{\beta}(t)}{\gamma}, \\
 \theta_n(t) &= \frac{\hat{\alpha}_1(t) - \alpha_{m1}}{\hat{k}_p(t)}, \\
 \theta_{v2}(t) &= \frac{\hat{\alpha}(t) - \alpha_m + (\alpha_{m1} - \hat{\alpha}_1(t))\beta_m}{\hat{k}_p(t)\gamma}, \\
 \theta_{2n}(t) &= \frac{k_m}{\hat{k}_p(t)},
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

com  $|\hat{k}_p(t)| \neq 0, \forall t \geq 0$ .

Os erros paramétricos são definidos como

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_p &= \hat{k}_p - k_p, \\
 \tilde{\beta} &= \hat{\beta} - \beta, \\
 \tilde{\alpha}_1 &= \hat{\alpha}_1 - \alpha_1, \\
 \tilde{\alpha} &= \hat{\alpha} - \alpha.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Desenvolvendo a equação do erro para o caso indireto [Oliveira 2007], temos:

$$\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} [ \tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha ], \tag{2.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \zeta_p &= \frac{\beta_m^T v_1}{\gamma_p} - u - \frac{\beta^T v_1}{\gamma_p}, \\
 \zeta_{\beta i} &= \frac{-v_{1,i}}{\gamma}, i = 1, \dots, n-1, \\
 \zeta_1 &= y - \frac{\beta_m^T v_2}{\gamma_1}, \\
 \zeta_{\alpha i} &= \frac{v_{2,i-1}}{\gamma}, i = 2, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

com  $\gamma > 0$ ,  $\gamma_p > 0$  e  $\gamma_1 > 0$ .

### 2.1.2 Leis Adaptativas

De acordo com [Ioannou & Sun 1996], as leis adaptativas integrais para os parâmetros da planta de grau relativo unitário são listadas a seguir:

$$\text{se } (|\hat{k}_p| > k_0) \text{ ou } (|\hat{k}_p| = k_0 \text{ e } e_o \zeta_p \text{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0)$$

$$\dot{\hat{k}}_p = -\gamma_p e_o \zeta_p, \gamma_p > 0,$$

senão

$$\dot{\hat{k}}_p = 0, \quad (2.15)$$

$$\dot{\hat{\beta}} = \Gamma_\beta e_o v_1 \text{sgn}(k_p),$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_1 = -\gamma_1 e_o \zeta_1,$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\Gamma_\alpha e_o v_2,$$

onde  $k_0$  é um limite inferior para  $k_p$ ,  $\Gamma_\alpha = \text{diag}(\gamma_{\alpha i}), \gamma_{\alpha i} > 0, i = 2 \dots n$ ,  $\Gamma_\beta = \text{diag}(\gamma_{\beta i}), \gamma_{\beta i} > 0, i = 1 \dots n-1$ .

A partir do vetor estimado dos parâmetros da planta, é possível calcular os parâmetros do controlador a cada instante  $t$  como em (2.11).

### 2.1.3 Simulações

Para verificar o desempenho do IMRAC foram realizadas simulações em uma planta de ordem 2, grau relativo unitário e instável (com polos em +1):

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}. \quad (2.16)$$

Como modelo de referência, optou-se por um modelo de fase mínima, estável (com polos em -1 e -3), de mesma ordem e grau relativo da planta:

$$M(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}. \quad (2.17)$$

Analisando (2.16), podemos verificar facilmente que  $\theta_p^{*T} = [k_p^* \ \beta^{*T} \ \alpha_1^* \ \alpha^{*T}] = [1 \ 1 \ -2 \ 1]$ . Devido a abordagem indireta, poderíamos sintonizar as estimativas iniciais dos parâmetros da planta iguais aos seus valores nominais (vantagem desta abordagem). Apenas para mostrar o processo de adaptação dos parâmetros, os mesmos foram projetados com valores aproximados:  $\hat{\theta}_p^T(0) = [\hat{k}_p(0) \ \hat{\beta}^T(0) \ \hat{\alpha}_1(0) \ \hat{\alpha}^T(0)] = [1.2 \ 1.2 \ -1.8 \ 1.2]$ .

Para uma referência do tipo degrau unitário, passo de integração  $h = 10^{-4}$ ,  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ ,  $\Lambda = -2$ ,  $g = 1$  e considerando os ganhos adaptativos de (2.15) iguais a 10,

o resultado obtido pelo sistema está representado na Figura (2.2), o qual nos apresenta uma oscilação no transitório e um sinal de controle suave, sem picos, durante todo o tempo de simulação. Adicionalmente, na Figura (2.3), podemos perceber a evolução das estimativas dos parâmetros da planta, as quais não convergiram para os seus valores na condição de *matching*, mas ficaram numa região próxima. A não convergência pode ser explicada pela falta de sinal persistentemente excitante na referência.

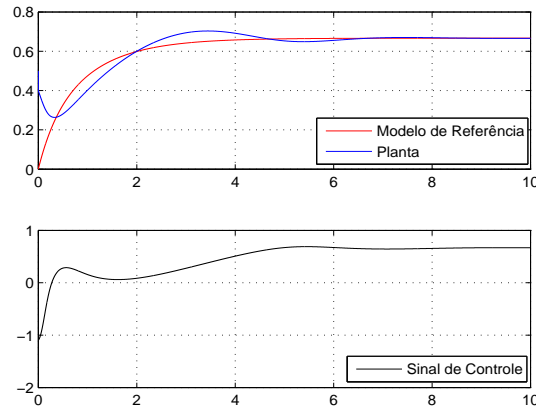


Figura 2.2: Saídas da planta e do modelo de referência e sinal de controle do IMRAC aplicado à planta de 2ª ordem

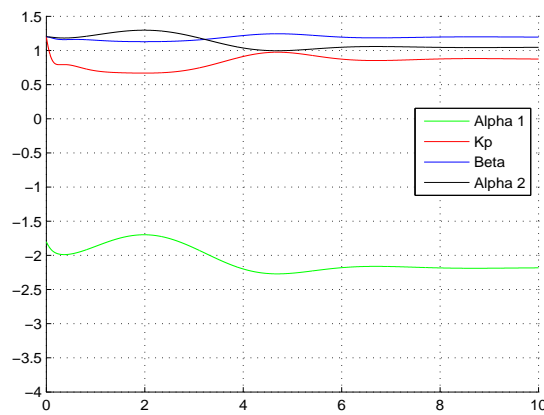


Figura 2.3: Adaptação dos parâmetros da planta com  $\theta_p^{*T} = [ k_p^* \beta^{*T} \alpha_1^* \alpha_2^{*T} ] = [11-21]$

## 2.2 IVS-MRAC

O Controlador Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável (IVS-MRAC) foi apresentado em [Oliveira & Araujo 2004], e trata-se da versão indireta do VS-MRAC, sendo baseado no projeto de leis chaveadas para os parâmetros da planta, ao invés das leis integrais utilizadas no MRAC e no IMRAC. Este algoritmo torna o projeto mais intuitivo na determinação das amplitudes iniciais dos relés, pois estas são diretamente relacionadas com os parâmetros da planta, os quais possuem incertezas que podem ser identificadas de forma relativamente simples, considerando que os parâmetros do modelo da planta se relacionam com os parâmetros físicos, tais como: coeficientes de fricção, resistências, dentre outros [Oliveira & Araujo 2008c].

Assim como o VS-MRAC, o IVS-MRAC apresenta transitório rápido e rejeição a distúrbios externos. A prova de estabilidade completa para plantas com grau relativo unitário na presença de dinâmica não-modelada e distúrbios externos é considerada em [Oliveira & Araujo 2008a].

[Fernandes et al. 2010] estenderam o esquema do IVS-MRAC para o caso geral (grau relativo arbitrário) introduzindo um compensador *shunt* para uma versão simplificada do IVS-MRAC, denominada IVS-MRAC Compacto [Oliveira & Araujo 2008b]. A presença do *shunt* faz com que o sistema completo possua grau relativo unitário. Esse novo projeto, denominado SIVS-MRAC, também é aplicável a plantas de fase não mínima.

O IVS-MRAC foi aplicado com sucesso em ambiente industrial, atuando no controle real de velocidade de um motor de indução trifásico [Oliveira et al. 2010], e no controle de posição de um disco magnético sobre uma coluna de vidro em um sistema de levitação magnética [Torres et al. 2010]. Além disso, obteve-se um bom desempenho simulado no controle de nível de fluido em um sistema de bombeio mecânico de poços de petróleo [Torres & Schnitman 2010] [Torres & Schnitman 2012], e no controle de temperatura em um sistema de secagem de grãos - já na versão generalizada (SIVS-MRAC) [Oliveira, Fernandes & Teixeira 2012], sempre apresentando rapidez no transitório e robustez a incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas, porém, ainda apresentando um sinal de controle de alta frequência.

### 2.2.1 Leis Adaptativas

As leis adaptativas chaveadas para estimação dos parâmetros da planta do IVS-MRAC são listadas abaixo:

$$\begin{aligned}
 \hat{k}_p &= k_{p,nom} - \bar{k}_p \operatorname{sgn}(e_o \zeta_p), \\
 \hat{\beta}_i &= -\bar{\beta}_i \operatorname{sgn}(e_o \zeta_{\beta_i} \operatorname{sgn}(k_p)), i = 1, \dots, n-1, \\
 \hat{\alpha}_1 &= -\bar{\alpha}_1 \operatorname{sgn}(e_o \zeta_1), \\
 \hat{\alpha}_i &= -\bar{\alpha}_i \operatorname{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_i}), i = 2, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde  $k_{p,nom}$  está na expressão de  $\hat{k}_p$  para garantir que  $\hat{k}_p$  permanecerá positivo durante os

chaveamentos, garantindo a hipótese  $b$  descrita na Seção (2.1.1). Isso é muito importante na prova de estabilidade do IVS-MRAC [Oliveira & Araujo 2008a].

Assim, as condições suficientes para o dimensionamento das amplitudes dos relés e consequente obtenção do modo deslizante são [Oliveira 2007]:

$$\begin{aligned}\bar{k}_p &> |k_p^* - k_{p,nom}|, \text{ com } k_{p,nom} > \bar{k}_p, \\ \bar{\beta}_i &> |\beta_i^*|, i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{\alpha}_1 &> |\alpha_1^*|, \\ \bar{\alpha}_i &> |\alpha_i^*|, i = 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{2.19}$$

A descrição do problema para o IMRAC, detalhada na Seção (2.1.1), também se adequa ao IVS-MRAC. Dessa forma, a partir das estimativas dos parâmetros da planta fornecidas por (2.18), temos como calcular o vetor dos parâmetros do controlador  $\theta$  como em (2.11) para a aplicação da lei de controle (2.5), a qual atuará no sistema com a finalidade de tornar o erro de saída (2.9) nulo.

## 2.2.2 Simulações

Assim como foi feito com o IMRAC, foram realizadas simulações para verificar o desempenho do IVS-MRAC na planta (2.16), usando o modelo de referência (2.17).

Para a realização da sintonia do controlador (etapa de projeto), observou-se os valores nominais da planta a ser controlada, e a partir destes realizou-se a escolha apropriada para as amplitudes dos relés:  $k_{p,nom} = 0.9$ ,  $\bar{k}_p = 0.3$ ,  $\bar{\beta} = 1.2$ ,  $\bar{\alpha}_1 = 2.2$  e  $\bar{\alpha} = 1.2$ , mostrando novamente a facilidade desta etapa quando trata-se de um algoritmo que segue a abordagem indireta.

Considerando  $h = 10^{-4}$ ,  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ ,  $\Lambda = -2$ ,  $g = 1$ , e ganhos adaptativos - utilizados em (2.14) - iguais a 2, podemos visualizar o desempenho do sistema através da Figura (2.4). Observa-se um rápido transitório, sem oscilações, com um sinal de controle chaveado de baixa amplitude, mas de alta frequência.

Com o objetivo de testar a robustez do IVS-MRAC, realizou-se uma simulação com inserção de uma perturbação  $d$  uniformemente limitada na entrada da planta, seguindo a seguinte configuração:

Intervalo	Perturbação
$0 \leq t < 1$	$d(t) = 0$
$1 \leq t < 3$	$d(t) = 2$
$3 \leq t \leq 5$	$d(t) = 5$

Tabela 2.1: Mudanças da perturbação na entrada do sistema com o IVS-MRAC



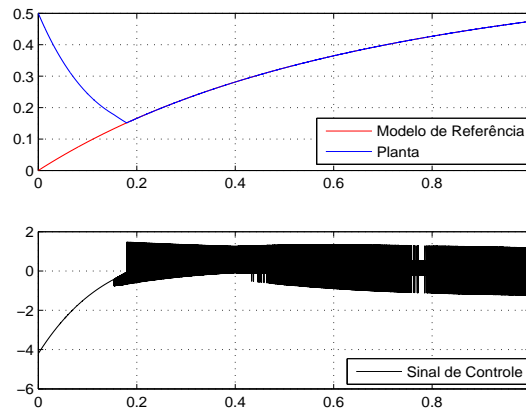


Figura 2.4: Saídas da planta e do modelo de referência e sinal de controle do IVS-MRAC aplicado à planta de 2ª ordem

O desempenho do sistema pode ser visualizado através da Figura (2.5). Podemos observar a rápida reação do sistema nos momentos de inserção/mudança da perturbação. Assim como o aumento na magnitude do sinal de controle gerado, devido ao aumento na magnitude da perturbação.

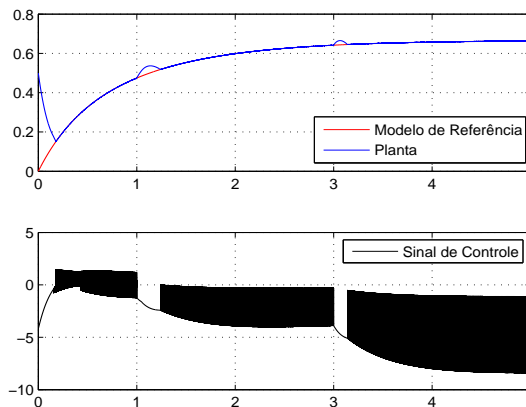


Figura 2.5: Saídas da planta e do modelo de referência e sinal de controle do IVS-MRAC aplicado à planta de 2ª ordem na presença de perturbação

## 2.3 B-MRAC

O Controlador Adaptativo Binário por Modelo de Referência (B-MRAC) é um controlador que consegue atuar como MRAC ou como VS-MRAC, a depender de um parâmetro fixo  $\gamma$  definido no projeto do controlador. Em [Hsu & Costa 1994], provou-se que a lei do VS-MRAC é obtida caso  $\gamma \rightarrow \infty$ . Além disso, foi provado que para um  $\gamma$  finito, a condição de *matching* é alcançada, pois com os parâmetros dentro de uma região limitante, a lei adaptativa do B-MRAC torna-se a do MRAC convencional.

O B-MRAC foi desenvolvido a partir da Teoria de Controle Binário de [Emelyanov 1987], em [Hsu & Costa 1990], para grau relativo unitário. Posteriormente, em [Hsu & Costa 1994], o mesmo foi generalizado para grau relativo arbitrário. Com o B-MRAC, temos garantia de uma estabilidade global exponencial para o sistema [Hsu & Costa 1990] [Hsu & Costa 1994].

Como trabalhos recentes relacionados com o B-MRAC, podemos citar: o desenvolvimento de uma versão MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) para plantas lineares incertas e de fase mínima com grau relativo unitário [Yanque et al. 2012], o rastreamento global de sistemas incertos com o sinal do ganho de alta frequência desconhecido [Oliveira, Peixoto, Nunes & Hsu 2012], e a aplicação em uma estratégia de controle de formação de agentes móveis incertos do tipo Euler-Lagrange baseada em funções potenciais artificiais [Pereira et al. 2009].

### 2.3.1 Lei Adaptativa

$$\dot{\theta} = -\sigma\theta - \gamma e_o w, \sigma > 0, \quad (2.20)$$

$$\text{onde } \sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \text{ ou } \sigma_{eq} < 0 \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\theta\| \geq M_\theta \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0 \end{cases},$$

$$M_\theta > \|\theta^*\| \text{ e } \sigma_{eq} = \frac{-\gamma e_o \theta^T w}{\|\theta\|^2}.$$

Se o vetor de atualização  $-\gamma e_o w$  apontar para fora da região limitante  $\|\theta\| \leq M_\theta$ , então ele é projetado no plano tangente da região no ponto  $\theta$ , e se ele apontar para dentro da região, ele atua normalmente - consequentemente,  $\theta(t)$  se move para o interior da região  $\|\theta\| \leq M_\theta$  [Hsu & Costa 1994].

### 2.3.2 Simulações

Foram realizadas simulações com o B-MRAC na planta (2.16) com o modelo de referência (2.17), tendo como objetivo demonstrar a funcionalidade de MRAC quando o ganho adaptativo  $\gamma$  possui baixa magnitude, e de VS-MRAC para ganho elevado.

Como o BMRAC faz uso da abordagem direta, deve-se calcular os parâmetros do controlador na condição de *matching* a partir das seguintes expressões para plantas com grau relativo unitário [Oliveira 2007]:

$$\begin{aligned}\theta_{v1,i}^* &= \frac{\beta_{m,n-i} - \beta_{n-i}}{\gamma}, i = 1, \dots, n-1, \\ \theta_n^* &= \frac{\alpha_1 - \alpha_{m,1}}{k_p}, \\ \theta_{v2,i}^* &= \frac{\alpha_{n-i+1} - \alpha_{m,n-i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m,n-i}}{k_p \gamma}, i = 1, \dots, n-1 \\ \theta_{2n}^* &= \frac{k_m}{k_p}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Fazendo  $\Lambda = -2$ , e realizando os cálculos como em (2.21), encontraremos  $\theta^* = [0.5 \quad -6 \quad 5 \quad 1]^T$ .

Conhecendo  $\theta^*$ , as estimativas iniciais dos parâmetros foram inseridas próximas dos valores nominais dos parâmetros:  $\theta(0) = [\theta_{v1}(0) \quad \theta_n(0) \quad \theta_{v2}(0) \quad \theta_{2n}(0)]^T = [0.3 \quad -5.5 \quad 4.5 \quad 1.5]^T$ . Para que o B-MRAC possuísse desempenho similar ao de um MRAC convencional, o mesmo foi sintonizado da seguinte forma:  $\Lambda = -2$ ,  $g = 1$ ,  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ , ganho adaptativo  $\gamma = 7$ , passo de integração  $h = 10^{-4}$ , e regiões limitantes  $M_{\theta_{v1}} = 0.7$ ,  $M_{\theta_n} = 6.5$ ,  $M_{\theta_{v2}} = 5.2$  e  $M_{\theta_{2n}} = 2$ . O resultado da simulação pode ser visualizado através da Figura (2.6). Na Figura (2.7), podemos observar a adaptação dos parâmetros, assim como a ocorrência da projeção nos parâmetros  $\theta_n$  e  $\theta_{2n}$ .

A partir da Figura (2.6) podemos observar um transitório oscilatório e lento, assim como um sinal de controle suave durante toda a simulação - características típicas do controlador MRAC convencional.

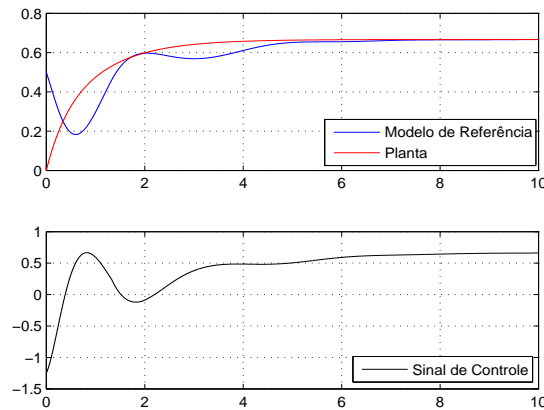


Figura 2.6: Desempenho do B-MRAC para ganho adaptativo de baixa magnitude

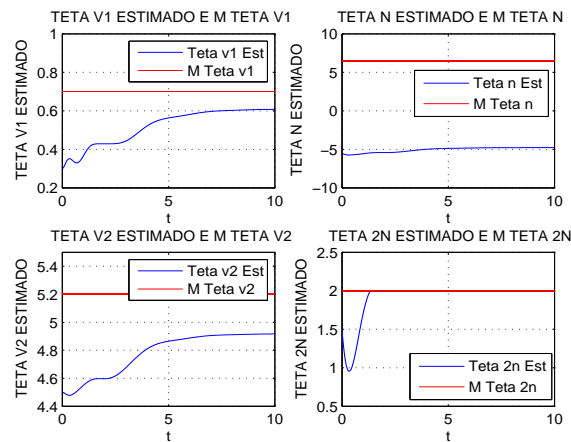


Figura 2.7: Adaptação dos parâmetros

Na tentativa de obter o desempenho do VS-MRAC, fez-se  $\gamma = 10^4$ , com regiões limitantes  $M_{\theta_{v_1}} = 2$ ,  $M_{\theta_n} = 7$ ,  $M_{\theta_{v_2}} = 5.5$  e  $M_{\theta_{2n}} = 3.5$ . Podemos observar, através da Figura (2.8), a melhoria no transitório, tanto no que diz respeito a velocidade de rastreamento com o modelo de referência, como pela falta de oscilações. No sinal de controle, observamos uma rápida queda, seguida de rápidas oscilações, para posterior suavização. É comum visualizarmos o fenômeno de *peaking* quando ganhos elevados são utilizados no B-MRAC. As oscilações deveram-se ao processo de projeção dos parâmetros, principalmente  $\theta_{2n}$ , como podemos observar através da Figura (2.9). Dessa forma, podemos perceber que a partir de um parâmetro do controlador (ganho adaptativo  $\gamma$ ) e das regiões limitantes dos parâmetros do controlador, é possível mudar completamente o desempenho do sistema.

Quanto a escolha das regiões limitantes, foi observado que quanto maior o espaço dessas regiões, mais lento torna-se o rastreamento da planta pelo modelo de referência,

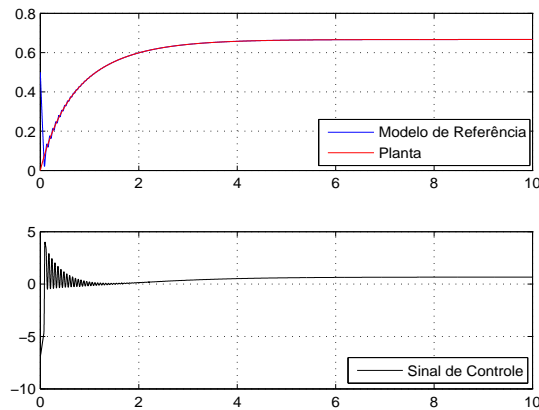


Figura 2.8: Desempenho do B-MRAC com ganho adaptativo elevado

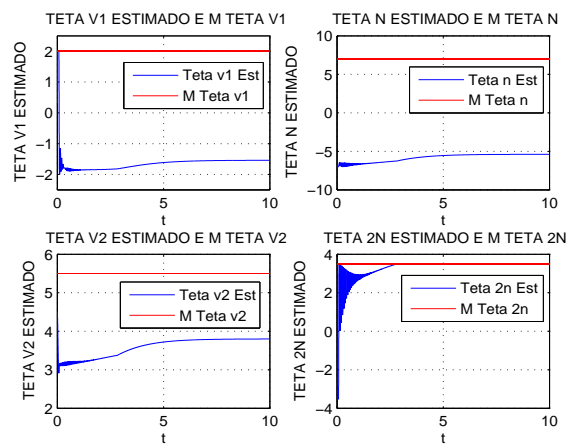


Figura 2.9: Adaptação dos parâmetros

porém o sinal de controle torna-se cada vez mais suave. Entretanto, ao diminuir as regiões aumentamos a frequência do processo de projeção, tornando o sinal de controle mais chaveado e o rastreamento mais rápido. Portanto, esta escolha deve ser realizada de forma a satisfazer os requisitos de projeto do processo a ser controlado.

## 2.4 DMARC

O Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto (DMARC) teve seu início a partir da ideia proposta por [Hsu & Costa 1989], os quais apresentaram uma lei de adaptação que podia se comportar como o MRAC (com fator  $\sigma$  e normalização) ou como o VS-MRAC, a partir da escolha de um parâmetro [Cunha 2008].

O DMARC consegue atuar ponderadamente entre o MRAC e o VS-MRAC de uma forma dinâmica, a depender do erro de saída em um dado instante, conseguindo obter, dessa forma, um sistema robusto, com desempenho rápido e pouco oscilatório (características do VS-MRAC), e um sinal de controle suave em regime permanente (característica do MRAC). Quando o erro é considerado suficientemente elevado o DMARC tende ao VS-MRAC, enquanto que quando o erro é suficientemente pequeno, temos o MRAC atuando. Em uma situação intermediária, temos um pouco da atuação dos dois.

Uma versão inicial do DMARC, utilizando a lei de adaptação proposta em [Hsu & Costa 1989], foi apresentada em Mota e Araújo (2002) e em [Cunha, Araujo, Barbalho & Mota 2005]. Em ambos os trabalhos, a transição entre as estratégias de controle se dava através da lógica nebulosa, ou lógica *fuzzy*. Posteriormente, foi realizada uma modificação na lei de adaptação original, sendo adicionado um termo para eliminar os termos com sinal indefinido na derivada da função de Lyapunov [Cunha et al. 2007]. Em [Cunha et al. 2009] foi realizada a sua generalização para grau relativo maior que um.

### 2.4.1 Lei Adaptativa

De acordo com [Cunha et al. 2007], temos a seguinte lei de adaptação para o DMARC:

$$\dot{\theta} = -\frac{\sigma}{\mu}\theta - \frac{1}{\mu}[(1-\mu)\sigma\Gamma + \mu\gamma l]e_o\omega, \quad (2.22)$$

onde  $\gamma > 0$ ,  $\sigma > 0$  e  $\Gamma = \text{diag} \left[ \frac{\bar{\theta}_i}{|e_o\omega_i|} \right]$  com  $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$ ,  $i = 1 \dots 2n$ .

A partir de (2.22), realizando algumas manipulações matemáticas, chegamos à seguinte lei de adaptação:

$$\dot{\theta} = -\frac{\sigma}{\mu}\theta - \frac{\sigma}{\mu}(1-\mu)\bar{\theta} \text{sgn}(e_o\omega) - \gamma e_o\omega, \quad (2.23)$$

com  $\gamma > 0$  e  $\sigma > 0$ .

Podemos observar que quando  $\mu \rightarrow 0$  o termo que representa o fator de esquecimento tende a infinito, assim como a ponderação do termo chaveado, fazendo com que haja uma predominância de atuação do controlador VS-MRAC. Por esse raciocínio, o VS-MRAC não apresenta memória e possui um aprendizado instantâneo. O termo  $\gamma e_o\omega$  fica desprezível nessa situação. Fazendo  $\mu \rightarrow 1$ , anulamos o termo chaveado, fazendo com que o DMARC se torne um MRAC com fator de esquecimento  $\sigma$ .

Uma característica comum para o MRAC com fator  $\sigma$  é a presença de *bursting* [Hsu & Costa 1987], porém no DMARC o fator de esquecimento é variável, e dependendo da forma como se ajusta o parâmetro  $\mu$ , o DMARC pode trabalhar próximo do VS-MRAC, o que contribui para o não surgimento do fenômeno de *bursting* [Cunha et al. 2007].

## 2.4.2 Ajuste do DMARC

Para projetar um controlador DMARC, deve haver um bom conhecimento dos seus parâmetros, assim como possíveis ajustes de sintonia do mesmo. Pela equação (2.23) percebe-se a grande importância do parâmetro  $\mu$ , sendo este o responsável principal pela transição entre os algoritmos MRAC e VS-MRAC. Esse parâmetro é uma função gaussiana e possui relação direta com o erro de saída  $e_o$ , como representado na equação (2.24). Sua representação gráfica é apresentada na Figura (2.10). Com a finalidade de não gerar indeterminação matemática em (2.23),  $\mu$  deve ser limitado inferiormente ( $\mu_p$ ).

$$\mu = e^{-\frac{e_o^2}{L}} \quad (2.24)$$

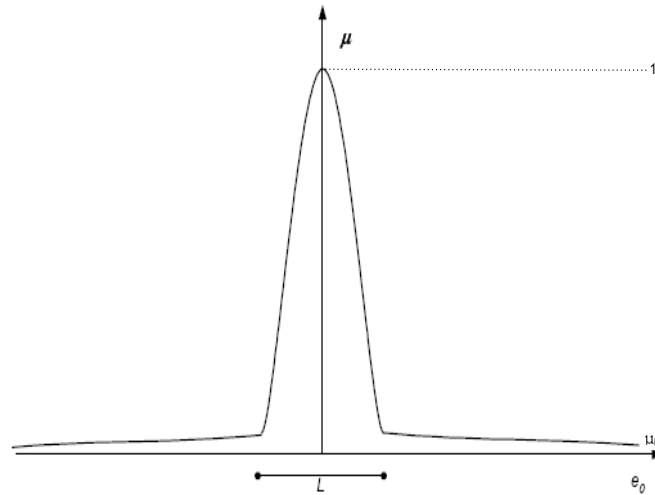


Figura 2.10: Representação gráfica do parâmetro  $\mu$

Através da Figura (2.10), podemos observar que o parâmetro  $L$  define a "largura de atuação" de cada algoritmo no espaço de valores do erro  $e_o$ . Quanto menor for  $L$ , temos que  $\mu$  só cresce em um espaço muito reduzido de  $e_o$  - apenas quando este for suficientemente próximo de zero. Por isso, temos um espaço de atuação bem maior para o VS-MRAC. Como consequência, para um  $L$  muito pequeno temos um transitório muito rápido, mas com um sinal de controle cada vez mais chaveado. Entretanto, quando aumentamos  $L$ , observamos que o MRAC já começa a atuar mais cedo, deixando o sinal de controle mais suave. Porém, quanto maior o  $L$ , mais lento e oscilatório o transitório pode ficar.

Adicionalmente aos parâmetros  $\mu$  e  $L$ , mas não menos importante, temos o parâmetro  $\sigma$ , o qual é implementado como em (2.25):

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \text{ e } \mu > \mu_p \\ \sigma_c, & \text{em caso contrário} \end{cases}, \quad (2.25)$$

com  $\sigma_c$  devendo ser escolhido de uma forma que  $\frac{\sigma_c}{\mu_p}$  seja suficientemente alto para o

caso em que  $\mu = \mu_p$ . A partir disso, podemos observar que ao encontrar uma razão  $\frac{\sigma_c}{\mu_p}$  satisfatória, podemos reduzir o valor de  $\mu_p$  indefinidamente, desde que  $\sigma_c$  diminua na mesma proporção. Essa observação foi feita, pois na prova de estabilidade do IDMARC, o qual será estudado no Capítulo 4,  $\mu_p$  deve ser considerado desprezível.

### 2.4.3 Simulações

O DMARC também foi testado na planta instável (2.16) com o modelo de referência (2.17). Por fazer uso da abordagem direta, foram realizados os cálculos como em (2.21) para descobrir quais são os parâmetros na condição de *matching*, considerando  $\Lambda = -2$ :  $\theta^* = [0.5 \ -6 \ 5 \ 1]^T$ . Como as amplitudes dos relés devem ser maiores que o módulo dos parâmetros do controlador na condição de *matching*,  $\bar{\theta}$  foi escolhido como  $\bar{\theta} = [0.6 \ 7 \ 6 \ 2]^T$ . A sintonia dos filtros de entrada e saída de todas as simulações que serão apresentadas foram:  $v_1(0) = v_2(0) = 0$  e  $g = 2$ .

Com a finalidade de testar o DMARC funcionando o mais próximo possível do VS-MRAC,  $L$  foi escolhido suficientemente pequeno ( $L = 10^{-9}$ ). Como o VS-MRAC necessita de uma frequência de chaveamento alta para obter o modo deslizante, um passo de integração suficientemente pequeno ( $h = 10^{-5}$ ) foi escolhido [Cunha et al. 2007]. A Figura (2.11) nos apresenta o desempenho do sistema com o DMARC para  $h = 10^{-5}$ ,  $L = 10^{-9}$ ,  $\gamma = 10$ ,  $\sigma_c = 10^{-1}$  e  $\mu_p = 10^{-4}$ .

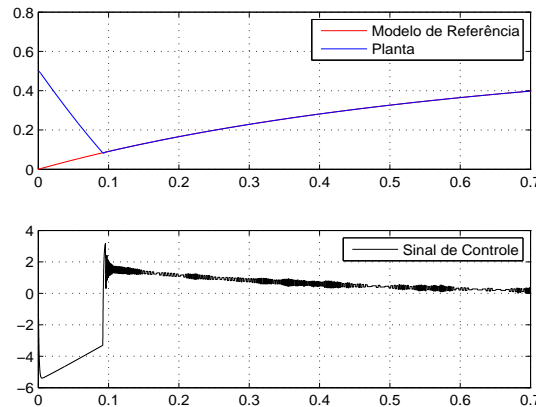


Figura 2.11: Saídas da planta e do modelo de referência e sinal de controle do DMARC aplicado à planta de 2ª ordem com  $L = 10^{-9}$

Podemos observar um transitório muito rápido, sem oscilações, e um sinal de controle suave se comparado com o do IVS-MRAC para o mesmo caso - vide Figura (2.4). Como tentativa de diminuir ainda mais o chaveamento no sinal de controle, foram realizados dois testes:  $L = 10^{-7}$  e  $L = 10^{-5}$ , ambos com  $h = 10^{-4}$ , pois não há a necessidade do chaveamento em alta frequência. Os demais parâmetros foram mantidos:  $\gamma = 10$ ,  $\sigma_c = 10^{-1}$  e  $\mu_p = 10^{-4}$ . A Figura (2.12) mostra o desempenho do sistema para  $L = 10^{-7}$ , enquanto a Figura (2.13) apresenta o desempenho para  $L = 10^{-5}$ .



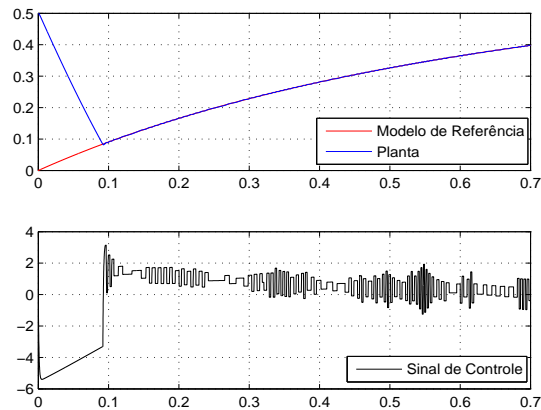


Figura 2.12: Saídas da planta e do modelo de referência e sinal de controle do DMARC aplicado à planta de 2ª ordem com  $L = 10^{-7}$

Através da Figura (2.12) podemos afirmar que houve uma melhora no desempenho com relação à primeira simulação. Isso porque o transitório ocorreu tão rápido quanto no primeiro caso, sem oscilação, e ainda houve uma melhora no sinal de controle, o qual se tornou bem mais suave. Este resultado obtido poderia nos levar a pensar que quanto maior a atuação do MRAC (quanto maior o valor de  $L$ ), melhor seria o desempenho. Entretanto, a Figura (2.13) nos mostra que isso não é bem assim. Apesar da melhoria no sinal de controle (ainda mais suave que na simulação anterior), a saída da planta ficou oscilando em torno da saída do modelo de referência, não havendo o rastreamento perfeito. Assim, o ideal é a realização de vários testes de sintonia para encontrar a largura  $L$  ideal para cada aplicação específica.

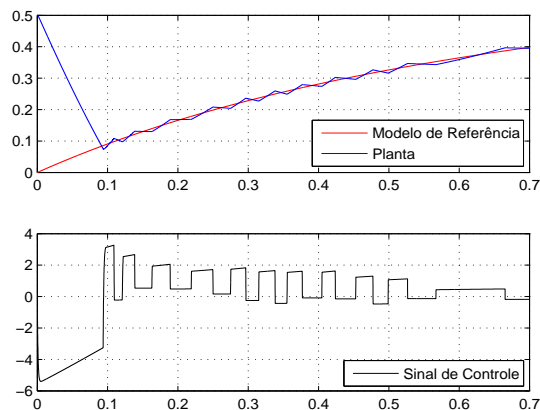


Figura 2.13: Saídas da planta e do modelo de referência e sinal de controle do DMARC aplicado à planta de 2ª ordem com  $L = 10^{-5}$

Para testar a robustez do DMARC contra distúrbios e mudanças de referência em um curto espaço de tempo, foi aplicada a mesma sequência de referência e distúrbio na entrada presente em [Cunha et al. 2007], como detalhado a seguir.

Intervalo	Referência	Perturbação
$0 \leq t < 0.2$	$r(t) = 1$	$d(t) = 0.8$
$0.2 \leq t < 0.4$	$r(t) = -1$	$d(t) = 0.0$
$0.4 \leq t < 0.6$	$r(t) = 1$	$d(t) = 0.8$

Tabela 2.2: Mudanças de referências e perturbações na entrada da planta

O DMARC foi sintonizado com  $\gamma = 10$ ,  $L = 10^{-9}$ ,  $\sigma_c = 10^{-1}$ ,  $\mu_p = 10^{-4}$  e um passo de integração  $h = 10^{-5}$ . O resultado pode ser verificado através da Figura (2.14).

Em seguida,  $L$  foi aumentado para  $10^{-7}$ , permitindo aumentar o passo de integração  $h$  para  $10^{-4}$ . Os demais parâmetros foram mantidos. Percebemos, através da Figura (2.15), a redução no chaveamento do sinal de controle, e a melhoria no desempenho transitório, acompanhando o modelo de referência até o final.

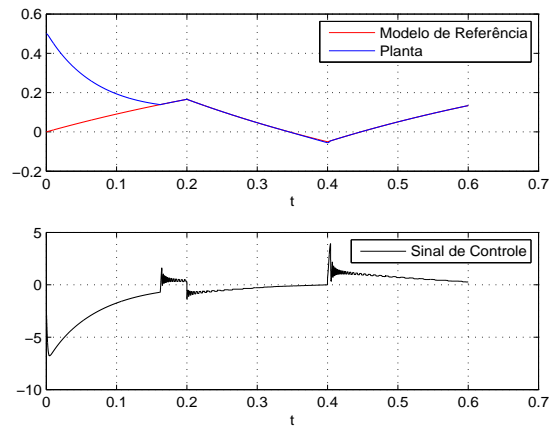


Figura 2.14: Desempenho do DMARC para o caso da Tabela (2.2) com  $L = 10^{-9}$

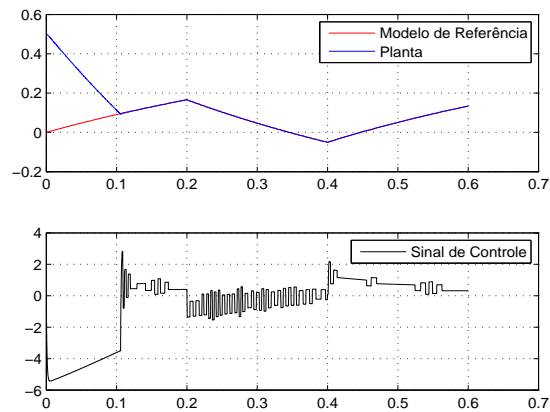


Figura 2.15: Desempenho do DMARC para o caso da Tabela com  $L = 10^{-7}$

---

## Capítulo 3

### IB-MRAC

---

Na tentativa de manter a linha evolutiva dos algoritmos adaptativos diretos, foi criada uma versão indireta para o algoritmo B-MRAC: Controlador Adaptativo Binário por Modelo de Referência Indireto - IB-MRAC.

Como já foi visto na seção (2.3), o B-MRAC é um controlador que consegue atuar como MRAC ou como VS-MRAC, a depender de um parâmetro fixo  $\gamma$  definido no projeto do controlador, herdando as mesmas características de desempenho dos mesmos.

A diferença entre o IB-MRAC com relação ao B-MRAC é que o primeiro, como todos os algoritmos indiretos, estima primeiramente os parâmetros da planta, para posteriormente utilizar as estimações no cálculo dos parâmetros do controlador. Característica essa que torna a fase de projeto do controlador bem mais intuitiva.

O IB-MRAC se comporta entre o IMRAC e o IVS-MRAC, ao invés do MRAC e VS-MRAC como acontece no algoritmo direto, dependendo ainda de ganhos fixos ( $\gamma_I$ ,  $\Gamma_\beta$ ,  $\Gamma_\alpha$  e  $\gamma_p$ ) sintonizados no projeto do controlador para definir como ele irá se comportar. A princípio poderia existir um único ganho adaptativo (como no B-MRAC), porém imaginou-se que ao separar os ganhos, o projetista do controlador possui uma margem maior de sintonia do controlador.

Assim como no B-MRAC, a escolha das regiões limitantes do IB-MRAC também é decisiva no desempenho do sistema como um todo. Para regiões grandes, a tendência é que ocorra um aumento no erro paramétrico, gerando oscilações no transitório, tornando o rastreamento mais lento. Entretanto, ao deixar as regiões muito pequenas, há o risco de haver um chaveamento na adaptação dos parâmetros, e consequentemente do sinal de controle.

### 3.1 Leis Adaptativas

As leis adaptativas do IB-MRAC basearam-se nas do IMRAC (2.15) e nas do B-MRAC (2.20):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\beta}} &= -\sigma_{\beta}\hat{\beta} + \Gamma_{\beta}e_o v_1, \\ \dot{\hat{\alpha}}_1 &= -\sigma_{\alpha_1}\hat{\alpha}_1 - \gamma_1 e_o \zeta_1, \\ \dot{\hat{\alpha}} &= -\sigma_{\alpha}\hat{\alpha} - \Gamma_{\alpha}e_o v_2, \\ \text{se } (|\hat{k}_p| > k_0) \text{ ou } (|\hat{k}_p| = k_0 \text{ e } e_o \zeta_p \text{sgn}(\hat{k}_p) \leq 0) \\ \dot{\hat{k}}_p &= -\sigma_{k_p}\hat{k}_p - \gamma_p e_o \zeta_p, \gamma_p > 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

senão

$$\dot{\hat{k}}_p = 0,$$

onde

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\theta_p\| < M_{\theta_p} \text{ ou } \sigma_{eq} < 0 \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\theta_p\| \geq M_{\theta_p} \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0 \end{cases},\tag{3.2}$$

e cada elemento do vetor  $\theta_p$  tem seu  $\sigma_{eq}$  modificado de (2.20) como detalhado abaixo:

$$\begin{aligned}\sigma_{eq_{-\beta}} &= \frac{\Gamma_{\beta}e_o\hat{\beta}^T v_1}{\|\hat{\beta}\|^2}, \\ \sigma_{eq_{-\alpha_1}} &= \frac{-\gamma_1 e_o \hat{\alpha}_1 \zeta_1}{\hat{\alpha}_1^2}, \\ \sigma_{eq_{-\alpha}} &= \frac{-\Gamma_{\alpha}e_o\hat{\alpha}^T v_2}{\|\hat{\alpha}\|^2}, \\ \sigma_{eq_{-k_p}} &= \frac{-\gamma_p e_o \hat{k}_p \zeta_p}{\hat{k}_p^2}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

## 3.2 Análise de Estabilidade

*Teorema:* Considere o sistema (2.6), com erro de saída (2.13) e leis adaptativas (3.1). Se as hipóteses (a-e) forem satisfeitas, e supondo  $\|\hat{\theta}_p(0)\| \leq M_{\theta_p}$ , com  $M_{\theta_p} > \|\theta_p^*\|$ , então:

- i)  $\|\hat{\theta}_p(t)\| \leq M_{\theta_p}, \forall t \geq 0$ .
- ii)  $\|e(t)\|^2 \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \|e(0)\|^2 + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right), \forall t \geq 0$ ,  $c_1$  e  $\lambda_1$  constantes positivas, e  $O\left(\frac{1}{\Gamma}\right)$  representa a soma dos termos da ordem inversa dos ganhos adaptativos:  $O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) = O\left(\frac{1}{\gamma_p}\right) + O\left(\frac{1}{\gamma_1}\right) + O\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ .
- iii) O sistema é globalmente estável.

*Prova:* Tome a seguinte função candidata de Lyapunov:

$$V(\hat{\theta}_p) = \frac{1}{2} \hat{\theta}_p^T \hat{\theta}_p. \quad (3.4)$$

Como  $\hat{\theta}_p^T = [\hat{k}_p \quad \hat{\beta}^T \quad \hat{\alpha}_1 \quad \hat{\alpha}^T]$ , temos:

$$V(\hat{\theta}_p) = \frac{1}{2} \left\{ \hat{k}_p^2 + \hat{\beta}^T \hat{\beta} + \hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}^T \hat{\alpha} \right\}. \quad (3.5)$$

Derivando (3.5), obtemos:

$$\dot{V}(\hat{\theta}_p) = \frac{1}{2} \left\{ 2\hat{k}_p \dot{\hat{k}}_p + \dot{\hat{\beta}}^T \hat{\beta} + \hat{\beta}^T \dot{\hat{\beta}} + 2\hat{\alpha}_1 \dot{\hat{\alpha}}_1 + \dot{\hat{\alpha}}^T \hat{\alpha} + \hat{\alpha}^T \dot{\hat{\alpha}} \right\}. \quad (3.6)$$

Substituindo  $\dot{\hat{\theta}}_p$  pelas leis adaptativas do IB-MRAC (3.1), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\theta}_p) = & \frac{1}{2} \{ 2\hat{k}_p [-\sigma_{k_p} \hat{k}_p - \gamma_p e_o \zeta_p] + [-\hat{\beta}^T \sigma_{\beta}^T + e_o v_1^T \Gamma_{\beta}^T] \hat{\beta} + \hat{\beta}^T [-\sigma_{\beta} \hat{\beta} + \Gamma_{\beta} e_o v_1] + \\ & 2\hat{\alpha}_1 [-\sigma_{\alpha_1} \hat{\alpha}_1 - \gamma_1 e_o \zeta_{\alpha_1}] + [-\hat{\alpha}^T \sigma_{\alpha}^T - e_o v_2^T \Gamma_{\alpha}^T] \hat{\alpha} + \hat{\alpha}^T [-\sigma_{\alpha} \hat{\alpha} - \Gamma_{\alpha} e_o v_2] \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Realizando as devidas simplificações, ficamos com a seguinte equação para  $\dot{V}$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\theta}_p) = & \hat{k}_p [-\sigma_{k_p} \hat{k}_p - \gamma_p e_o \zeta_p] + \hat{\beta}^T [-\sigma_{\beta} \hat{\beta} + \Gamma_{\beta} e_o v_1] + \\ & \hat{\alpha}_1 [-\sigma_{\alpha_1} \hat{\alpha}_1 - \gamma_1 e_o \zeta_{\alpha_1}] + \hat{\alpha}^T [-\sigma_{\alpha} \hat{\alpha} - \Gamma_{\alpha} e_o v_2]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Desenvolvendo (3.8), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\theta}_p) = & -\sigma_{k_p} \hat{k}_p^2 - \hat{k}_p \gamma_p e_o \zeta_p - \sigma_{\beta} \hat{\beta}^T \hat{\beta} + \hat{\beta}^T \Gamma_{\beta} e_o v_1 \\ & - \sigma_{\alpha_1} \hat{\alpha}_1^2 - \hat{\alpha}_1 \gamma_1 e_o \zeta_{\alpha_1} - \sigma_{\alpha} \hat{\alpha}^T \hat{\alpha} - \hat{\alpha}^T \Gamma_{\alpha} e_o v_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De posse de (3.3), e sabendo que  $\hat{\beta}^T \hat{\beta} = \|\hat{\beta}\|^2$  e  $\hat{\alpha}^T \hat{\alpha} = \|\hat{\alpha}\|^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\theta}_p) = & -\sigma_{k_p} \hat{k}_p^2 + \sigma_{eq_{k_p}} \hat{k}_p^2 - \sigma_{\beta} \|\hat{\beta}\|^2 + \sigma_{eq_{\beta}} \|\hat{\beta}\|^2 \\ & - \sigma_{\alpha_1} \hat{\alpha}_1^2 + \sigma_{eq_{\alpha_1}} \hat{\alpha}_1^2 - \sigma_{\alpha} \|\hat{\alpha}\|^2 + \sigma_{eq_{\alpha}} \|\hat{\alpha}\|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Manipulando (3.10) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\theta}_p) = & -(\sigma_{k_p} - \sigma_{eq_{k_p}})\dot{k}_p^2 - (\sigma_\beta - \sigma_{eq_\beta})\|\hat{\beta}\|^2 \\ & - (\sigma_{\alpha_1} - \sigma_{eq_{\alpha_1}})\dot{\alpha}_1^2 - (\sigma_\alpha - \sigma_{eq_\alpha})\|\hat{\alpha}\|^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para  $\|\hat{\theta}_p\| \geq M_{\theta_p}$ , temos por definição que  $\sigma_{\theta_p} - \sigma_{eq_{\theta_p}} \geq 0$ . Assim,  $\dot{V}(\hat{\theta}_p) \leq 0$ . Dessa forma, provamos a propriedade *i*.

Para provar a propriedade *ii*, considere como função candidata de Lyapunov, a seguinte função positiva definida:

$$V(e, \tilde{\theta}_p) = \frac{e^T P e}{2} + \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p^2}{2\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} k_p}{2\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1^2}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \tilde{\alpha}}{2\gamma} \right), \quad (3.12)$$

onde  $P = P^T > 0$ ,  $\tilde{\theta}_p = [ \tilde{k}_p \quad \tilde{\beta}^T \quad \tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}^T ]$ ,  $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^T > 0$ ,  $\Gamma_\beta = \Gamma_\beta^T > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\gamma_p > 0$  e  $\gamma_1 > 0$ .

Calculando a derivada de (3.12), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{2\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{2\gamma_p} + \frac{\dot{\tilde{\beta}}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} k_p + \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p + \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} \dot{k}_p}{2\gamma} + \frac{2\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{2\gamma_1} + \frac{\dot{\tilde{\alpha}}^T \Gamma_\alpha^{-1} \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{2\gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sabendo que  $k_p$  é uma constante, temos que  $\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \tilde{\beta} \dot{k}_p = 0$ . Fazendo alguns cancelamentos e substituindo  $\dot{e}$  por (2.13), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & \frac{1}{2} \left( e^T A_c^T + \frac{b_c^T}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] \right) P e + \\ & \frac{1}{2} \left\{ e^T P \left( A_c e + \frac{b_c}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] \right) \right\} + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Reorganizando (3.14), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & \frac{1}{2} \left\{ e^T (A_c^T P + P A_c) e + \frac{2e^T P b_c}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] \right\} + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerando o Lema de Kalman-Yakubovitch ( $A_c^T P + P A_c = -2Q$ ,  $P b_c = h_c$ ,  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$ ), temos que  $e^T P b_c = e^T h_c = h_c^T e = e_o$ . Aplicando as mudanças em (3.15):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o}{k_m} \left[ \tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right] + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir de (2.12), podemos observar que  $\tilde{\theta}_p = \hat{\theta}_p - \theta_p$ , e, conseqüentemente,  $\dot{\tilde{\theta}}_p = \dot{\hat{\theta}}_p - \dot{\theta}_p$ . Como  $\theta_p$  é uma constante,  $\dot{\theta}_p = 0$  e, assim,  $\dot{\tilde{\theta}}_p = \dot{\hat{\theta}}_p$ . Dessa forma, podemos visualizar (3.16) como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o}{k_m} \left[ \tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right] + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo  $\dot{\hat{\theta}}_p$  por (3.1), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o}{k_m} \left[ \tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right] + \\ & \frac{\tilde{k}_p (-\sigma_{k_p} \hat{k}_p - \gamma_p e_o \zeta_p)}{k_m \gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} k_p (-\sigma_\beta \hat{\beta} + \Gamma_\beta e_o v_1)}{k_m \gamma} + \\ & \frac{\tilde{\alpha}_1 (-\sigma_{\alpha_1} \hat{\alpha}_1 - \gamma_1 e_o \zeta_1)}{k_m \gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} (-\sigma_\alpha \hat{\alpha} - \Gamma_\alpha e_o v_2)}{k_m \gamma}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Neste momento, de acordo com (3.2), temos dois casos possíveis:

*Caso 1:*  $\|\theta_p\| < M_{\theta_p}$  ou  $\sigma_{eq} < 0$

Neste caso,  $\sigma = 0$  e (3.18) ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o}{k_m} \left[ \tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right] + \\ & \frac{\tilde{k}_p (-\gamma_p e_o \zeta_p)}{k_m \gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} k_p (\Gamma_\beta e_o v_1)}{k_m \gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 (-\gamma_1 e_o \zeta_1)}{k_m \gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} (-\Gamma_\alpha e_o v_2)}{k_m \gamma}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Desenvolvendo (3.19), e sabendo que  $\zeta_\beta = \frac{-v_1}{\gamma}$  e  $\zeta_\alpha = \frac{v_2}{\gamma}$ , temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o \tilde{k}_p \zeta_p}{k_m} - \frac{e_o k_p \tilde{\beta}^T v_1}{k_m \gamma} + \frac{e_o \tilde{\alpha}_1 \zeta_1}{k_m} + \frac{e_o \tilde{\alpha}^T v_2}{k_m \gamma} - \frac{e_o \tilde{k}_p \zeta_p}{k_m} + \\ & \frac{\tilde{\beta}^T k_p e_o v_1}{k_m \gamma} - \frac{e_o \tilde{\alpha}_1 \zeta_1}{k_m} - \frac{\tilde{\alpha}^T e_o v_2}{k_m \gamma} \end{aligned} \quad (3.20)$$



Realizando os devidos cancelamentos em (3.20), obtemos  $\dot{V}$  na sua forma final:

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = -e^T Q e. \quad (3.21)$$

Caso 2:  $\|\theta_p\| \geq M_{\theta_p}$  e  $\sigma_{eq} \geq 0$

Aqui,  $\sigma = \sigma_{eq}$ . Dessa forma, podemos observar (3.18) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o \tilde{k}_p \zeta_p}{k_m} - \frac{e_o k_p \tilde{\beta}^T v_1}{k_m \gamma} + \frac{e_o \tilde{\alpha}_1 \zeta_1}{k_m} + \frac{e_o \tilde{\alpha}^T v_2}{k_m \gamma} - \frac{\tilde{k}_p \sigma_{eq\_k_p} \hat{k}_p}{k_m \gamma_p} \\ & - \frac{\tilde{k}_p e_o \zeta_p}{k_m} - \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} k_p \sigma_{eq\_p} \hat{\beta}}{k_m \gamma} + \frac{\tilde{\beta}^T k_p e_o v_1}{k_m \gamma} - \frac{\tilde{\alpha}_1 \sigma_{eq\_a_1} \hat{\alpha}_1}{k_m \gamma_1} - \frac{\tilde{\alpha}_1 e_o \zeta_1}{k_m} \\ & - \frac{k_m \tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \sigma_{eq\_a} \hat{\alpha}}{k_m \gamma} - \frac{\tilde{\alpha}^T e_o v_2}{k_m \gamma}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Realizando os devidos cancelamentos em (3.22), obtemos:

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = -e^T Q e - \frac{\tilde{k}_p \sigma_{eq\_k_p} \hat{k}_p}{k_m \gamma_p} - \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} k_p \sigma_{eq\_p} \hat{\beta}}{k_m \gamma} - \frac{\tilde{\alpha}_1 \sigma_{eq\_a_1} \hat{\alpha}_1}{k_m \gamma_1} - \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \sigma_{eq\_a} \hat{\alpha}}{k_m \gamma}. \quad (3.23)$$

Neste momento, devemos realizar uma análise termo-a-termo da equação (3.23).

- $\frac{\tilde{k}_p \sigma_{eq\_k_p} \hat{k}_p}{k_m \gamma_p}$   
 $\frac{\tilde{k}_p \sigma_{eq\_k_p} \hat{k}_p}{k_m \gamma_p} = \frac{(\hat{k}_p - k_p^*) \sigma_{eq\_k_p} \hat{k}_p}{k_m \gamma_p}$

Como  $\sigma_{eq\_k_p} \geq 0$ ,  $k_m > 0$  e  $\gamma_p > 0$ ,  $(\hat{k}_p - k_p^*) \hat{k}_p$  também deve ser não-negativo para que o termo completo também seja. Como neste caso,  $|\hat{k}_p| \geq M_{k_p}$  e  $M_{k_p} > |k_p^*|$ , chegamos a conclusão que o termo  $\frac{\tilde{k}_p \sigma_{eq\_k_p} \hat{k}_p}{k_m \gamma_p} \geq 0$ .

- $\frac{\tilde{\alpha}_1 \sigma_{eq\_a_1} \hat{\alpha}_1}{k_m \gamma_1}$   
 $\frac{\tilde{\alpha}_1 \sigma_{eq\_a_1} \hat{\alpha}_1}{k_m \gamma_1} = \frac{(\hat{\alpha}_1 - \alpha_1^*) \sigma_{eq\_a_1} \hat{\alpha}_1}{k_m \gamma_1}$

Como  $\sigma_{eq\_a_1} \geq 0$ ,  $k_m > 0$  e  $\gamma_1 > 0$ ,  $(\hat{\alpha}_1 - \alpha_1^*) \hat{\alpha}_1$  também deve ser não-negativo para que o termo completo também seja. Sabendo que neste caso,  $|\hat{\alpha}_1| \geq M_{\alpha_1}$  e  $M_{\alpha_1} > |\alpha_1^*|$ , então chegamos a conclusão que o termo  $\frac{\tilde{\alpha}_1 \sigma_{eq\_a_1} \hat{\alpha}_1}{k_m \gamma_1} \geq 0$ .

- $\frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} k_p \sigma_{eq_{-\beta}} \hat{\beta}}{k_m \gamma}$

Com a finalidade de definir qual o sinal presente neste termo, fez-se uma análise matricial do mesmo. Primeiramente, temos o detalhamento de  $\sigma_{eq_{-\beta}}$ :

$$\sigma_{eq_{-\beta}} = \frac{\Gamma_{\beta} e_o \hat{\beta}^T v_1}{\|\hat{\beta}\|^2}, \text{ com } \Gamma_{\beta} \Gamma_{(n-1) \times (n-1)}, \hat{\beta}_{1 \times (n-1)}^T \text{ e } v_{1(n-1) \times 1}.$$

$$\sigma_{eq_{-\beta}} = \frac{\begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{\beta_2} & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \gamma_{\beta_{n-1}} \end{bmatrix} e_o [\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \dots \quad \hat{\beta}_{n-1}] \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{1n-1} \end{bmatrix}}{\hat{\beta}_1^2 + \hat{\beta}_2^2 + \dots + \hat{\beta}_{n-1}^2}$$

Fazendo  $K_1 = \frac{e_o \hat{\beta}^T v_1}{\|\hat{\beta}\|^2}$ , temos:

$$\sigma_{eq_{-\beta}} = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1} K_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{\beta_2} K_1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \gamma_{\beta_{n-1}} K_1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

Como neste caso  $\|\theta_p\| \geq M_{\theta_p}$  e  $\sigma_{eq_{-\beta}} \geq 0$ , temos que  $\sigma_{eq_{-\beta}}(i, i) \geq 0, i = 1 \dots n - 1$ . Sabendo que  $\gamma_{\beta_i} > 0$ , concluímos que  $K_1 \geq 0$ .

De posse da estrutura de  $\sigma_{eq_{-\beta}}$ , temos a seguinte estrutura matricial para o termo completo em análise:

$$\frac{\begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_2 & \dots & \dots & \tilde{\beta}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{\beta_1}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_{\beta_2}} & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\gamma_{\beta_{n-1}}} \end{bmatrix} k_p \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1} K_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{\beta_2} K_1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \gamma_{\beta_{n-1}} K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}}{k_m \gamma}$$

Desenvolvendo, temos:

$$\frac{\begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_2 & \dots & \tilde{\beta}_{n-1} \end{bmatrix} k_p}{k_m \gamma} \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1} K_1 \hat{\beta}_1 \\ \gamma_{\beta_2} K_1 \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \gamma_{\beta_{n-1}} K_1 \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Por fim, podemos representar o termo em análise da seguinte forma:

$$\frac{k_p}{k_m \gamma} \left( \tilde{\beta}_1 K_1 \hat{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 K_1 \hat{\beta}_2 + \dots + \tilde{\beta}_{n-1} K_1 \hat{\beta}_{n-1} \right),$$

ou ainda:

$$\frac{k_p K_1}{k_m \gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\beta}_i \hat{\beta}_i.$$

Como  $K_1 \geq 0$ ,  $k_p > 0$ ,  $k_m > 0$ , e  $\gamma > 0$ , devemos analisar o sinal de  $F(\beta_i) = \tilde{\beta}_i \hat{\beta}_i = (\hat{\beta}_i - \beta_i^*) \hat{\beta}_i$ . Sabendo que neste caso,  $|\hat{\beta}_i| \geq M_{\beta_i}$  e  $M_{\beta_i} > |\beta_i^*|$ ,  $i = 1 \dots n-1$ , então  $F(\hat{\beta}_i) > 0$  e, assim,  $\frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} k_p \sigma_{eq_{\beta}} \hat{\beta}}{k_m \gamma} \geq 0$ .

- $\frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_{\alpha}^{-1} \sigma_{eq_{\alpha}} \hat{\alpha}}{k_m \gamma}$

Assim como foi realizado no termo anterior, fez-se uma análise matricial deste. Primeiramente, temos o detalhamento de  $\sigma_{eq_{\alpha}}$ :

$$\sigma_{eq_{\alpha}} = -\frac{\Gamma_{\alpha} e_o \hat{\alpha}^T v_2}{\|\hat{\alpha}\|^2}, \text{ com } \Gamma_{\alpha(n-1) \times (n-1)}, \hat{\alpha}_{1 \times (n-1)}^T \text{ e } v_{2(n-1) \times 1}.$$

$$\sigma_{eq_{\alpha}} = -\frac{\begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{\alpha_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{\alpha_n} \end{bmatrix} e_o \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 & \dots & \hat{\alpha}_n \end{bmatrix}}{\hat{\alpha}_2^2 + \hat{\alpha}_3^2 + \dots + \hat{\alpha}_n^2} \begin{bmatrix} v_{22} \\ v_{23} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix}$$

Fazendo  $K_1 = \frac{e_o \hat{\alpha}^T v_2}{\|\hat{\alpha}\|^2}$ , temos:

$$\sigma_{eq-\alpha} = \begin{bmatrix} -\gamma_{\alpha_2} K_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\gamma_{\alpha_3} K_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\gamma_{\alpha_n} K_1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

Como neste caso  $\sigma_{eq-\alpha}(i, i) \geq 0$ ,  $i = 2 \dots n$ , e sabendo que  $\gamma_{\alpha_i} > 0$ , temos que  $K_1 \leq 0$ . Expandindo o termo completo em análise na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{\alpha}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{\alpha_2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_{\alpha_3}} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\gamma_{\alpha_n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_{\alpha_2} K_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\gamma_{\alpha_3} K_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\gamma_{\alpha_n} K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix}$$


---

$k_m \gamma$

Desenvolvendo, temos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{\alpha}_n \\ \frac{\tilde{\alpha}_2}{\gamma_{\alpha_2}} & \frac{\tilde{\alpha}_3}{\gamma_{\alpha_3}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\tilde{\alpha}_n}{\gamma_{\alpha_n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_{\alpha_2} K_1 \hat{\alpha}_2 \\ -\gamma_{\alpha_3} K_1 \hat{\alpha}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\gamma_{\alpha_n} K_1 \hat{\alpha}_n \end{bmatrix}$$


---

$k_m \gamma$

ou ainda,

$$\frac{1}{k_m \gamma} (-\tilde{\alpha}_2 K_1 \hat{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_3 K_1 \hat{\alpha}_3 - \dots - \tilde{\alpha}_n K_1 \hat{\alpha}_n).$$

Na forma de somatório, colocando  $K_1$  em evidência:

$$-\frac{K_1}{k_m\gamma} \sum_{i=2}^n \tilde{\alpha}_i \hat{\alpha}_i.$$

Sabendo que  $k_m > 0$ ,  $\gamma > 0$  e  $K_1 \leq 0$ , temos que  $-\frac{K_1}{k_m\gamma} \geq 0$ . Para que o termo completo seja não-negativo,  $(\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*)\hat{\alpha}_i$  também deve ser não-negativo. Como neste caso,  $|\hat{\alpha}_i| \geq M_{\alpha_i}$  e  $M_{\alpha_i} > |\alpha_i^*|$ ,  $i = 2 \dots n$ , então concluímos que  $\frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma \alpha^{-1} \sigma_{eq} \alpha \hat{\alpha}}{k_m\gamma} \geq 0$ .

Concluída a análise termo-a-termo, podemos reescrever a equação (3.23), como segue:

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq -e^T Q e. \quad (3.24)$$

De (3.12), (3.21) e (3.24), e fazendo uso da Desigualdade de Rayleigh, temos:

- a)  $\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2$ ;
- b)  $V \geq \lambda_{\min}(P) \|e\|^2 + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right)$ ;
- c)  $V \leq \lambda_{\max}(P) \|e\|^2 + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right)$ .

De (c), temos:

$$\|e\|^2 \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \left[ V - O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \right]. \quad (3.25)$$

Substituindo em (a), obtemos:

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \left[ V - O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \right]. \quad (3.26)$$

Fazendo  $\lambda_1 = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ :

$$\dot{V} \leq -\lambda_1 \left[ V - O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \right]. \quad (3.27)$$

$$\dot{V} \leq -\lambda_1 V + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right). \quad (3.28)$$

Dessa forma, obtemos a seguinte relação:

$$V \leq e^{-\lambda_1 t} V(0) + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right). \quad (3.29)$$

De (c), podemos deduzir a seguinte relação:

$$V(0) \leq \lambda_{\max}(P) \|e(0)\|^2 + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right). \quad (3.30)$$

De (3.29) e (3.30), temos:

$$V \leq e^{-\lambda_1 t} \lambda_{\max}(P) \|e(0)\|^2 + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right). \quad (3.31)$$

De (3.31) e (b), obtemos:

$$\lambda_{\min}(P) \|e\|^2 \leq \lambda_{\max}(P) e^{-\lambda_1 t} \|e(0)\|^2 + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \quad (3.32)$$

$$\|e\|^2 \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \|e(0)\|^2 + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \quad (3.33)$$

com  $c_1 = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}$  e  $O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) = O\left(\frac{1}{\gamma_p}\right) + O\left(\frac{1}{\gamma_1}\right) + O\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ .

Isso implica na propriedade *ii*.

Como em ambos os casos, obtivemos  $V(e, \tilde{\theta}_p) > 0$ ,  $\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq 0$  e  $V(e, \tilde{\theta}_p) \rightarrow \infty$  quando  $\|e, \tilde{\theta}_p\| \rightarrow \infty$ , temos que o sistema é globalmente estável, provando a propriedade *iii*.

### 3.3 Simulações

Primeiramente, foi aplicada uma referência do tipo degrau unitário na planta (2.16) e no modelo de referência (2.17) com o IB-MRAC atuando como controlador, cuja sintonia é detalhada da seguinte forma:  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ ,  $\Lambda = -2$ ,  $g = 1$ , vetor das estimativas iniciais dos parâmetros da planta  $\hat{\theta}_p(0) = [\hat{k}_p(0) \quad \hat{\beta}(0) \quad \hat{\alpha}_1(0) \quad \hat{\alpha}(0)] = [1.2 \quad 1.2 \quad -1.8 \quad 1.2]$ , ganhos adaptativos  $\gamma_1 = 10$ ,  $\Gamma_\beta = 10$ ,  $\Gamma_\alpha = 10$ ,  $\gamma_p = 10$ , passo de integração  $h = 10^{-4}$  e regiões limitantes  $M_{k_p} = 1.5$ ,  $M_\beta = 1.5$ ,  $M_{\alpha_1} = 3$ , e  $M_\alpha = 1.5$ . O resultado da simulação é apresentado na Figura (3.1). É importante observar a similaridade com o desempenho obtido no IMRAC - vide Figura (2.2). A evolução da adaptação dos parâmetros está representada na Figura (3.2), a qual também ocorre de forma equivalente à adaptação presente na Figura (2.3) - adaptação dos parâmetros com a atuação do IMRAC.

Para tentar obter um resultado mais próximo do IVS-MRAC, os ganhos adaptativos foram projetados com uma magnitude bem maior:  $\gamma_1 = 10^4$ ,  $\Gamma_\beta = 10^4$ ,  $\Gamma_\alpha = 10^4$ ,  $\gamma_p = 10^4$ , com regiões limitantes  $M_{k_p} = 2.5$ ,  $M_\beta = 1.5$ ,  $M_{\alpha_1} = 3.5$ , e  $M_\alpha = 1.5$ . Através desta simulação, representada através da Figura (3.3), podemos observar a melhoria no que diz respeito à rapidez no transitório, assim como a inexistência de oscilação (características típicas dos sistemas a estrutura variável), entretanto também é perceptível o fenômeno de *peaking* no sinal de controle, inerente aos projetos que fazem uso de altos ganhos [Sepulcre 2000] [Sussman & Kokotovic 1991].

Para observar o que acontece com os parâmetros no momento em que acontece o pico no sinal de controle, os gráficos que demonstram a evolução dos parâmetros estão representados através da Figura (3.4). Podemos perceber que  $\hat{k}_p$  chegou ao seu valor

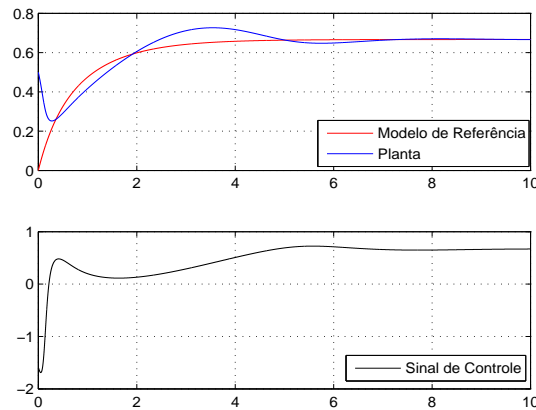


Figura 3.1: Desempenho do IB-MRAC para  $r(t) = 1$  e ganhos adaptativos  $\gamma_1 = 10$ ,  $\Gamma_\beta = 10$ ,  $\Gamma_\alpha = 10$ , e  $\gamma_p = 10$

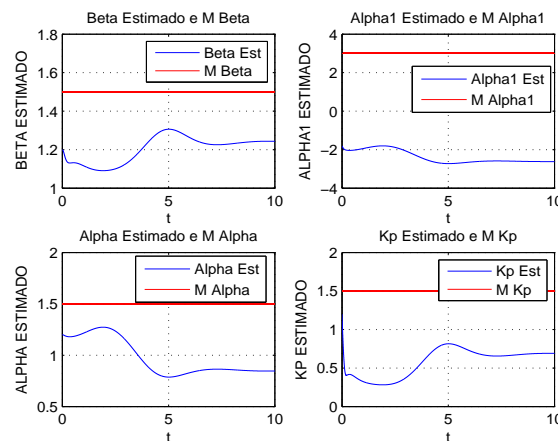


Figura 3.2: Adaptação dos parâmetros da planta para  $r(t) = 1$  e ganhos adaptativos iguais a 10

mínimo  $k_0$ , e os demais também alcançaram seus limites, seja  $M_{\theta_p}$  ou  $-M_{\theta_p}$ . A escolha das regiões limitantes quando há a aplicação de altos ganhos deve ser bastante criteriosa, pois para regiões muito grandes, cresce o erro paramétrico, o qual termina ocasionando um erro de saída. Por outro lado, caso a região seja muito pequena, a estimação do parâmetro sempre fica visitando a região limitante, entrando e saindo do seu valor limite, o que acaba por gerar oscilações na saída da planta. Testes são necessários para chegar a um valor ideal.

É fato a impossibilidade da implantação prática do sistema desta forma. O fenômeno de *peaking* é indesejável pelo fato de poder demandar muita potência, saturar ou danificar atuadores, ou ainda, poder instabilizar o controle de sistemas não-lineares [Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2005].

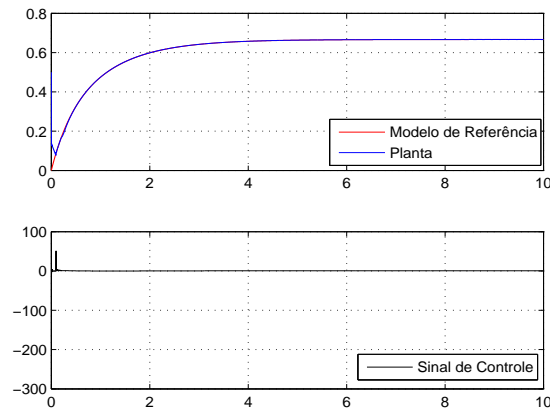


Figura 3.3: Desempenho do IB-MRAC para  $r(t) = 1$  e ganhos adaptativos  $\gamma_1 = 10^4$ ,  $\Gamma_\beta = 10^4$ ,  $\Gamma_\alpha = 10^4$ , e  $\gamma_p = 10^4$

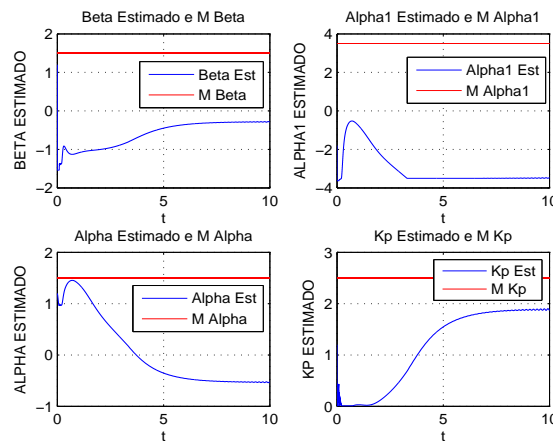


Figura 3.4: Adaptação dos parâmetros da planta para  $r(t) = 1$  e ganhos adaptativos iguais a  $10^4$

Pensando nisso, foi realizada uma nova simulação com o IB-MRAC, sintonizado da mesma forma da simulação anterior com a inserção de uma região de saturação no sinal de controle entre -10 e +10, intervalo este escolhido pelo fato de haver um grande número de placas de aquisição no mercado que trabalham nestes mesmos limites. A saturação é uma não-linearidade típica em sistemas de controle por realimentação devido às restrições nas variáveis físicas [Khalil 1996]. O resultado da simulação pode ser observado através das Figuras (3.5) e (3.6). Apesar do fenômeno de *peaking* existir, temos agora um sinal de controle aplicável na prática. Além disso, não foi observado nenhum prejuízo no que diz respeito ao rastreamento da planta pelo modelo de referência.



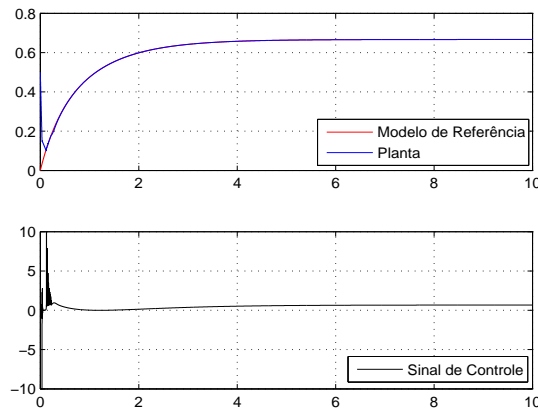


Figura 3.5: Desempenho do IB-MRAC para  $r(t) = 1$ , ganhos adaptativos  $\gamma_1 = 10^4$ ,  $\Gamma_\beta = 10^4$ ,  $\Gamma_\alpha = 10^4$ ,  $\gamma_p = 10^4$  com saturação

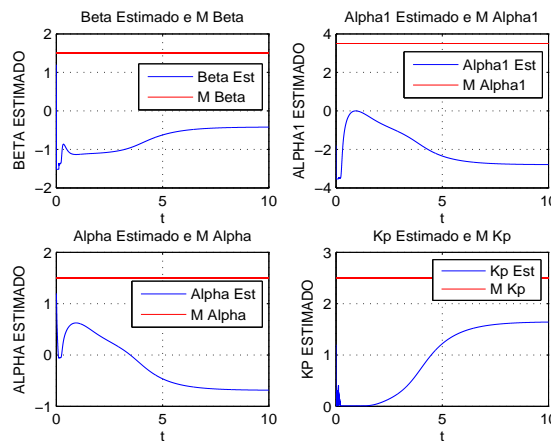


Figura 3.6: Adaptação dos parâmetros da planta para  $r(t) = 1$ , ganhos adaptativos iguais a  $10^4$  com saturação

Apesar do fato da não realização de uma análise formal de estabilidade no que diz respeito à robustez, alguns testes de simulação foram aplicados ao sistema com a inserção de perturbação na entrada da planta  $d = 2$  para  $2 < t < 4$  e uma variação paramétrica de 5% na planta (2.16) para  $t > 3$ , deixando a mesma como em (3.34).

$$W(s) = \frac{s + 0.95}{s^2 - 1.95s + 1.05}. \quad (3.34)$$

Foi observado nestes testes de robustez que a manutenção dos ganhos adaptativos na ordem de  $10^4$  ou superior, como nos casos anteriores, provoca o fenômeno de *chattering* após um tempo de simulação (em regime permanente). Foram obtidos resultados melho-

res com regiões limitantes menores, assim como com uma menor magnitude no ganho adaptativo  $\gamma_p$  em relação aos demais. As Figuras (3.7) e (3.8) demonstram o desempenho do sistema para  $\Gamma_\beta = 10^3$ ,  $\gamma_1 = 10^3$ ,  $\Gamma_\alpha = 10^3$ ,  $\gamma_p = 10^2$ ,  $M_{\alpha_1} = 2.5$ ,  $M_{k_p} = 1.5$ ,  $M_\beta = 1.5$ ,  $M_\alpha = 1.5$ , com uma saturação no sinal de controle entre -10 e +10.

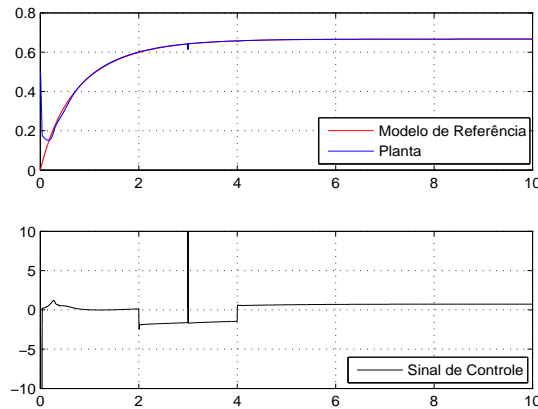


Figura 3.7: Desempenho do IB-MRAC no teste de robustez

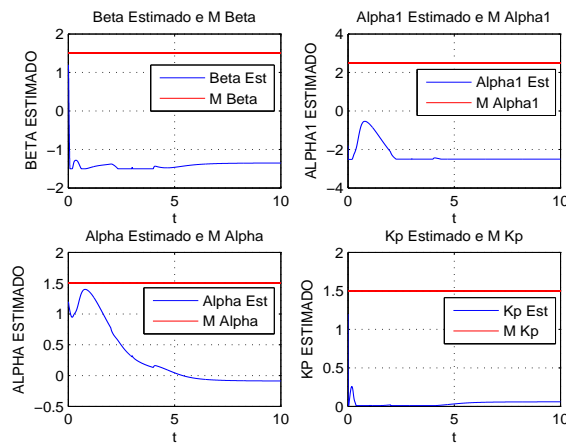


Figura 3.8: Adaptação dos parâmetros no teste de robustez

Através desta simulação, percebeu-se a existência de *peaking* tanto no início da simulação, como no momento da inserção da variação paramétrica. Fato este que não ocorreu na inserção/remoção da perturbação na entrada da planta. De qualquer forma, a inserção da saturação permitiu a obtenção de boas características de desempenho no teste.

---

## Capítulo 4

### IDMARC

---

Assim como o DMARC busca obter a atuação do VS-MRAC caso o erro de saída esteja crescendo, e o MRAC para um erro suficientemente pequeno, o Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto Indireto (IDMARC) busca obter a atuação do IVS-MRAC no primeiro caso, e do IMRAC no segundo, mantendo as excelentes propriedades transitórias dos sistemas a estrutura variável e um sinal de controle suave em regime permanente, típico do controle adaptativo convencional.

A ideia é proporcionar um projeto mais intuitivo do controlador, já que os parâmetros configurados nesta etapa, na abordagem indireta, estão relacionados aos parâmetros físicos da planta. Como característica da abordagem indireta, temos o aumento na carga computacional, pois primeiramente são realizadas estimativas dos parâmetros da planta e, depois, calculados os parâmetros do controlador, enquanto na abordagem direta os parâmetros do controlador são estimados diretamente. Essa característica da abordagem indireta não chega a ser vista como um problema já que os dispositivos eletrônicos estão trabalhando cada vez a uma frequência maior e suportando cada vez mais carga computacional. Como exemplo de dispositivos eletrônicos de alto poder computacional temos o *Digital Signal Processor* (DSP) e o *Field Programmable Gate Array* (FPGA).

Em resumo, este controlador alternativo possui uma performance similar a do controlador direto (DMARC), com um projeto mais intuitivo. Sua motivação baseou-se no uso crescente do IVS-MRAC em aplicações práticas [Oliveira et al. 2010] [Torres et al. 2010] [Oliveira, Fernandes & Teixeira 2012] [Torres & Schnitman 2010] [Torres & Schnitman 2012].

Quando comparado ao IB-MRAC, a principal evolução do IDMARC é na transição entre os controladores IVS-MRAC e IMRAC, pois esta é realizada em tempo real, a partir de um parâmetro  $\mu$  (assim como no DMARC), o qual varia com relação ao erro de saída momentâneo, enquanto o IB-MRAC define como irá atuar através de ganhos adaptativos fixos.

## 4.1 Leis Adaptativas

As leis adaptativas do IDMARC basearam-se nas do DMARC (2.23), do IMRAC (2.15) e do IVS-MRAC (2.18):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\beta}} &= -\frac{\sigma_{\beta}}{\mu}\hat{\beta} - \frac{\sigma_{\beta}}{\mu}(1-\mu)\left[\bar{\beta}sgn(e_o\zeta_{\beta}sgn(k_p))\right] + \Gamma_{\beta}e_ov_1sgn(k_p), \\ \dot{\hat{\alpha}}_1 &= -\frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu}\hat{\alpha}_1 - \frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu}(1-\mu)\left[\bar{\alpha}_1sgn(e_o\zeta_1)\right] - \gamma_1e_o\zeta_1, \\ \dot{\hat{\alpha}} &= -\frac{\sigma_{\alpha}}{\mu}\hat{\alpha} - \frac{\sigma_{\alpha}}{\mu}(1-\mu)\left[\bar{\alpha}sgn(e_o\zeta_{\alpha})\right] - \Gamma_{\alpha}e_ov_2, \\ \text{se } (|\hat{k}_p| > k_0) \text{ ou } (|\hat{k}_p| = k_0 \text{ e } e_o\zeta_psgn(\hat{k}_p) \leq 0)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\hat{k}_p = -\frac{\sigma_{k_p}}{\mu}\hat{k}_p + \frac{\sigma_{k_p}}{\mu}(1-\mu)\left[k_{p,nom} - \bar{k}_psgn(e_o\zeta_p)\right] - \gamma_pe_o\zeta_p$$

senão

$$\hat{k}_p = 0,$$

onde  $k_0$  é um limitante inferior para  $\hat{k}_p$  (evita erro numérico),  $\Gamma_{\alpha} = \text{diag}(\gamma_{\alpha_i}), \gamma_{\alpha_i} > 0, i = 2 \dots n$ ,  $\Gamma_{\beta} = \text{diag}(\gamma_{\beta_i}), \gamma_{\beta_i} > 0, i = 1 \dots n-1$ ,  $\gamma_p > 0$ ,  $\mu$  é definido como em (2.24) e cada parâmetro da planta possui um  $\sigma$ , descrito como em (2.25). O  $\sigma_c$  foi escolhido igual para todos, assim como  $\mu_p$ , valores estes tais que a divisão  $\frac{\sigma_c}{\mu_p}$  seja suficientemente alta para o caso em que  $\mu = \mu_p$ .

## 4.2 Análise de Estabilidade

*Teorema:* Considere o sistema (2.6), com erro de saída (2.13) e leis adaptativas (4.1). Se as hipóteses (a-e) forem satisfeitas, então:

- i) Todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados.
- ii)  $\|e(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

*Prova:* Tome a seguinte função candidata de Lyapunov positiva definida:

$$V(e, \tilde{\theta}_p) = \frac{e^T P e}{2} + \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p^2}{2\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} \tilde{\beta} k_p}{2\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1^2}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_{\alpha}^{-1} \tilde{\alpha}}{2\gamma} \right), \tag{4.2}$$

onde  $\tilde{\theta}_p = [ \tilde{k}_p \quad \tilde{\beta}^T \quad \tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}^T ]$ ,  $\Gamma_{\alpha} = \Gamma_{\alpha}^T > 0$ ,  $\Gamma_{\beta} = \Gamma_{\beta}^T > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\gamma_p > 0$  e  $\gamma_1 > 0$ .

Calculando a derivada de (4.2), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{2\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{2\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p + \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p + \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{2\gamma} + \frac{2\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}} + \tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{2\gamma} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sabendo que  $k_p$  é uma constante, temos que  $\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p = 0$ . Fazendo alguns cancelamentos e substituindo  $\dot{e}$  por (2.13), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & \frac{1}{2} \left( e^T A_c^T + \frac{b_c^T}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] \right) P e + \\ & \frac{1}{2} \left\{ e^T P \left( A_c e + \frac{b_c}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] \right) \right\} + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Reorganizando (4.4), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & \frac{1}{2} \left\{ e^T (A_c^T P + P A_c) e + \frac{2e^T P b_c}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] \right\} + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Considerando o Lema de Kalman-Yakubovitch ( $A_c^T P + P A_c = -2Q$ ,  $P b_c = h_c$ ,  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$ ), temos que  $e^T P b_c = e^T h_c = h_c^T e = e_o$ . Aplicando as mudanças em (4.5):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Q e + \frac{e_o}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha] + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p \dot{\tilde{k}}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\tilde{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\tilde{\alpha}}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

A partir de (2.12), podemos observar que  $\tilde{\theta}_p = \hat{\theta}_p - \theta_p$ , e, conseqüentemente,  $\dot{\tilde{\theta}}_p = \dot{\hat{\theta}}_p - \dot{\theta}_p$ . Como  $\theta_p$  é uma constante,  $\dot{\theta}_p = 0$  e, assim,  $\dot{\tilde{\theta}}_p = \dot{\hat{\theta}}_p$ . Dessa forma, podemos visualizar (4.6) como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Qe + \frac{e_o}{k_m} \left[ \tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right] + \\ & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\tilde{k}_p \dot{k}_p}{\gamma_p} + \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \dot{\hat{\beta}} k_p}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \dot{\hat{\alpha}}}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo  $\dot{\tilde{\theta}}_p$  por (4.1), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Qe + \frac{e_o}{k_m} \left[ \tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right] + \\ & \frac{\tilde{k}_p}{k_m \gamma_p} \left( -\frac{\sigma_{k_p}}{\mu} \hat{k}_p + \frac{\sigma_{k_p}}{\mu} (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] - \gamma_p e_o \zeta_p \right) + \\ & \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} k_p}{k_m \gamma} \left( -\frac{\sigma_\beta}{\mu} \hat{\beta} - \frac{\sigma_\beta}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta \text{sgn}(k_p))] + \Gamma_\beta e_o v_1 \text{sgn}(k_p) \right) + \\ & \frac{\tilde{\alpha}_1}{k_m \gamma_1} \left( -\frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu} \hat{\alpha}_1 - \frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] - \gamma_1 e_o \zeta_1 \right) + \\ & \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1}}{k_m \gamma} \left( -\frac{\sigma_\alpha}{\mu} \hat{\alpha} - \frac{\sigma_\alpha}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)] - \Gamma_\alpha e_o v_2 \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sabendo que, por hipótese,  $k_p > 0$ , podemos reescrever (4.8) como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Qe + \frac{e_o}{k_m} \left[ \tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha \right] + \\ & \frac{\tilde{k}_p}{k_m \gamma_p} \left( -\frac{\sigma_{k_p}}{\mu} \hat{k}_p + \frac{\sigma_{k_p}}{\mu} (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] - \gamma_p e_o \zeta_p \right) + \\ & \frac{\tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} k_p}{k_m \gamma} \left( -\frac{\sigma_\beta}{\mu} \hat{\beta} - \frac{\sigma_\beta}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta)] + \Gamma_\beta e_o v_1 \right) + \\ & \frac{\tilde{\alpha}_1}{k_m \gamma_1} \left( -\frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu} \hat{\alpha}_1 - \frac{\sigma_{\alpha_1}}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] - \gamma_1 e_o \zeta_1 \right) + \\ & \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1}}{k_m \gamma} \left( -\frac{\sigma_\alpha}{\mu} \hat{\alpha} - \frac{\sigma_\alpha}{\mu} (1 - \mu) [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)] - \Gamma_\alpha e_o v_2 \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Desenvolvendo (4.9), e sabendo que  $\zeta_\beta = \frac{-v_1}{\gamma}$  e  $\zeta_\alpha = \frac{v_2}{\gamma}$ , temos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Qe + \frac{e_o \tilde{k}_p \zeta_p}{k_m} - \frac{e_o k_p \tilde{\beta}^T v_1}{k_m \gamma} + \frac{e_o \tilde{\alpha}_1 \zeta_1}{k_m} + \frac{e_o \tilde{\alpha}^T v_2}{k_m \gamma} \\
& - \frac{\sigma_{k_p} \tilde{k}_p \hat{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} + \frac{\sigma_{k_p} (1 - \mu) \tilde{k}_p [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)]}{\mu k_m \gamma_p} - \frac{\tilde{k}_p e_o \zeta_p}{k_m} \\
& - \frac{k_p \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \sigma_\beta \hat{\beta}}{\mu k_m \gamma} - \frac{k_p (1 - \mu) \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \sigma_\beta [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta)]}{\mu k_m \gamma} + \frac{\tilde{\beta}^T e_o v_1 k_p}{k_m \gamma} \\
& - \frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1 \hat{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} - \frac{\sigma_{\alpha_1} (1 - \mu) \tilde{\alpha}_1 [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)]}{\mu k_m \gamma_1} - \frac{\tilde{\alpha}_1 e_o \zeta_1}{k_m} \\
& - \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \sigma_\alpha \hat{\alpha}}{\mu k_m \gamma} - \frac{(1 - \mu) \tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \sigma_\alpha [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)]}{\mu k_m \gamma} - \frac{\tilde{\alpha}^T e_o v_2}{k_m \gamma}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Realizando os devidos cancelamentos em (4.10), e reorganizando a equação, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) = & -e^T Qe - \frac{\sigma_{k_p} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \{ \hat{k}_p - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \} \\
& - \frac{k_p \tilde{\beta}^T \Gamma_\beta^{-1} \sigma_\beta}{\mu k_m \gamma} \{ \hat{\beta} + (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_\beta)] \} \\
& - \frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \{ \hat{\alpha}_1 + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \} \\
& - \frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_\alpha^{-1} \sigma_\alpha}{\mu k_m \gamma} \{ \hat{\alpha} + (1 - \mu) [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_\alpha)] \}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Neste momento, torna-se necessária a análise termo-a-termo para definir qual o sinal de  $\dot{V}$ .

- Termo de  $\hat{\alpha}_1$ :

$$\frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \{ \hat{\alpha}_1 + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \}$$

Neste termo, sabemos que  $\mu > 0$ ,  $k_m > 0$  e  $\gamma_1 > 0$ . Calculando as raízes da função  $F(\hat{\alpha}_1) = (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1^*) \{ \hat{\alpha}_1 + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \}$  para  $\mu_p \leq \mu \leq 1$ , temos:

Para  $\mu = 1$ :  $F(\hat{\alpha}_1) = (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1^*) \hat{\alpha}_1 = 0 \implies \hat{\alpha}_1 = 0$  ou  $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1^*$ .

Para  $\mu = \mu_p$  (desprezível):  $F(\hat{\alpha}_1) = (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1^*) \{ \hat{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1) \} = 0 \implies \hat{\alpha}_1 = \alpha_1^*$  ou  $\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)$ .

Como  $\bar{\alpha}_1 > |\alpha_1^*|$ , temos que  $-\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_1$  são as maiores raízes em valor absoluto de  $F(\hat{\alpha}_1)$ . Assim  $F(\hat{\alpha}_1) > 0 \forall \hat{\alpha}_1$  tal que  $|\hat{\alpha}_1| > \bar{\alpha}_1$ .

Como  $\sigma_{\alpha_1}$  segue a seguinte regra:

$$\sigma_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \text{se } |\hat{\alpha}_1| < M_{\alpha_1} \text{ e } \mu > \mu_p, \text{ com } M_{\alpha_1} = \bar{\alpha}_1, \\ \sigma_c, & \sigma_c > 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}, \quad (4.12)$$

temos quatro casos possíveis para serem analisados:

Caso	Condição 1	Condição 2	$\sigma_{\alpha_1}$
1	$ \hat{\alpha}_1  < \bar{\alpha}_1$	$\mu > \mu_p$	0
2	$ \hat{\alpha}_1  < \bar{\alpha}_1$	$\mu = \mu_p$	$\sigma_c$
3	$ \hat{\alpha}_1  \geq \bar{\alpha}_1$	$\mu > \mu_p$	$\sigma_c$
4	$ \hat{\alpha}_1  \geq \bar{\alpha}_1$	$\mu = \mu_p$	$\sigma_c$

Tabela 4.1: Casos para definição do valor de  $\sigma_{\alpha_1}$

Para o caso (1),  $\sigma_{\alpha_1} = 0$ , e com isso:

$$\frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \{ \hat{\alpha}_1 + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \} = 0.$$

No caso (2),  $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_c > 0$ . Como podemos observar, neste caso  $\mu = \mu_p$ , com  $\mu_p$  desprezível, fazendo com que a lei adaptativa do IDMARC possa ser considerada igual a lei chaveada do IVS-MRAC:  $\hat{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)$ . Esta lei faz com que  $\hat{\alpha}_1$  chaveie entre os valores  $-\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_1$ , fazendo com que  $F(\hat{\alpha}_1)$  seja zero, e consequentemente,

$$\frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \{ \hat{\alpha}_1 + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \} = 0.$$



Nos casos (3) e (4),  $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_c > 0$  e  $|\hat{\alpha}_1| \geq \bar{\alpha}_1$ . Portanto, para esses dois casos:

$$\frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \{ \hat{\alpha}_1 + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \} \geq 0.$$

Assim, considerando os quatro casos, temos que:

$$\frac{\sigma_{\alpha_1} \tilde{\alpha}_1}{\mu k_m \gamma_1} \{ \hat{\alpha}_1 + (1 - \mu) [\bar{\alpha}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_1)] \} \geq 0.$$

- Termo de  $\hat{\beta}$ :

$$\frac{k_p \tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} \sigma_{\beta}}{\mu k_m \gamma} \left\{ \hat{\beta} + (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta})] \right\}$$

Sabe-se que  $k_p > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $k_m > 0$ , e  $\gamma > 0$ . Dessa forma, partiu-se para a análise de sinal do termo  $\tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} \sigma_{\beta} \left\{ \hat{\beta} + (1 - \mu) [\bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta})] \right\}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{\beta}_1}{\gamma_{\beta_1}} & \dots & \frac{\tilde{\beta}_{n-1}}{\gamma_{\beta_{n-1}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_1} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \sigma_{\beta_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 + (1 - \mu) \bar{\beta}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta_1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_{n-1} + (1 - \mu) \bar{\beta}_{n-1} \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta_{n-1}}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{\beta}_1}{\gamma_{\beta_1}} & \dots & \frac{\tilde{\beta}_{n-1}}{\gamma_{\beta_{n-1}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_1} \{ \hat{\beta}_1 + (1 - \mu) \bar{\beta}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta_1}) \} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{\beta_{n-1}} \{ \hat{\beta}_{n-1} + (1 - \mu) \bar{\beta}_{n-1} \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta_{n-1}}) \} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{\sigma_{\beta_1} \tilde{\beta}_1}{\gamma_{\beta_1}} \{ \hat{\beta}_1 + (1 - \mu) \bar{\beta}_1 \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta_1}) \} + \dots + \frac{\sigma_{\beta_{n-1}} \tilde{\beta}_{n-1}}{\gamma_{\beta_{n-1}}} \{ \hat{\beta}_{n-1} + (1 - \mu) \bar{\beta}_{n-1} \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta_{n-1}}) \} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_{\beta_i} \tilde{\beta}_i}{\gamma_{\beta_i}} \{ \hat{\beta}_i + (1 - \mu) \bar{\beta}_i \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta_i}) \}.$$

Nesta etapa, sabendo que  $\gamma_{\beta_i} > 0$ , e que a análise de  $\sigma_{\beta_i}$  com  $F(\hat{\beta}_i) = (\hat{\beta}_i - \beta_i^*)\{\hat{\beta}_i + (1 - \mu)\bar{\beta}_i \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta_i})\}$ ,  $i = 1 \dots n - 1$ , é análoga a do termo passado com  $\sigma_{\alpha_1}$  e  $F(\hat{\alpha}_1)$ , podemos afirmar que:

$$\frac{k_p \tilde{\beta}^T \Gamma_{\beta}^{-1} \sigma_{\beta}}{\mu k_m \gamma} \left\{ \hat{\beta} + (1 - \mu) \left[ \bar{\beta} \text{sgn}(e_o \zeta_{\beta}) \right] \right\} \geq 0$$

- Termo de  $\hat{\alpha}$ :

$$\frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_{\alpha}^{-1} \sigma_{\alpha}}{\mu k_m \gamma} \left\{ \hat{\alpha} + (1 - \mu) \left[ \bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha}) \right] \right\}$$

Como  $\mu > 0$ ,  $k_m > 0$ , e  $\gamma > 0$ , podemos analisar o sinal do termo restante:

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{\alpha}_2}{\gamma_{\alpha_2}} & \dots & \dots & \frac{\tilde{\alpha}_n}{\gamma_{\alpha_n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_2} & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_{\alpha_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 + (1 - \mu) \bar{\alpha}_2 \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_2}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\alpha}_n + (1 - \mu) \bar{\alpha}_n \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_n}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{\alpha}_2}{\gamma_{\alpha_2}} & \dots & \dots & \frac{\tilde{\alpha}_n}{\gamma_{\alpha_n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_2} \{ \hat{\alpha}_2 + (1 - \mu) \bar{\alpha}_2 \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_2}) \} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{\alpha_n} \{ \hat{\alpha}_n + (1 - \mu) \bar{\alpha}_n \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_n}) \} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{\sigma_{\alpha_2} \tilde{\alpha}_2}{\gamma_{\alpha_2}} \{ \hat{\alpha}_2 + (1 - \mu) \bar{\alpha}_2 \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_2}) \} + \dots + \frac{\sigma_{\alpha_n} \tilde{\alpha}_n}{\gamma_{\alpha_n}} \{ \hat{\alpha}_n + (1 - \mu) \bar{\alpha}_n \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_n}) \} =$$

$$\sum_{i=2}^n \frac{\sigma_{\alpha_i}}{\gamma_{\alpha_i}} \tilde{\alpha}_i \{ \hat{\alpha}_i + (1 - \mu) \bar{\alpha}_i \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha_i}) \}.$$

Pela análise dos termos anteriores, podemos afirmar, por analogia, que

$$\frac{\tilde{\alpha}^T \Gamma_{\alpha}^{-1} \sigma_{\alpha}}{\mu k_m \gamma} \{ \hat{\alpha} + (1 - \mu) [\bar{\alpha} \text{sgn}(e_o \zeta_{\alpha})] \} \geq 0$$

- Termo de  $\hat{k}_p$ :

$$\frac{\sigma_{k_p} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \{ \hat{k}_p - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \}$$

Sabendo que  $\mu > 0$ ,  $k_m > 0$ ,  $\gamma_p > 0$ , e considerando uma pequena diferença na lei adaptativa do IDMARC para  $k_p$  (inserção do  $k_{p,nom}$ ), será feita uma análise específica para  $F(\hat{k}_p) = (\hat{k}_p - k_p^*) \{ \hat{k}_p - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \}$  para  $\mu_p \leq \mu \leq 1$ :

Para  $\mu = 1$ :  $F(\hat{k}_p) = (\hat{k}_p - k_p^*) \hat{k}_p = 0 \implies \hat{k}_p = 0$  ou  $\hat{k}_p = k_p^*$ .

Na prática, a raiz  $\hat{k}_p = 0$  nunca será alcançada, pois  $\hat{k}_p$  é limitado inferiormente por  $k_0$  para evitar erros numéricos.

Para  $\mu = \mu_p$  (desprezível):  $F(\hat{k}_p) = (\hat{k}_p - k_p^*) \{ \hat{k}_p - [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \} = 0 \implies \hat{k}_p = k_p^*$  ou  $\hat{k}_p = k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)$ . Para descobrir quais são as maiores raízes em valor absoluto, tornou-se necessário considerar a relação do IVS-MRAC  $\bar{k}_p > |k_p^* - k_{p,nom}|$ , com  $k_{p,nom} > \bar{k}_p$ . Temos:

$$|k_p^* - k_{p,nom}| < \bar{k}_p \implies$$

$$-\bar{k}_p < k_p^* - k_{p,nom} < \bar{k}_p \implies$$

$$k_{p,nom} - \bar{k}_p < k_p^* < k_{p,nom} + \bar{k}_p$$

Dessa forma, chegamos a conclusão que  $k_{p,nom} - \bar{k}_p$  e  $k_{p,nom} + \bar{k}_p$  (ambas positivas) são as maiores raízes em valor absoluto de  $F(\hat{k}_p)$ . Assim,  $F(\hat{k}_p) > 0 \forall \hat{k}_p$  tal que  $\hat{k}_p > k_{p,nom} + \bar{k}_p$  ou  $\hat{k}_p < k_{p,nom} - \bar{k}_p$ .  $\sigma_{k_p}$  é definido da seguinte forma:

$$\sigma_{k_p} = \begin{cases} 0, & \text{se } |\hat{k}_p| < M_{k_p} \text{ e } \mu > \mu_p, \text{ com } M_{k_p} = \bar{k}_p + k_{p,nom} \\ \sigma_c, & \sigma_c > 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}, \quad (4.13)$$

Assim, aqui também temos quatro casos possíveis para serem analisados:

Caso	Condição 1	Condição 2	$\sigma_{k_p}$
1	$ \hat{k}_p  < \bar{k}_p + k_{p,nom}$	$\mu > \mu_p$	0
2	$ \hat{k}_p  < \bar{k}_p + k_{p,nom}$	$\mu = \mu_p$	$\sigma_c$
3	$ \hat{k}_p  \geq \bar{k}_p + k_{p,nom}$	$\mu > \mu_p$	$\sigma_c$
4	$ \hat{k}_p  \geq \bar{k}_p + k_{p,nom}$	$\mu = \mu_p$	$\sigma_c$

Tabela 4.2: Casos para definição do valor de  $\sigma_{k_p}$

No caso (1),  $\sigma_{k_p} = 0$  e, assim:

$$\frac{\sigma_{k_p} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \left\{ \hat{k}_p - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \right\} = 0.$$

No caso (2), temos  $\sigma_{k_p} = \sigma_c > 0$  e  $\mu = \mu_p$ , o que torna a lei adaptativa do IDMARC aproximadamente igual a do IVS-MRAC ( $\hat{k}_p = k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)$ ), fazendo com que  $\hat{k}_p$  chaveie entre os valores  $k_{p,nom} + \bar{k}_p$  e  $k_{p,nom} - \bar{k}_p$ . Com isso,  $F(\hat{k}_p) = 0$ , e consequentemente, temos:

$$\frac{\sigma_{k_p} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \left\{ \hat{k}_p - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \right\} = 0.$$

Já para os casos (3) e (4), temos  $|\hat{k}_p| \geq \bar{k}_p + k_{p,nom}$ , fazendo com que  $F(\hat{k}_p) \geq 0$ . Assim:

$$\frac{\sigma_{k_p} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \left\{ \hat{k}_p - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \right\} \geq 0.$$

Após a análise dos quatro casos possíveis, podemos concluir que:

$$\frac{\sigma_{k_p} \tilde{k}_p}{\mu k_m \gamma_p} \left\{ \hat{k}_p - (1 - \mu) [k_{p,nom} - \bar{k}_p \text{sgn}(e_o \zeta_p)] \right\} \geq 0.$$

Após a análise termo-a-termo de (4.11), obtemos:

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}_p) \leq -e^T Q e \leq 0 \quad (4.14)$$

De (4.2) e (4.14), podemos afirmar que a origem  $[e, \tilde{\theta}_p] = [0, 0]$  é estável, ou seja,  $e \in L_\infty$  e  $\tilde{\theta}_p \in L_\infty$ . Consequentemente,  $e_o \in L_\infty$  e  $\theta_p \in L_\infty$ . Como  $r \in L_\infty$  e  $M(s)$  é estável,  $X_m \in L_\infty$  e  $y_m \in L_\infty$ .

O erro de saída é dado por  $e_o = y - y_m$ . Portanto,  $y = e_o + y_m$ . Como  $e_o \in L_\infty$  e  $y_m \in L_\infty$ , temos que  $y \in L_\infty$ . Sabendo que  $e = X - X_m$ ,  $e \in L_\infty$  e  $X_m \in L_\infty$ , então  $X \in L_\infty$ . Sabendo que  $X^T = [x^T v_1^T v_2^T]$ , temos que  $x \in L_\infty$ ,  $v_1 \in L_\infty$  e  $v_2 \in L_\infty$ .

Além disso,  $\omega \in L_\infty$ , pois  $\omega^T = [v_1^T \quad y \quad v_2^T \quad r]$ . O vetor de parâmetros do controlador  $\theta$  é calculado em função do vetor de parâmetros da planta  $\theta_p$ . Como  $\theta_p \in L_\infty$  e  $|\hat{k}_p| \geq k_0$ , então  $\theta \in L_\infty$  também. De posse da lei de controle  $u = \theta^T \omega$ , temos que  $u \in L_\infty$ . Assim, provamos a propriedade *i*.

Observando a equação da derivada do erro ( $\dot{e} = A_c e + \frac{b_c}{k_m} [\tilde{k}_p \zeta_p + k_p \tilde{\beta}^T \zeta_\beta + \tilde{\alpha}_1 \zeta_1 + \tilde{\alpha}^T \zeta_\alpha]$ ), percebemos que  $\dot{e} \in L_\infty$ , pois  $A_c$  possui apenas autovalores com parte real negativa -  $M(s)$  estável -,  $\tilde{\theta}_p \in L_\infty$  e as variáveis  $\zeta \in L_\infty$  também, pois são calculadas em função de parâmetros uniformemente limitados.

Como  $V > 0$  e tem um mínimo, e  $\dot{V} \leq 0$ , temos que  $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty$ .

$$\lambda_{\min}(Q) \int_0^\infty \|e\|^2 dt \leq \int_0^\infty e^T Q e dt \leq - \int_0^\infty \dot{V}(t) dt = - [V(t)]_0^\infty = -V_\infty + V(0) \in L_\infty.$$

Com isso,  $e \in L_2$ . Como  $e \in L_\infty$ ,  $\dot{e} \in L_\infty$  e  $e \in L_2$ , temos pelo Lema de Barbalat:  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = 0$ , o que comprova a propriedade *ii*.

### 4.3 Simulações

Primeiramente o IDMARC foi aplicado no mesmo caso inicial realizado para os demais algoritmos: referência degrau unitário sem perturbação. As estimativas iniciais dos parâmetros da planta foram sintonizadas próximas dos seus valores nominais observados em (2.16):  $\hat{\theta}_p(0) = [\hat{k}_p(0) \quad \hat{\beta}(0) \quad \hat{\alpha}_1(0) \quad \hat{\alpha}(0)] = [1.2 \quad 1.2 \quad -1.8 \quad 1.2]$ . Os filtros foram configurados tais que:  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ , com  $\Lambda = -2$  e  $g = 2$ . Os demais parâmetros foram projetados como a seguir:  $\tilde{\beta} = 2.5$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = 3.5$ ,  $\tilde{\alpha} = 3.5$ ,  $\tilde{k}_p = 1.2$ ,  $k_{p,nom} = 1.6$ ,  $\gamma_p = 6$ ,  $\Gamma_\beta = 3$ ,  $\Gamma_\alpha = 3$ ,  $\gamma_{\alpha_1} = 3$ ,  $L = 10^{-9}$ ,  $h = 10^{-5}$ ,  $\mu_p = 10^{-7}$  e  $\sigma_c = 10^{-4}$ . O resultado pode ser verificado através das Figuras (4.1) e (4.2).

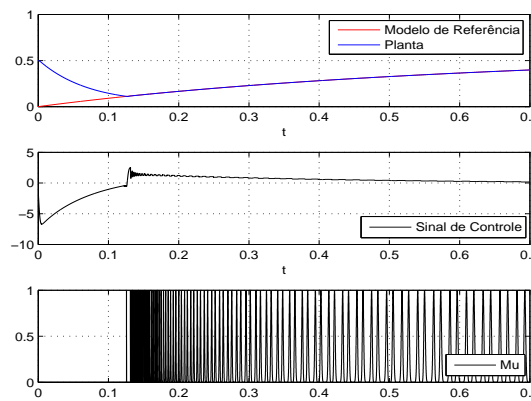


Figura 4.1: Desempenho com o IDMARC para  $r(t) = 1$  sem perturbação

Comparando com o desempenho do DMARC para o mesmo caso - Figura (2.11) - observamos um transitório um pouco mais lento do sistema com o IDMARC, porém o

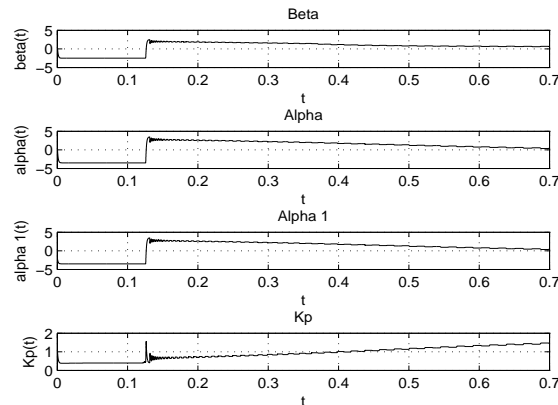


Figura 4.2: Adaptação dos parâmetros para uma referência degrau unitário sem perturbação e  $\theta_p^{*T} = [k_p^* \beta^{*T} \alpha_1^* \alpha^{*T}] = [1 \ 1 \ -2 \ 1]$

mesmo apresenta um sinal de controle mais suave que o anterior. Também foi possível visualizar a evolução do parâmetro  $\mu$ , o qual determina qual algoritmo de controle atuará de forma mais incisiva em cada instante de tempo. Percebe-se no início da simulação que  $\mu = \mu_p$  até o momento em que o erro de saída  $e_o$  se anula. A partir daí, percebemos que  $\mu$  fica oscilando entre  $\mu_p$  e 1. Isso acontece porque quando o IMRAC assume a ação de controle ( $\mu = 1$ ), há uma tendência de haver adaptação paramétrica e, conseqüentemente, gerar uma oscilação na saída. Para corrigir este efeito,  $\mu$  tende a diminuir, repassando o comando novamente para o IVS-MRAC. Ao seguir essa estratégia, conseguimos manter o rastreamento entre a planta e o modelo de referência sem apresentar um sinal de controle de alta frequência.

Em seguida, o IDMARC foi aplicado à mesma sequência de mudanças de referência e de perturbação na entrada da planta que no caso do DMARC - vide Tabela (2.2). A sintonia foi a mesma utilizada na simulação anterior, e o resultado pode ser conferido através da Figura (4.3). A evolução das estimativas dos parâmetros da planta pode ser visualizada através da Figura (4.4). Repare que o chaveamento nos parâmetros da planta influencia diretamente no sinal de controle.

Na tentativa de suavizar ainda mais o sinal de controle (como no caso do DMARC), fez-se  $L = 10^{-7}$  e  $h = 10^{-4}$ . Através das Figuras (4.5) e (4.6) podemos perceber que o desempenho do sistema no que diz respeito ao acompanhamento do modelo de referência praticamente não sofreu mudança, porém as estimativas dos parâmetros da planta chavearam numa frequência bem menor, fazendo com que haja uma melhoria no sinal de controle.

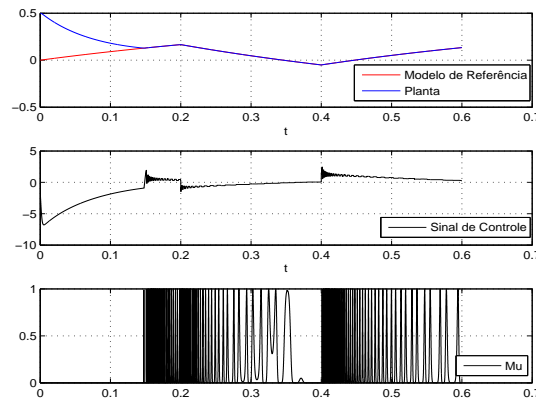


Figura 4.3: Desempenho com o IDMARC para o caso da Tabela (2.2) com  $L = 10^{-9}$

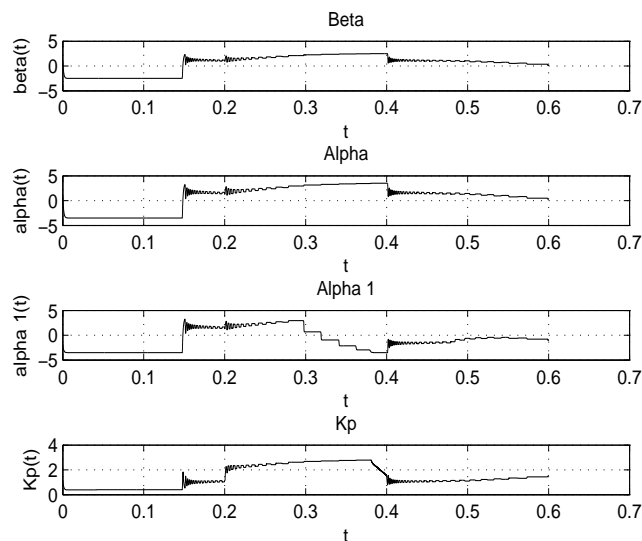


Figura 4.4: Adaptação paramétrica para o caso da Tabela (2.2) com  $L = 10^{-9}$  e  $\theta_p^{*T} = [k_p^* \beta^{*T} \alpha_1^* \alpha^{*T}] = [1 \ 1 \ -2 \ 1]$

Por fim, foi realizado o mesmo teste de robustez aplicado ao IB-MRAC, com a inserção e posterior remoção de uma perturbação  $d = 2$  na entrada da planta para  $2 < t < 4$  e uma variação paramétrica de 5% para  $t > 3$ , tornando a planta igual a (3.34). O resultado da simulação com o IDMARC (sintonizado da mesma forma que na simulação anterior) pode ser observado através das Figuras (4.7) e (4.8).

Comparando com a atuação do IB-MRAC - Figura (3.7) - podemos observar uma equivalência no que diz respeito ao rastreamento da planta para o modelo de referência.

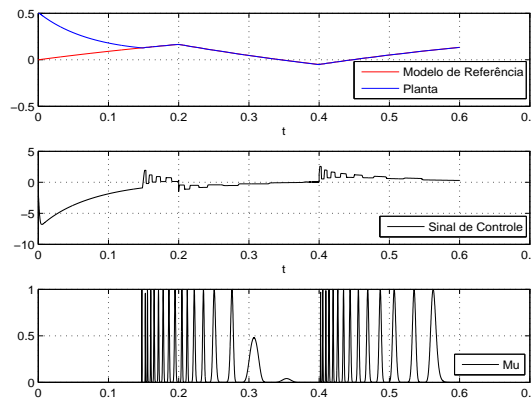


Figura 4.5: Desempenho do IDMARC para o caso da Tabela (2.2) com  $L = 10^{-7}$

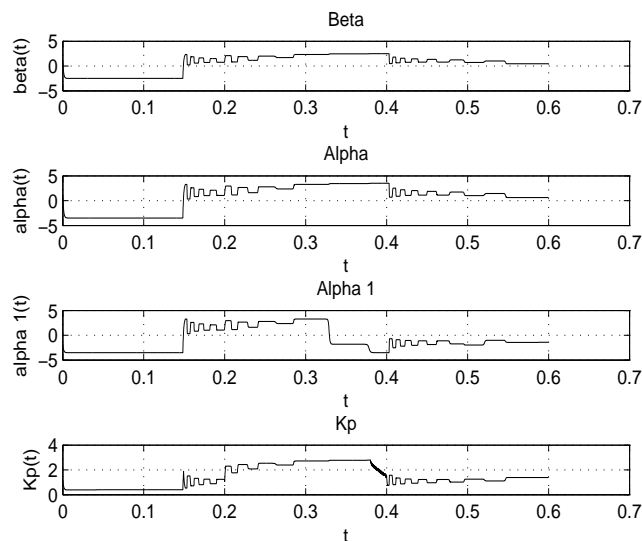


Figura 4.6: Evolução dos parâmetros da planta para o caso da Tabela (2.2) com  $L = 10^{-7}$  e  $\theta_p^{*T} = [k_p^* \beta^{*T} \alpha_1^* \alpha^{*T}] = [1 \ 1 \ -2 \ 1]$

Entretanto, é perceptível a ausência do fenômeno de *peaking* no sinal de controle do IDMARC, não havendo a necessidade da inserção de saturação do mesmo. Também é notória a mudança em alta frequência do parâmetro  $\mu$  em regime permanente, o que leva a crer que em um instante o IDMARC atua como IMRAC, e logo no momento seguinte atua como IVS-MRAC, não permitindo, dessa forma, que o erro de saída cresça nem que o sinal de controle chaveie como nos sistemas a estrutura variável tradicionais.



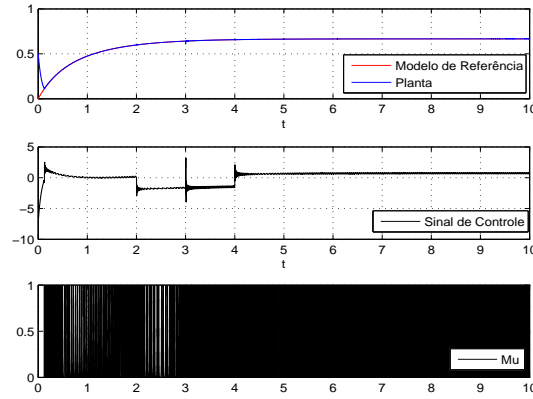


Figura 4.7: Desempenho do IDMARC com perturbação e variação paramétrica

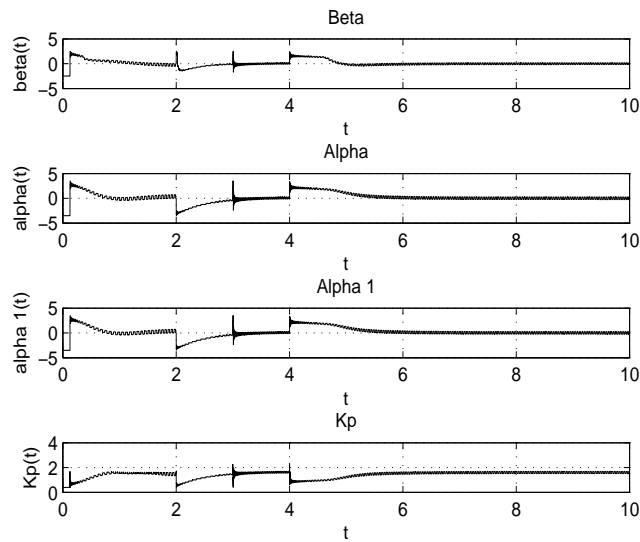


Figura 4.8: Evolução dos parâmetros da planta com  $\theta_p^{*T} = [k_p^* \beta^{*T} \alpha_1^* \alpha^{*T}] = [1 \ 1 \ -2 \ 1]$  na presença de perturbação e variação paramétrica

---

## Capítulo 5

# IDMARC Generalizado

---

O Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto Indireto (IDMARC) descrito no capítulo passado apresenta uma série de características positivas, tais como: transitório rápido e sem oscilações, sinal de controle suave em regime permanente, robustez e um projeto mais intuitivo do controlador (abordagem indireta), já que o mesmo é baseado nos parâmetros físicos da planta.

Entretanto, algumas restrições ainda podem ser observadas. Dentre as quais, podemos citar o fato de que o IDMARC é aplicável apenas em plantas com grau relativo unitário, ou seja, quando a diferença entre o número de polos e de zeros é igual a um. Adicionalmente, por ser baseado no IMRAC e no IVS-MRAC, o IDMARC não pode ser aplicado em plantas de fase não-mínima, as quais apresentam zeros no semi-plano direito.

A generalização é um passo importante para um controlador poder atuar em plantas que possuem o grau relativo maior que um. Assim como [Hsu 1990] generalizou o VS-MRAC, [Hsu & Costa 1994] generalizaram o B-MRAC, e [Cunha et al. 2009] generalizaram o DMARC, [Qi et al. 2013] desenvolveram um controle adaptativo para grau relativo arbitrário aplicável em sistemas fuzzy discretos, [Queiroz et al. 2013] apresentaram o projeto e a análise de estabilidade de um controlador adaptativo modular backstepping com estrutura variável (MVS-ABC) para plantas com grau relativo arbitrário, e [Bouakrif 2013] apresentou um observador de estado baseado no controlador por aprendizagem iterativa para resolver o problema de rastreamento de sistemas MIMO, variantes no tempo e não lineares com grau relativo arbitrário.

Sistemas de fase não-mínima são de grande interesse para a área de teoria de controle. Recentemente, temos visto diversos trabalhos relacionados com esse tema. Apenas como exemplo, podemos citar: o projeto de controladores PI e  $H_\infty$  para um sistema de nanoposicionamento de fase não-mínima [Aggarwal et al. 2013], o controle robusto por modos deslizantes simulado em um veículo de voo não linear e de fase não-mínima [Bahrami et al. 2013], a obtenção de estabilidade do ponto de vista global de sistemas chaveados não-lineares e de fase não-mínima [Yang et al. 2012] e uma estratégia de controle discreto para processos estocásticos, instáveis, de fase não-mínima e com atraso [Rezaei & Shahrokhi 2013].

Buscando a solução dessas restrições, é proposta a generalização do IDMARC - versão essa que será denominada SIDMARC - através de um compensador *shunt* em paralelo com a planta, de uma forma que seja possível utilizar este controlador para plantas com grau relativo arbitrário ( $n^* > 1$ ) ou de fase não-mínima.

A ideia surgiu a partir da generalização do IVS-MRAC em [Fernandes et al. 2010] seguindo essa mesma estratégia. Neste trabalho, foram realizadas simulações em uma planta instável com  $n^* = 2$  e em uma planta de fase não-mínima, também com  $n^* = 2$ , obtendo bons resultados tanto no que diz respeito ao transitório quanto a robustez contra incertezas paramétricas, mas apresentou um sinal de controle em alta frequência e de grande amplitude. Este IVS-MRAC generalizado - denominado SIVS-MRAC - também foi simulado no controle de temperatura de um sistema para secagem de grãos em [Oliveira, Fernandes & Teixeira 2012], o qual foi modelado com  $n^* = 3$ , apresentando resultados semelhantes, com exceção do sinal de controle que se comportou bem com uma saturação entre -10 e +10V (aplicável na prática sem problemas). Apesar de nos trabalhos passados o sistema ter apresentado robustez contra perturbações na entrada, mudanças no sinal de referência e incertezas paramétricas, nenhuma prova de estabilidade formal do algoritmo foi realizada.

O método para projetar um compensador *shunt* em paralelo para plantas instáveis ou de fase não-mínima invariantes no tempo e SISO foi apresentado em [Andrievsky et al. 1996]. A principal ideia do método é garantir a propriedade de fase hiper-mínima (*Hyper Minimum Phase* - HMP) da planta aumentada (planta e *shunt*), a qual é suficiente para a existência de modos deslizantes estáveis, assim como para solução de um problema de controle adaptativo direto [Andrievsky et al. 1996].

Essa estratégia será descrita na seção 5.1.

## 5.1 Compensador Shunt

Considere a planta SISO, linear e invariante no tempo a seguir:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t), \quad (5.1)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t),$$

com  $x_p(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}$ ,  $y_p(t) \in \mathfrak{R}$ , e com função de transferência dada por

$$W_p(s) = C_p (sI_n - A_p)^{-1} B_p = \frac{B_p(s)}{A_p(s)}, \quad (5.2)$$

com  $\text{grau}[A_p(s)] = n$ ,  $\text{grau}[B_p(s)] = m$ ,  $n^* = n - m > 1$  e  $W_p(0) > 0$ .

Considerando a planta invariante no tempo, com incertezas paramétricas e o sinal de saída  $y_p(t)$  mensurável, o objetivo de controle é atingir o desempenho do sistema em malha fechada desejado descrito pela equação a seguir [Andrievsky et al. 1996]:

$$A_m(s)y_p(t) = K \cdot B_p(s)r(t), \quad (5.3)$$

com  $r(t)$  sendo o sinal de referência,  $A_m(s)$  um polinômio Hurwitz de grau  $n$  arbitrário e  $K = \frac{A_m(0)}{B_p(0)}$ .

A inserção de um compensador em paralelo com a planta (*shunt*) garante a propriedade de fase hiper-mínima para a planta aumentada (planta controlada e o *shunt*) e permite o projeto de controles adaptativos que não necessitem de derivadas da saída da planta. Para plantas SISO, a propriedade de fase hiper-mínima significa que a função de transferência da planta possui seus zeros no semi-plano esquerdo e que o grau relativo é unitário ( $n^* = 1$ ) [Andrievsky et al. 1996].

A função de transferência do *shunt* é da seguinte forma:

$$W_c(s) = \frac{y_c(s)}{u(s)} = \frac{B'(s)}{A'(s)} = \frac{\kappa(\epsilon s + 1)^{n^*-2}}{(s + \lambda)^{n^*-1}}. \quad (5.4)$$

A saída da planta aumentada é dada por  $y(t) = y_p(t) + y_c(t)$  e a sua função de transferência como

$$W(s) = W_p(s) + W_c(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{F(s)}{A_p(s)A'(s)}, \quad (5.5)$$

com  $F(s) = A_p(s)B'(s) + A'(s)B_p(s)$ .

É importante observar que o rastreamento ideal de  $y(t)$  (saída da planta aumentada) para  $y_f(t)$  (saída do modelo) não implica em dizer que  $y_p(t)$  tenda para a referência (como o desejado em qualquer sistema de controle). Assim, equações de um pré-filtro devem ser escolhidas de forma apropriada. Denominando  $W_r(s)$  como a função de transferência que relaciona a saída da planta  $y_p(t)$  com a referência  $r(t)$ , sob a hipótese de que  $y(t) \equiv y_f(t)$ , temos [Andrievsky et al. 1996]:

$$W_r(s) = W_f(s) \frac{B_p(s)A'(s)}{F(s)}, \quad (5.6)$$

na qual  $W_f(s)$  é a função de transferência do pré-filtro. De (5.3) e (5.6), temos que o objetivo de controle será alcançado se  $y(t) \equiv y_f(t)$  e  $W_f(s)$  for da seguinte forma:

$$W_f(s) = K \frac{F(s)}{A_m(s)A'(s)}. \quad (5.7)$$

Na presença de incertezas paramétricas da planta, valores nominais (usados em [Fernandes et al. 2010]) ou estimativas (como em [Andrievsky et al. 1996] que usou o algoritmo dos mínimos quadrados) podem ser usados para garantir que  $y(t) \equiv y_f(t)$ .

A Figura (5.1) representa na forma de diagrama de blocos a estratégia descrita.

O controlador proposto por [Andrievsky et al. 1996] garante convergência em tempo finito do erro aumentado  $e_0$  e convergência exponencial do erro paramétrico sob a condição de riqueza de sinal (sinal persistentemente excitante). Isso, por sua vez, permite alcançar a dinâmica desejada para a saída da planta verdadeira.

[Fernandes et al. 2010] não faz uso de sinal persistentemente excitante para garantir

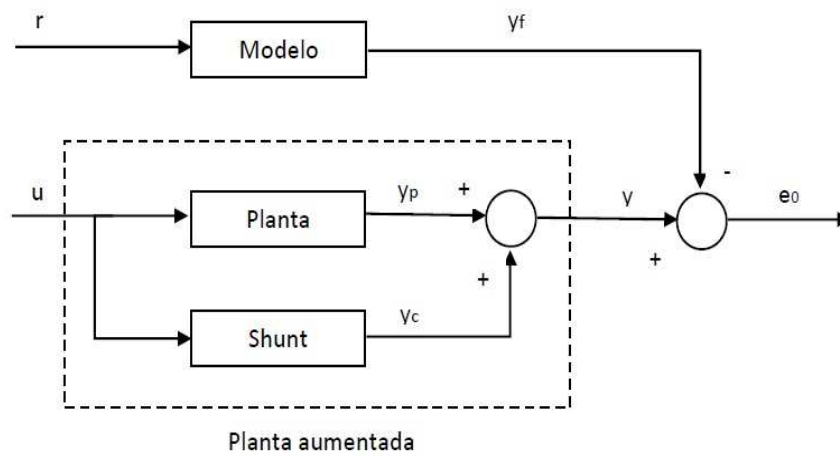


Figura 5.1: Diagrama de blocos do sistema com o shunt

que  $y_p$  tenda para a referência  $r$ , mas sim de um controlador PI para gerar um novo sinal de referência  $r'(t)$  para o modelo de referência, baseado no erro de saída da planta. Como o controlador PI somente modifica  $r(t)$  para gerar  $r'(t)$ , seus parâmetros são escolhidos tais que o sistema apresente rápido transitório sem oscilações.



---

# Capítulo 7

## Conclusões

---

Através deste trabalho, observamos que os controladores indiretos apresentam desempenhos similares às suas versões diretas, e ainda permitem um projeto mais intuitivo do controlador, seja nas estimativas iniciais para os parâmetros da planta, seja na definição de suas regiões limitadoras, das quais as estimativas não podem ultrapassar. O aumento na carga computacional é balanceado atualmente pelo avanço dos processadores atuais.

Foi desenvolvido o IB-MRAC, o qual se comporta como o IMRAC para ganhos adaptativos baixos, e como o IVS-MRAC quando os ganhos tendem a infinito. Ganhos estes fixos e definidos na fase de projeto. Apesar da não realização de uma prova formal de estabilidade no que diz respeito à robustez para o IB-MRAC, o mesmo sugere robustez quando possui altos ganhos para os cenários que foram colocados contendo perturbações e variações paramétricas. Por hipótese, ao impor ganhos altos ao algoritmo, o mesmo tende a herdar as características de robustez do IVS-MRAC. A análise de estabilidade deste controlador garante que as estimativas dos parâmetros da planta não irão escapar das suas regiões limitantes (uniformemente limitadas), que o erro decresce de forma exponencial e que o sistema é globalmente estável. Como problema encontrado nas simulações, temos a existência do fenômeno de *peaking* no sinal de controle, o qual é indesejável para aplicações práticas.

Posteriormente, realizou-se o desenvolvimento do IDMARC. Algoritmo este que tornou possível obter um transitório rápido e sem oscilações, com um sinal de controle suave em regime permanente, sem *peaking*. Além disso, com o IDMARC foi possível atuar entre o IMRAC e o IVS-MRAC de uma forma automatizada, pois o parâmetro que determina o grau de atuação de cada um é determinado dinamicamente, a depender do erro de saída instantâneo. Sua prova de estabilidade garante que todos os sinais em malha fechada são uniformemente limitados, assim como  $\|e(t)\| \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .

No momento, está sendo proposta a generalização do IDMARC através de um compensador *shunt* em paralelo com a planta. Através dessa estratégia, será possível realizar o controle para plantas com grau relativo maior que um ou de fase não-mínima.

Relacionado com este trabalho, foram realizadas quatro publicações, sendo duas sobre o IB-MRAC [Teixeira et al. 2011a] [Teixeira et al. 2011b], e duas sobre o IDMARC [Teixeira et al. 2013a] [Teixeira et al. 2013b]. Adicionalmente, temos um artigo submetido à revista *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* sob processo de revisão, intitulado *Stability Analysis of Indirect Binary Model Reference Adaptive Controller for Plants with Relative Degree One*.

---

## Referências Bibliográficas

---

- Aggarwal, S., M. Garg & A. Swarup (2013), 'Design of feedback controller for non-minimum phase nano positioning system', *Advanced Materials Letters* **4**(1), 31–34.
- Andrievsky, B. R., A. L. Fradkov & A. A. Stotsky (1996), 'Shunt compensation for indirect sliding-mode adaptive control', *Proceedings of the IFAC 13th WC* pp. 193–198.
- Aström, K. J. & B. Wittenmark (1989), *Adaptive Control*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, EUA.
- Bahrani, M., B. Ebrahimi & M. Asadi (2013), 'Robust control of a nonlinear non-minimum phase supersonic flight vehicle based on stable system center', *Aerospace Science and Technology* **25**(1), 283–291.
- Bouakrif, F. (2013), 'Iterative learning control for mimo nonlinear systems with arbitrary relative degree and no states measurement', *Complexity* **19**(1), 37–45.
- Cunha, C. D. (2008), *Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto - DMARC*, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN.
- Cunha, C. D., A. D. Araujo, D. S. Barbalho & F. C. Mota (2001), 'Ajuste de um controlador em modo dual adaptativo robusto para um motor de indução trifásico utilizando lógica nebulosa', *Anais do V Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente* pp. 1–6.
- Cunha, C. D., A. D. Araujo, D. S. Barbalho & F. C. Mota (2005), 'A dual-mode adaptive robust controller applied to the speed control of a three-phase induction motor', *Asian Journal of Control* **7**(2), 197–201.
- Cunha, C. D., A. D. Araujo & F. C. Mota (2007), 'Controlador em modo dual adaptativo robusto para plantas com grau relativo unitário: Prova de estabilidade', *Revista Controle e Automação* **18**(2), 223–232.
- Cunha, C. D., A. D. Araujo & F. C. Mota (2009), 'Controlador em modo dual adaptativo robusto para plantas com grau relativo arbitrário', *Revista Controle e Automação* **20**(1), 72–82.
- Cunha, J. P. V. S., L. Hsu, R. R. Costa & F. Lizarralde (2005), 'Controle de sistemas lineares incertos por modos deslizantes e observador de alto ganho sem peaking', *Revista Controle e Automação* **16**(4), 449–466.



- Emelyanov, S. V. (1987), *Binary Automatic Control Systems (English Translation)*, MIR Publishers, Moscow.
- Fernandes, M. V. A., S. M. Dias, A. D. Araujo, J. B. Oliveira & K. I. M. P. Queiroz (2010), 'Shunt indirect variable structure model reference adaptive controller for plants with arbitrary relative degree', *Proceedings of 11th International Workshop on Variable Structure Systems* **1**, 283–288.
- Hsu, L. (1990), 'Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements: The general case', *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-35**(11), 1238–1243.
- Hsu, L. (1997), 'Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error', *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **7**, 353–372.
- Hsu, L., A. D. Araujo & R. R. Costa (1994), 'Analysis and design of i/o based variable structure adaptive control', *IEEE Trans. Automatic Control* **39**(1), 4–21.
- Hsu, L. & R. R. Costa (1987), 'Bursting phenomena in continuous-time adaptive systems with a  $\sigma$ -modification', *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-32**(1), 84–86.
- Hsu, L. & R. R. Costa (1989), 'Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements - part i', *International Journal of Control* **49**(2), 339–416.
- Hsu, L. & R. R. Costa (1990), 'A binary control approach to design globally exponentially stable systems', *Proceedings of the 7th International Conference on Systems Engineering*.
- Hsu, L. & R. R. Costa (1994), 'B-mrac: Global exponential stability with a new model reference adaptive controller based on binary control theory', *Control-Theory and Advanced Technology* **10**(4), Part 1, 649–668.
- Ioannou, P. A. & J. Sun (1996), *Robust adaptive control*, Prentice-Hall, New Jersey, EUA.
- Ioannou, P. A. & K. S. Tsakalis (1986), 'A robust direct adaptive controller', *IEEE Trans. Automatic Control* **31**(11), 1033–1043.
- Ioannou, P. A. & P. V. Kokotovic (1984), 'Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control', *IEEE Trans. Automatic Control* **20**(5), 583–594.
- Khalil, H. K. (1996), *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, New Jersey, EUA.
- Mota, F. C. & A. D. Araujo (2002), 'Proposta de um controlador dual adaptativo robusto utilizando o modelo de takagi-sugeno', *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automação* pp. 173–177.
- Naik, S. M., P. R. Kumar & B. E. Ydstie (1993), 'Robust continuous-time adaptive control by parameter projection', *IEEE Trans. Automatic Control* **37**, 182–197.

- Narendra, K. S., Y. H. Lin & L. S. Valavani (1980), 'Stable adaptive controller design - direct control', *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-25**(6), 570–583.
- Oliveira, J. B. (2003), Controle adaptativo indireto por modelo de referência e estrutura variável, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN.
- Oliveira, J. B. (2007), Estabilidade e Robustez de um Controlador Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN.
- Oliveira, J. B. & A. D. Araujo (2004), 'An indirect variable structure model reference adaptive control applied to the speed control of a three-phase induction motor', *Proceedings of the 2004 American Control Conference* pp. 1946–1951.
- Oliveira, J. B. & A. D. Araujo (2008a), 'Design and stability analysis of an indirect variable structure model reference adaptive control', *International Journal of Control* **81**(12), 1870–1877.
- Oliveira, J. B. & A. D. Araujo (2008b), 'An indirect adaptive sliding mode control of an induction machine', *Proceedings of the CONTROLO'08 - The 8th Portuguese Conference on Automatic Control* **1**, 268–273.
- Oliveira, J. B. & A. D. Araujo (2008c), 'A modified design for the vs-mrac based on the indirect approach: Stability analysis', *Proceedings of the 17th IFAC 2008 WC* **1**, 13121–13126.
- Oliveira, J. B., A. D. Araujo & S. M. Dias (2010), 'Controlling the speed of a three-phase induction motor using a simplified indirect adaptive sliding mode scheme', *Control Engineering Practice* **18**(6), 577–584.
- Oliveira, J. B., M. V. A. Fernandes & L. R. L. Teixeira (2012), 'Modeling and simulation of a temperature robust control in grain drying systems for thermal damage reduction', *Proceedings of the 9th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)* **1**, 561–565.
- Oliveira, T. R., A. J. Peixoto, E. V. L. Nunes & L. Hsu (2012), 'Binary robust adaptive control for global tracking of uncertain systems with unknown high-frequency-gain sign', *Proceedings of the 12th IEEE Workshop on Variable Structure Systems - VSS'12* pp. 124–129.
- Pereira, A. R., L. Hsu & R. Ortega (2009), 'Globally stable adaptive formation control of euler-lagrange agents via potential functions', *Proceedings of the 2009 American Control Conference* pp. 2606–2611.
- Qi, R., G. Tao, C. Tan & Xuelian Yao (2013), 'Adaptive control of discrete-time state-space ts fuzzy systems with general relative degree', *Fuzzy Sets and Systems* **217**, 22–40.

- Queiroz, K., S. Dias & A. Araujo (2013), ‘Modular variable structure adaptive backstepping controller: Design and stability analysis’, *Journal of the Franklin Institute* **351**(4), 20892106.
- Rezaei, Sabereh & Mohammad Shahrokhi (2013), ‘Robust controller design for discrete unstable non-minimum-phase delayed stochastic processes’, *International Journal of Control, Automation and Systems* **11**(5), 893–902.
- Rohrs, C. E., L. Valavani, M. Athans & G. Stein (1985), ‘Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics’, *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-30**(9), 881–889.
- Sepulcre, R. (2000), ‘Slow peaking and low-gain designs for global stabilization of nonlinear systems’, *IEEE Trans. Automatic Control* **45**(3), 453–461.
- Slotine, J.J. E. & W. Li (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, New Jersey, EUA.
- Sussman, H. J. & P. V. Kokotovic (1991), ‘The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems’, *IEEE Trans. Automatic Control* **36**(4), 424–440.
- Teixeira, L. R. L., J. B. Oliveira & A. D. Araujo (2011a), ‘Controle adaptativo binário por modelo de referência: Abordagem indireta’, *Anais do X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - X SBAI* **1**, 498–503.
- Teixeira, L. R. L., J. B. Oliveira & A. D. Araujo (2011b), ‘Indirect binary model reference adaptive control’, *Proceedings of the IEEE International Conference on Control and Automation - 9th ICCA* **1**, 877–882.
- Teixeira, L. R. L., J. B. Oliveira & A. D. Araujo (2013a), ‘An intuitive design for the dual mode adaptive robust controller based on indirect control’, *Proceedings of the European Control Conference 2013 - ECC ’13* **1**, 4526–4531.
- Teixeira, L. R. L., J. B. Oliveira & A. D. Araujo (2013b), ‘Smooth indirect adaptive sliding mode control’, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* .
- Torres, L. H. S., C. V. Vasconcelos Junior, L. Schnitman & J. A. M. F. Souza (2010), ‘Exact linearization and adaptive variable structure control of a magnetic levitation system’, *Proceedings of the 9th Portuguese Conference on Automatic Control CONTROLRO 2010* **1**.
- Torres, L. H. S. & L. Schnitman (2010), ‘Controle adaptativo indireto por modelo de referência e estrutura variável aplicado a um sistema de bombeio mecânico de poços de petróleo’, *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática* **1**.
- Torres, L. H. S. & L. Schnitman (2012), ‘Indirect variable structure model reference adaptive control applied to the improvement of the operational conditions of a sucker rod pump system of petroleum wells’, *Proceedings of 15th Latin American Control Conference (CLCA 2012)* **1**, 137–142.

- Yang, H., B. Jiang & H. Zhangb (2012), ‘Stabilization of non-minimum phase switched nonlinear systems with application to multi-agent systems’, *Systems Control Letters* **61**(10), 1023–1031.
- Yanque, I., E. V. L. Nunes, R. R. Costa & L. Hsu (2012), ‘Binary mimo mrac using a passifying multiplier - a smooth transition to sliding mode control’, *Proceedings of the 2012 American Control Conference* pp. 1925–1930.