ÁLGEBRA LINEAR

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE

Professor: Marcelo Silva

marcelo.silva@ifrn.edu.br

Natal - RN, janeiro de 2012

COMBINAÇÃO LINEAR

Definição.

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores quaisquer de um espaço vetorial V e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. Então todo vetor $\mathbf{v} \in V$ da forma

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

é um elemento de V ao que chamamos *combinação linear* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Exemplo. Em R^3, o vetor $\mathbf{v} = (-7, 7, 7)$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1 = (-1, 2, 4)$ e $\mathbf{u}_2 = (5, -3, 1)$, pois:

$$(-7, 7, 7) = 2(-1, 2, 4) - 1(5, -3, 1). \blacklozenge$$

Exemplo. Em M_{23},

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 5 & 8 & -10 \\ 7 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE

COMBINAÇÃO LINEAR

Definição.

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de um espaço vetorial V é dito *gerador de V* se todo vetor em V pode ser escrito como combinação linear desses vetores. Ou seja, para todo $\mathbf{v} \in V$, existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tais que

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

Usa-se a notação $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$, que se lê "V é gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$".

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE

Definição.

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, vetores de um espaço vetorial V. Diz-se que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é *linearmente independente* (l.i.), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são l.i., se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. No caso em que a igualdade se verifique para algum $a_i \neq 0$ diz-se que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é *linearmente dependente* (l.d.), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são l.d.

Exemplos:

1) No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, os vetores $v_1 = (2,-1,3), v_2 = (-1,0,-2)$ e $v_3 = (2,-3,1)$ formam um conjunto linearmente dependente.

2) No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^4$, os vetores $v_1 = (2,2,3,4), v_2 = (0,5,-3,1)$ e $v_3 = (0,0,4,-2)$ formam um conjunto linearmente independente.

PROPRIEDADES

1) Um único vetor é LD se, e somente se, ele for nulo.

2) Se um conjunto contém o vetor nulo, então ele é LD.

3) Um conjunto de vetores é LD se, e somente se, existir um vetor que é combinação linear dos outros.

Obs.: No plano, isso significa que os vetores são colineares. No espaço de 3 dimensões isso implica que os vetores são coplanares. Podemos então utilizar uma técnica diferente para verificar se eles são LD.

Exemplo: $u=(2,-1,3),\ v=(-2,1,-3)$ e $w=(1,0,1)$.

Para verificar se eles são coplanares (LD), basta calcular:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$ Se o resultado for zero, então eles são LD.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE

PROPRIEDADES

4) Um conjunto de n vetores em R^m é sempre l.d. se $n > m$.

5) Um conjunto de vetores l.i. em R^n contém, no máximo, n vetores.

6) Qualquer conjunto de n vetores l.i. em R^n gera o R^n.

Exemplo. O conjunto $\alpha = \{(1, 3, -1), (2, 1, 0), (1, 2, -1), (3, 2, 1)\}$ gera o R^3 mas não é l.i., pois 4 vetores em R^3 são l.d. (Propriedade 3). No entanto, se três vetores de α são l.i. então estes geram o R^3 (Propriedade 7).