MATEMÁTICA

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE

Professor: Marcelo Silva

Natal - RN, outubro de 2013

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Dadas duas funções f e g é possível construirmos, a partir dessas duas, novas funções. São elas:

Soma: (f+g)(x)=f(x)+g(x)

Diferença: (f-g)(x)=f(x)-g(x)

Multiplicação: (f*g)(x)=f(x)*g(x)

Divisão: (f/g)(x)=f(x)/g(x)

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$.

A partir delas podemos construir as funções:

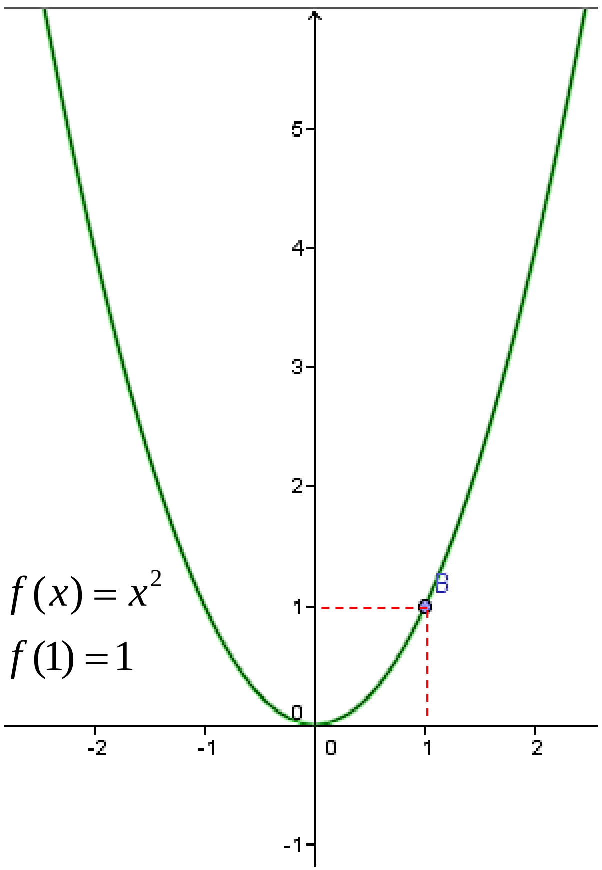
$$S(x) = x^2 + 3x$$

$$D(x) = x^2 - 3x$$

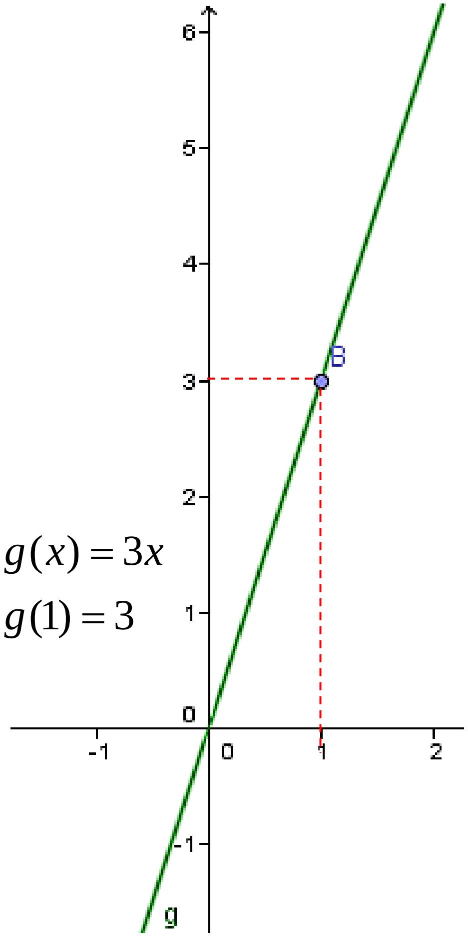
$$P(x) = x^2 \cdot 3x = 3x^3$$

$$Q(x) = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}$$

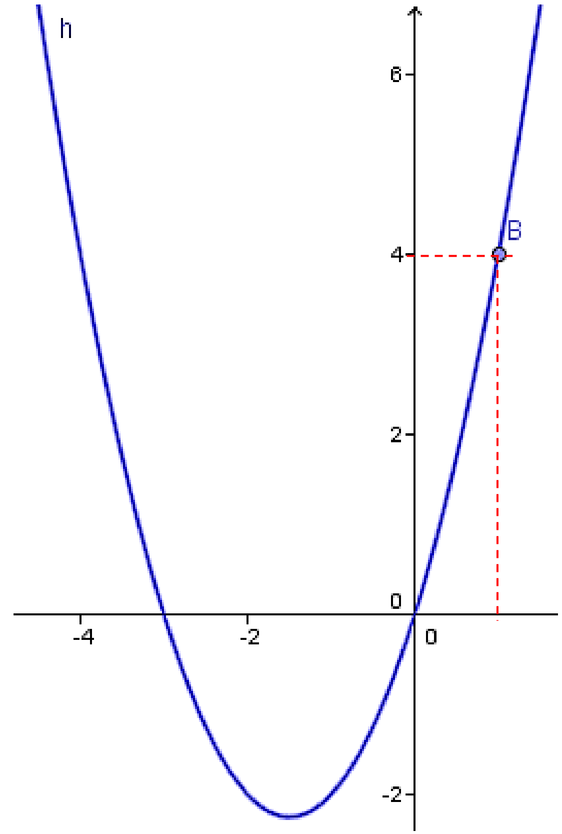
OPERAÇÕES COM FUNÇÕES



$$f(x) = x^2$$
$$f(1) = 1$$

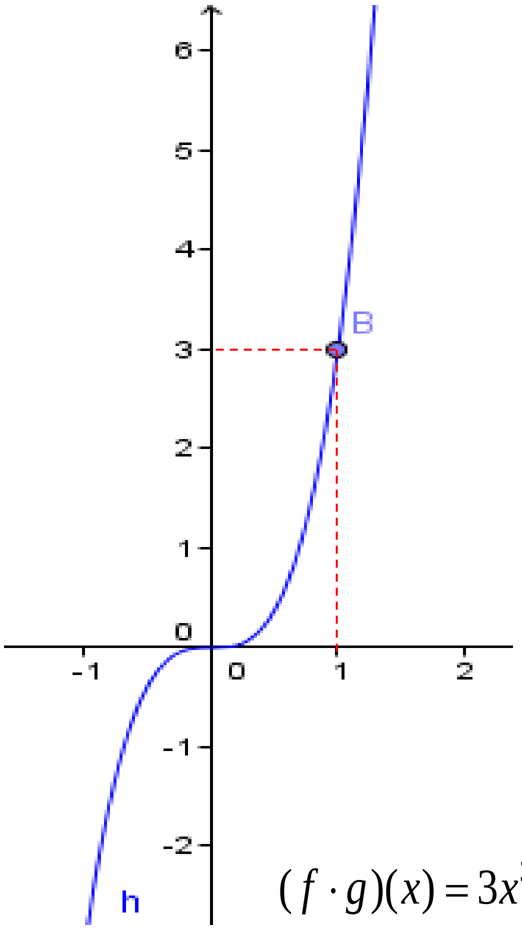


$$g(x) = 3x$$
$$g(1) = 3$$

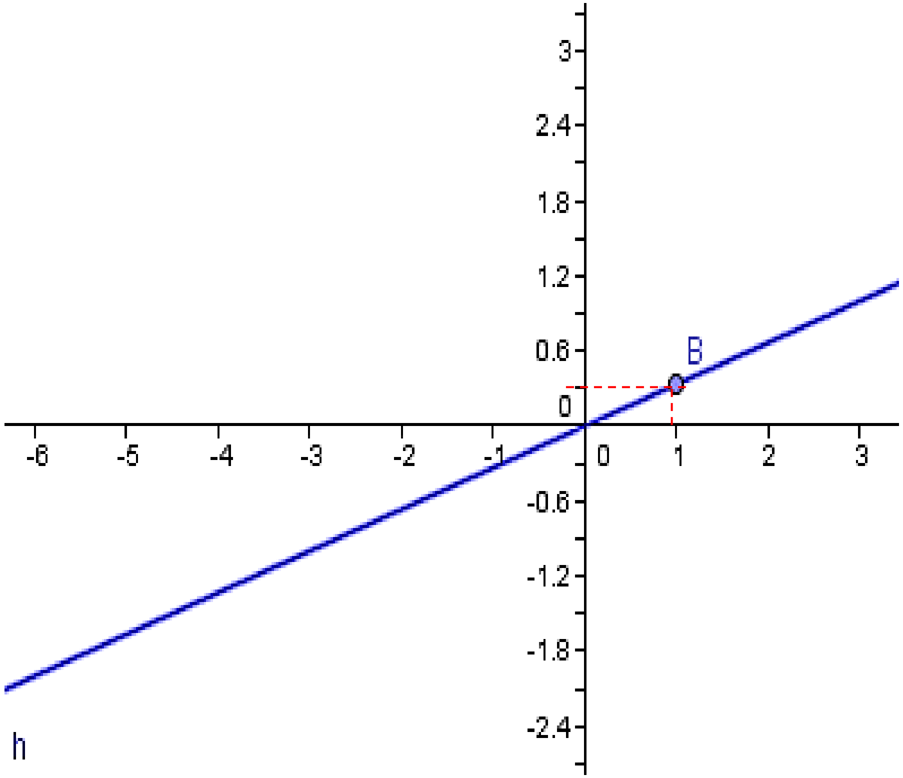


$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$
$$(f+g)(1) = 4$$

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES



$$(f \cdot g)(x) = 3x^3$$



$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{3}$$

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Além das funções geradas pelas operações anteriores, é possível gerar uma quinta função, chamada de **função composta**.

NOÇÃO DE FUNÇÃO COMPOSTA

Problema 1:

Em uma fábrica de peças para automóveis, certa máquina produz 14 peças por hora de trabalho. Cada uma dessas peças é vendida às montadoras por R$ 130,00.

Escreva uma função que relacione:

a) a quantidade **q** de peças produzidas e o tempo **t** em horas.

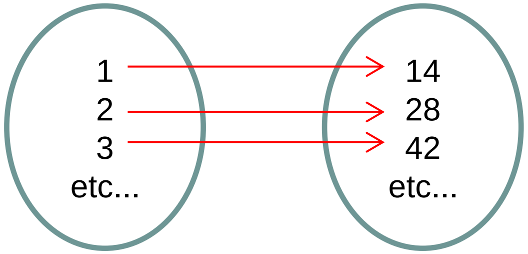
b) o valor **v** arrecadado e a quantidade **q** de peças.

c) o valor arrecadado (v) com a venda das peças e o tempo (t) de trabalho da máquina.

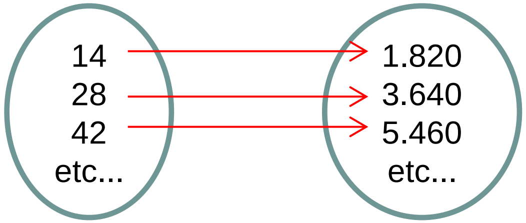
NOÇÃO DE FUNÇÃO COMPOSTA

Observe que:

A função $q(t) = 14t$ relaciona a quantidade e o tempo de forma direta.



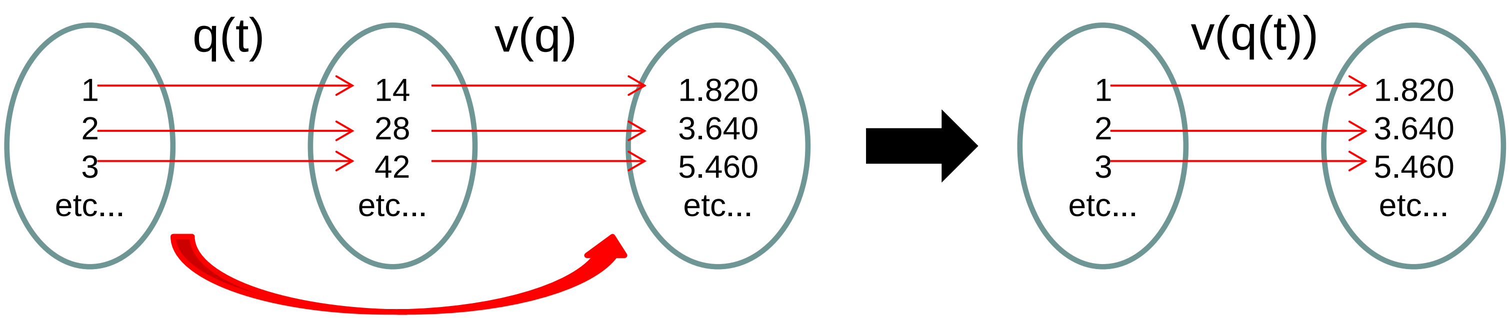
A função $v(q) = 130 \cdot q$ relaciona o valor e a quantidade de forma direta.



NOÇÃO DE FUNÇÃO COMPOSTA

Observando os dois diagramas percebemos que existe também uma relação entre o valor arrecadado e o tempo de trabalho da máquina. Porém, inicialmente essa relação é indireta.

Quando fazemos a **composição** das duas funções obtemos a função que estabelece a relação direta entre **v** e **t**.



$$v(q) = 130 \cdot q = 130 \cdot 14 \cdot t \Rightarrow v(q) = v(q(t)) = 1820 \cdot t$$

NOÇÃO DE FUNÇÃO COMPOSTA

a) a quantidade **q** de peças produzidas e o tempo **t** em horas.

$$q(t) = 14 \cdot t$$

b) o valor **v** arrecadado e a quantidade **p** de peças.

$$v(q) = 130 \cdot q$$

c) o valor arrecadado com a venda das peças e o tempo de trabalho da máquina.

$$v(q) = 130 \cdot q = 130 \cdot 14 \cdot t \Rightarrow v(q) = v(q(t)) = 1820 \cdot t$$

NOÇÃO DE FUNÇÃO COMPOSTA

Problema 2: Uma fábrica que produz sapatos calcula o seu lucro por meio da equação $L(p) = 0,4 \cdot p$, onde **L** é o lucro e **p** é o preço de venda do sapato para o comércio. Por sua vez, o preço de venda é calculado fazendo-se $P(v) = 20 + 2v$, **v** é o valor gasto com a matéria-prima para a fabricação do sapato .

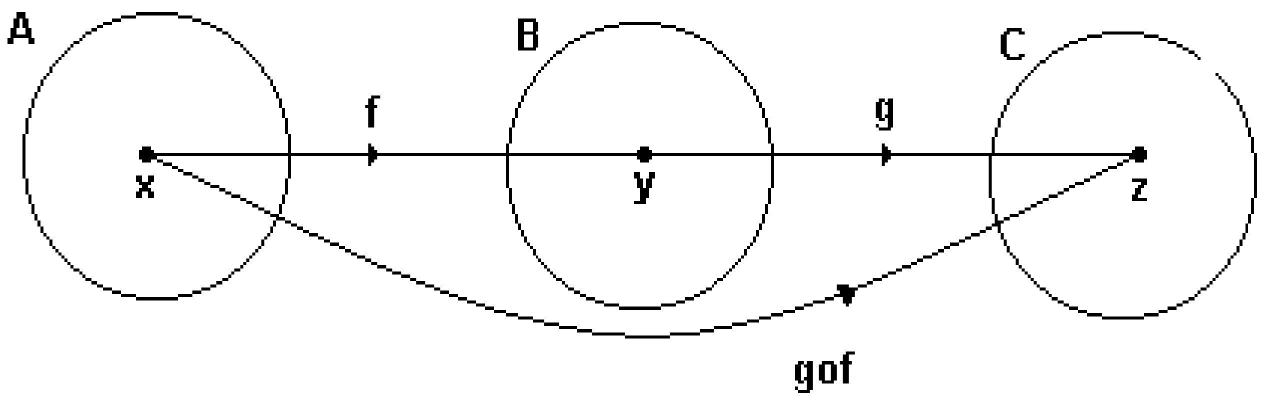
É possível determinar o lucro L diretamente do gasto v com a matéria-prima?

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO COMPOSTA

Dados as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$,

denominamos **função composta** de g com f a função $gof: A \to C$

definida por (gof)(x) = g(f(x)).



EXEMPLOS DE FUNÇÃO COMPOSTA

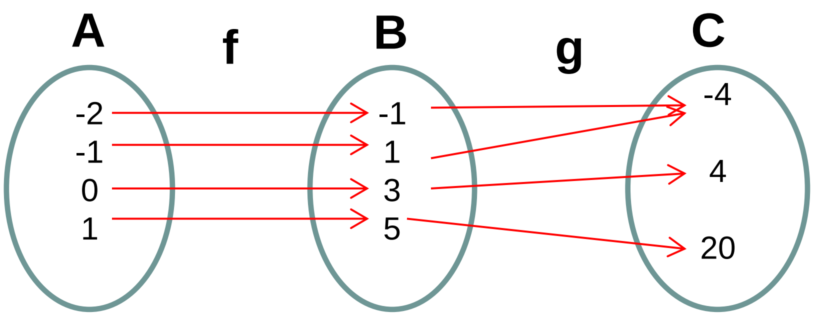
Exemplo 1: Dada a função f de A em B definida por f(x)=2x+3 e g de B em C definida por g(x)=x² - 5, com

$$A=\{-2,-1,0,1\},\ B=\{-1,1,3,5\}\ \text{e}\ C=\{-4,4,20\}$$

Escreva a função $gof : A \rightarrow C$

Solução.

Notemos que:

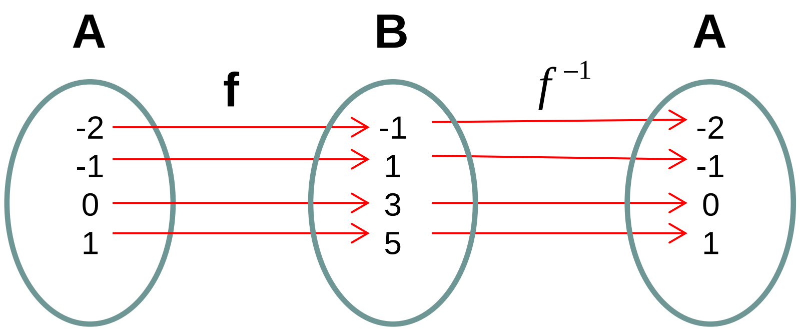


EXEMPLOS DE FUNÇÃO COMPOSTA

Estabelecendo a relação direta entre os elementos de A e C, isto é, determinando a função g(f(x)) temos:

$$g(f(x)) = (f(x))^2 - 5 = (2x+3)^2 - 5 = 4x^2 + 12x + 4$$

Exemplo 2: com os mesmo dados do exemplo 1, determinemos a função $(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}(f(x))$.



EXEMPLOS DE FUNÇÃO COMPOSTA

$$Como\ f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2},$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)-3}{2} = \frac{(2x+3)-3}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

EXEMPLOS DE FUNÇÃO COMPOSTA

Exemplo 3:

Sejam f e g funções reais definidas, respectivamente, por $f(x)=x + 1$ e $g(x)=2x^2-3$. Determinar:

a) $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

b) o(s) valor(es) de x para que se tenha $f(g(x))=g(f(x))$.

EXEMPLOS DE FUNÇÃO COMPOSTA

Exemplo 4:

Dadas as funções $f^{-1}(x)=\dfrac{x+6}{3}$ e $g(x)=\dfrac{x^2}{4}+5x$, determine g(f(4)).

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE

EXEMPLOS DE FUNÇÃO COMPOSTA

Exemplo 5:

No procedimento médico conhecido como angioplastia, os médicos inserem um cateter numa veia ou artéria e inflam um pequeno balão de forma esférica localizado na ponta do cateter. Suponha que o raio do balão aumente a uma taxa constante de 0,5 mm/s. Este balão é usualmente inflado até atingir um volume de 400 mm^3. Quanto tempo o balão leva para atingir este volume?

EXEMPLOS DE FUNÇÃO COMPOSTA

Exemplo 6:

(UNESP 2006) Seja T_C a temperatura em graus Celsius e T_F a mesma temperatura em graus Fahrenheit. Essas duas escalas de temperatura estão relacionadas pela equação $9T_C = 5T_F - 160$. Considere agora T_K a mesma temperatura na escala Kelvin. As escalas Kelvin e Celsius estão relacionadas pela equação $T_K = T_C + 273$. A equação que relaciona as escalas Fahrenheit e Kelvin é:

a) $T_F = (T_K - 113)/5$

b) $T_F = (9T_K - 2457)/5$

c) $T_F = (9T_K - 2297)/5$

d) $T_F = (9T_K - 2657)/5$

e) $T_F = (9T_K - 2617)/5$