

FUNÇÃO MODULAR



Professor: Marcelo Silva

marcelo.silva@ifrn.edu.br

Natal - RN, janeiro de 2014

FUNÇÕES DE VÁRIAS SENTENÇAS

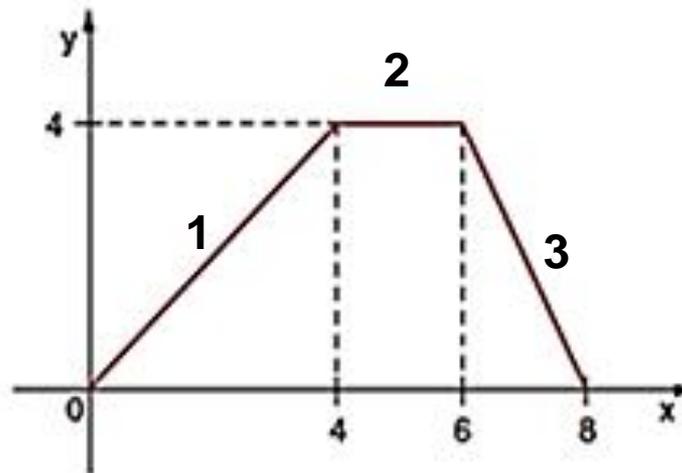
Exemplo 1:

1) $f(x) = x$

2) $f(x) = 4$

3) $f(x) = -2x + 16$

2 (UFF-RJ) O gráfico da função f está representado na figura a seguir.



Sobre a função f é falso afirmar que:

a) $f(1) + f(2) = f(3)$

d) $f(4) - f(3) = f(1)$

b) $f(2) = f(7)$

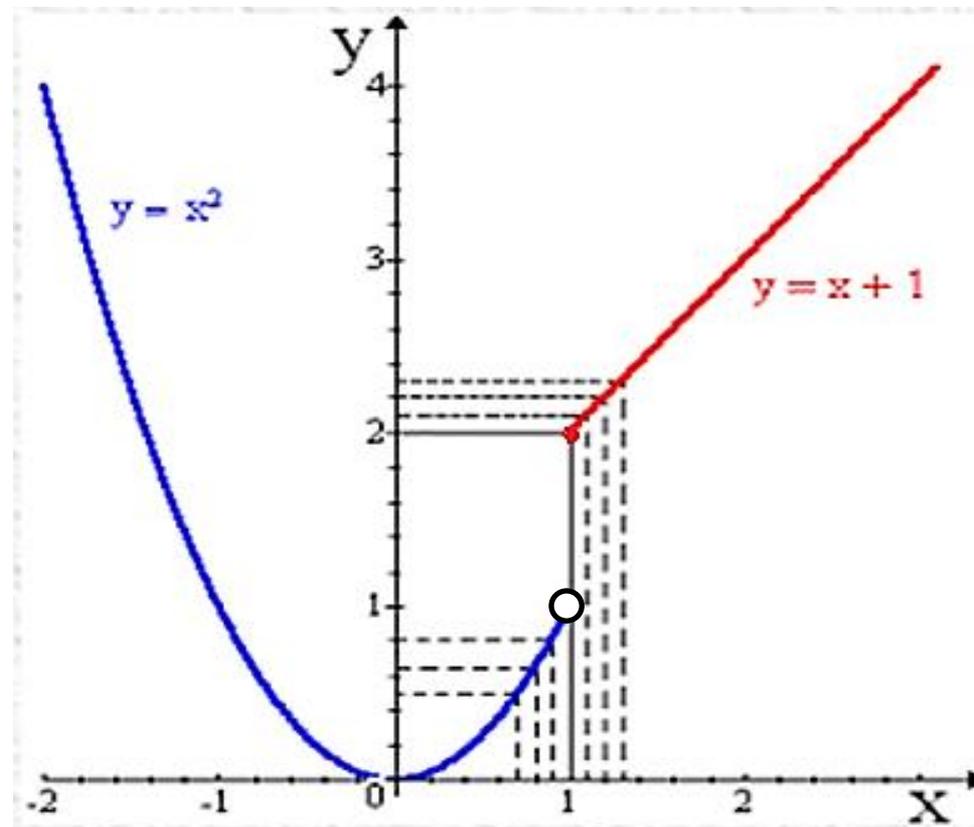
e) $f(2) + f(3) = f(5)$

c) $f(3) = 3f(1)$

FUNÇÕES DE VÁRIAS SENTENÇAS

Exemplo 2:

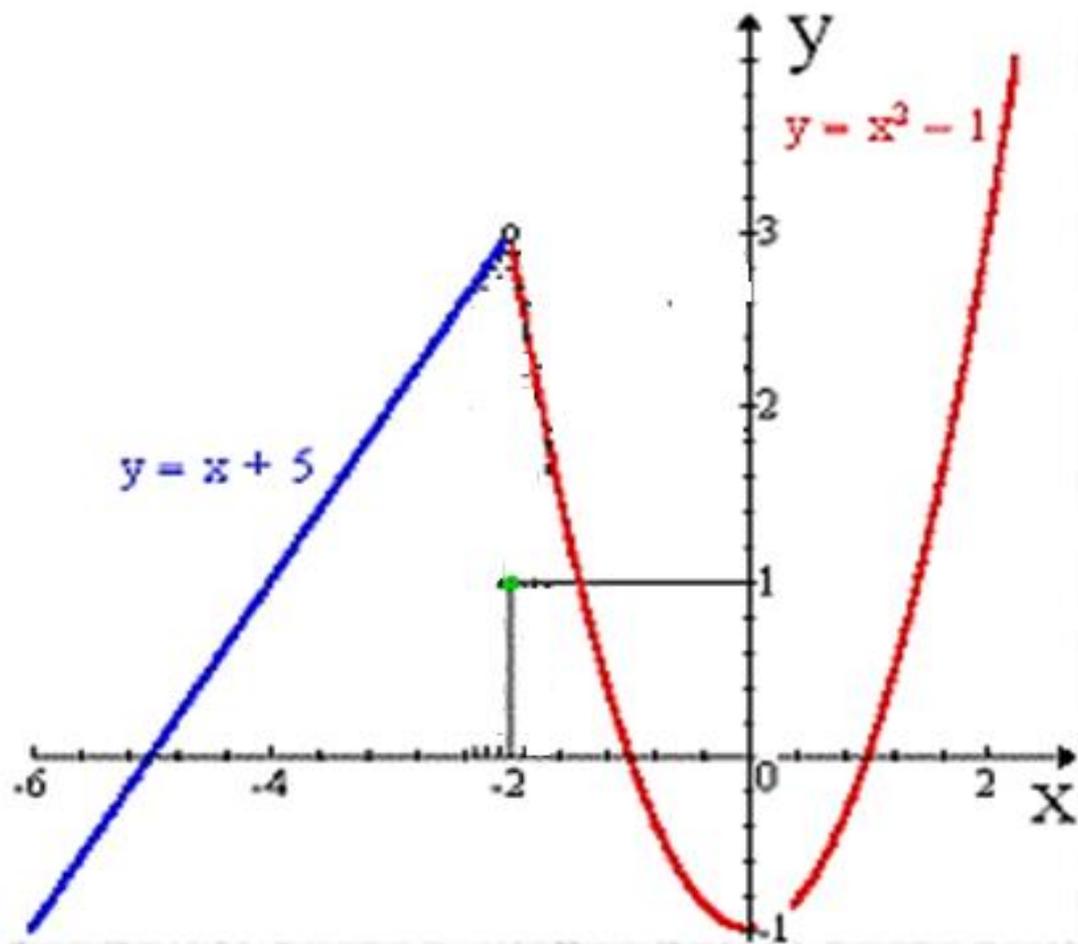
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$



FUNÇÕES DE VÁRIAS SENTENÇAS

Exemplo 3:

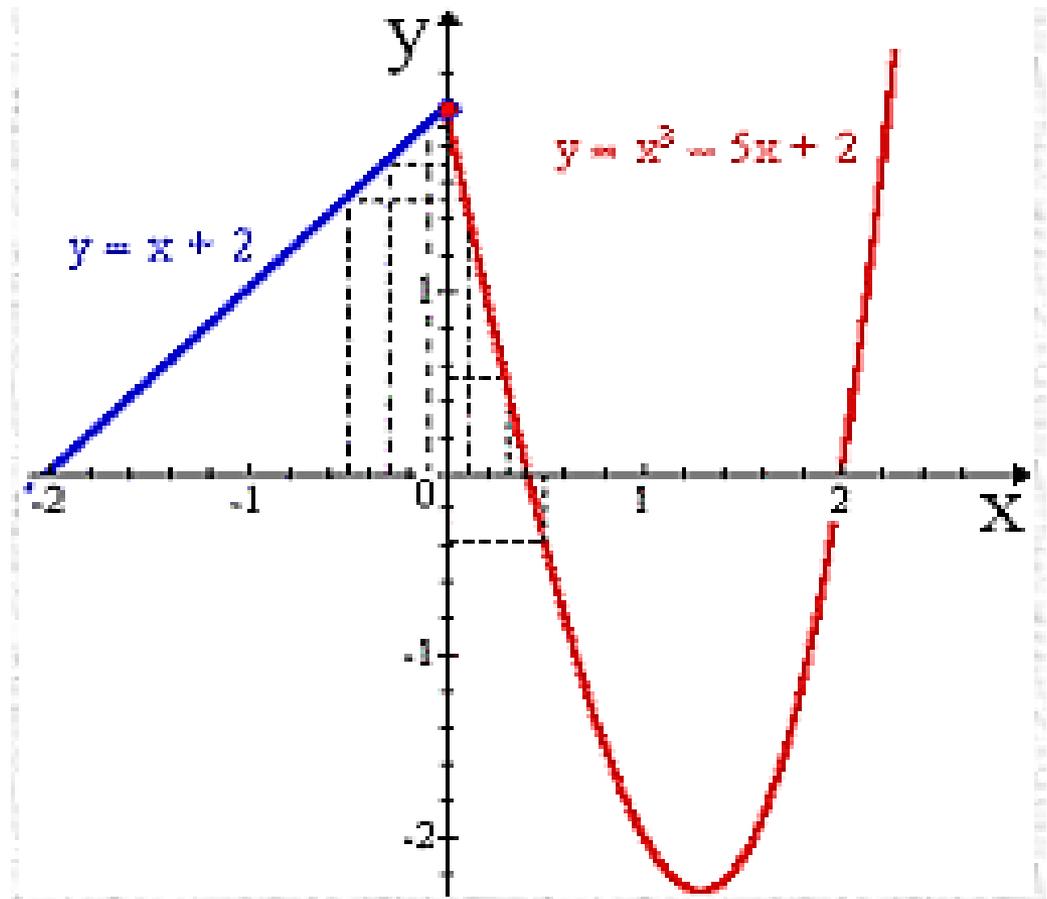
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x > -2 \\ 1, & \text{se } x = -2 \\ x + 5, & \text{se } x < -2 \end{cases}$$



FUNÇÕES DE VÁRIAS SENTENÇAS

Exemplo 4:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2, & \text{se } x \geq 0 \\ x + 2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



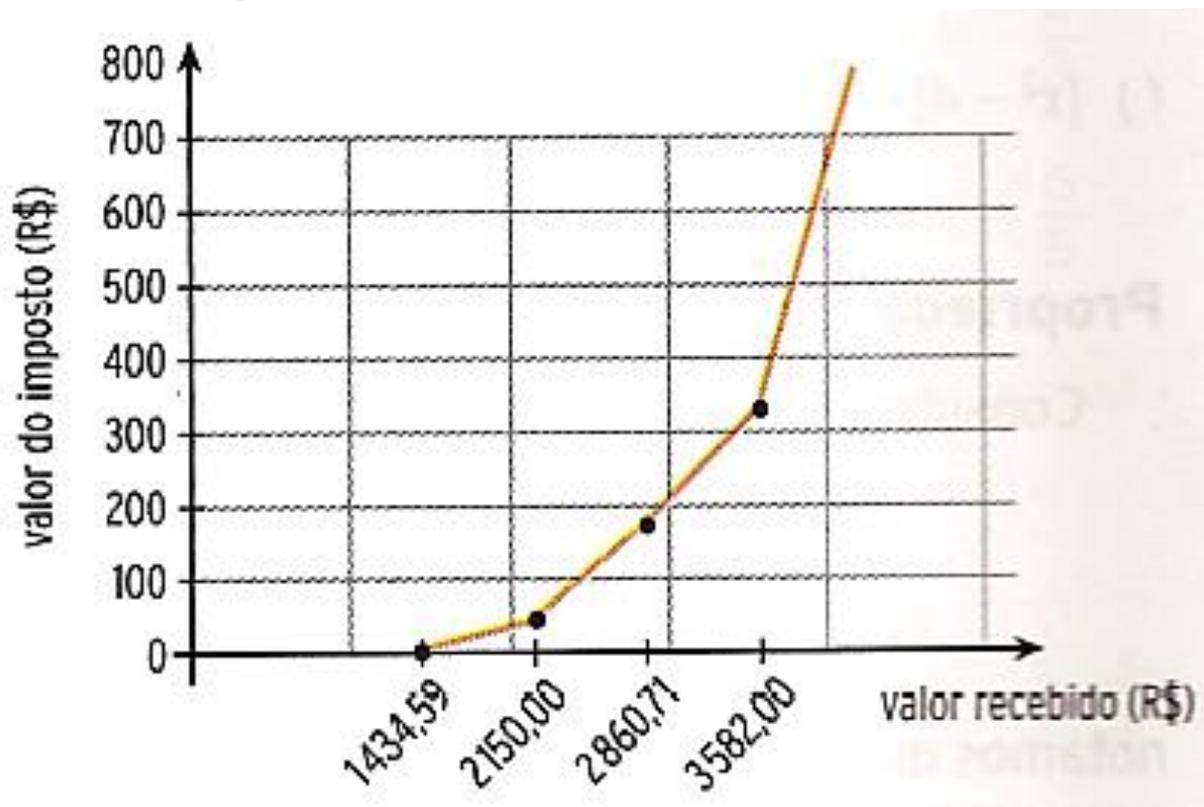


| Recebimento de | Taxa percentual | Desconto R\$ |
|-------------------|-----------------|--------------|
| Até R\$ 1434,59 | isento | |
| 1434,60 a 2150,00 | 7,5 | 107,59 |
| 2150,01 a 2866,70 | 15 | 268,84 |
| 2866,71 a 3582,00 | 22,5 | 483,84 |
| Acima de 3582,00 | 27,5 | 662,94 |

$$I(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 1.434,59 \\ 0,075 \cdot r - 107,59, & \text{se } 1.434,60 \leq r \leq 2.150,00 \\ 0,15 \cdot r - 268,84, & \text{se } 2.150,01 \leq r \leq 2.866,70 \\ 0,225 \cdot r - 483,84, & \text{se } 2.866,71 \leq r \leq 3.582,00 \\ 0,275 \cdot r - 662,94, & \text{se } r > 3.582,00 \end{cases}$$

FUNÇÃO DEFINIDA POR MAIS DE UMA SENTENÇA

$$I(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \leq 1.434,59 \\ 0,075 \cdot r - 107,59, & \text{se } 1.434,60 \leq r \leq 2.150,00 \\ 0,15 \cdot r - 268,84, & \text{se } 2.150,01 \leq r \leq 2.866,70 \\ 0,225 \cdot r - 483,84, & \text{se } 2.866,71 \leq r \leq 3.582,00 \\ 0,275 \cdot r - 662,94, & \text{se } r > 3.582,00 \end{cases}$$





caern

COMPANHIA DE ÁGUAS E ESGOTOS DO RN



TABELA TARIFÁRIA

| CATEGORIA DE CONSUMO | COTA BÁSICA | TARIFA MÍNIMA | CONSUMOS EXCEDENTES | | | | | |
|------------------------------|-------------|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|--------------------|
| | | | 11-15m ³ | 16-20m ³ | 21-30m ³ | 31-50m ³ | 51-100m ³ | >100m ³ |
| RESIDENCIAL SOCIAL - 115 | 10 | 4,35 | 2,40 | 2,85 | 3,21 | 3,70 | 4,77 | 5,42 |
| RES. POPULAR - 101 | 10 | 13,72 | 2,40 | 2,85 | 3,21 | 3,70 | 4,77 | 5,42 |
| RESID. - 102/103/105/106/121 | 10 | 21,58 | 2,40 | 2,85 | 3,21 | 3,70 | 4,77 | 5,42 |
| COMERCIAL - 200 | 10 | 33,21 | 4,19 | 4,50 | 5,42 | 5,42 | 5,42 | 5,42 |
| INDUSTRIAL - 300 | 20 | 72,42 | | | 5,97 | 5,97 | 5,97 | 5,97 |
| PÚBLICA - 400 | 20 | 69,41 | | | 5,97 | 5,97 | 5,97 | 5,97 |

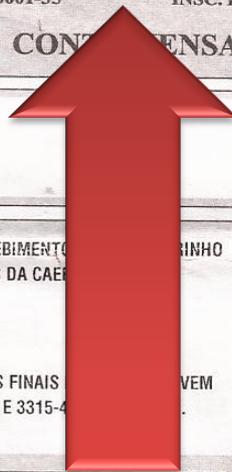
CNPJ 08.534.385/0001-35 INSC. ESTADUAL 20.055.426-3

MATRÍCULA 04975512

CONDOMÍNIO

A PARTIR DE JUNHO/2010, OS POSTOS DE RECEBIMENTO DE CONTAS DE ÁGUA E ESGOTO (JR SERVICOS LTDA), NAO RECEBERAO CONTAS DA CAERN

AS CHAMADAS DE CELULAR PARA A CAERN NOS FINAIS DE MÊS DEVEREM SER FEITAS PARA O NÚMERO 3232-4432 NATAL E 3315-4



| CATEGORIA DE CONSUMO | COTA BÁSICA | TARIFA MÍNIMA | CONSUMOS EXCEDENTES | | | | | |
|------------------------------|-------------|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|--------------------|
| | | | 11-15m ³ | 16-20m ³ | 21-30m ³ | 31-50m ³ | 51-100m ³ | >100m ³ |
| RESIDENCIAL SOCIAL - 115 | 10 | 4,35 | 2,40 | 2,85 | 3,21 | 3,70 | 4,77 | 5,42 |
| RES. POPULAR - 101 | 10 | 13,72 | 2,40 | 2,85 | 3,21 | 3,70 | 4,77 | 5,42 |
| RESID. - 102/103/105/106/121 | 10 | 21,58 | 2,40 | 2,85 | 3,21 | 3,70 | 4,77 | 5,42 |
| COMERCIAL - 200 | 10 | 33,21 | 4,19 | 4,50 | 5,42 | 5,42 | 5,42 | 5,42 |
| INDUSTRIAL - 300 | 20 | 72,42 | | | 5,97 | 5,97 | 5,97 | 5,97 |
| PÚBLICA - 400 | 20 | 69,41 | | | 5,97 | 5,97 | 5,97 | 5,97 |

- A tarifa de esgoto convencional será de 70% (setenta por cento) da tarifa de água.
- A tarifa de esgoto condominial será de 35% (trinta e cinco por cento) para todas as categorias de consumo (cota básica e consumo excedente, exceto os Contratos Especiais, previstos no artigo 80 do RGS).
- Para os consumidores com poço tubular, a tarifa de esgoto será de 100% (cem por cento) da tarifa de água.



TABELA TARIFÁRIA

CATEGORIA

COTA

TARIFA

CONSUMOS EXCEDENTES

FUNÇÃO DEFINIDA POR MAIS DE UMA SENTENÇA

R\$ 33,21 se $x \leq 10m^3$

**R\$ 33,21 + 4,19(x-10)
se $11m^3 \leq x \leq 15m^3$**

**R\$ 33,21 + 4,50(x-10)
se $16m^3 \leq x \leq 20m^3$**

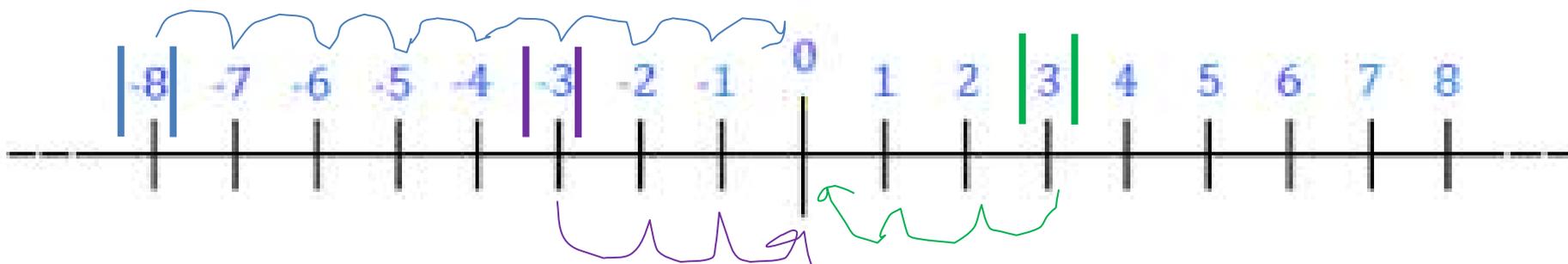
**R\$ 33,21 + 5,42(x-10)
se $x \geq 21 m^3$**

$f(x) =$



MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Módulo ou valor absoluto de um número real é a distância deste número até a sua origem.



$$|-8| = 8$$

$$|3| = 3$$

$$|-3| = 3$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ALGUMAS PROPRIEDADES



$$|x| \geq 0$$

$$|x|^2 = |x^2| = x^2$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||$$

Para todo x, y reais.

ALGUMAS PROPRIEDADES



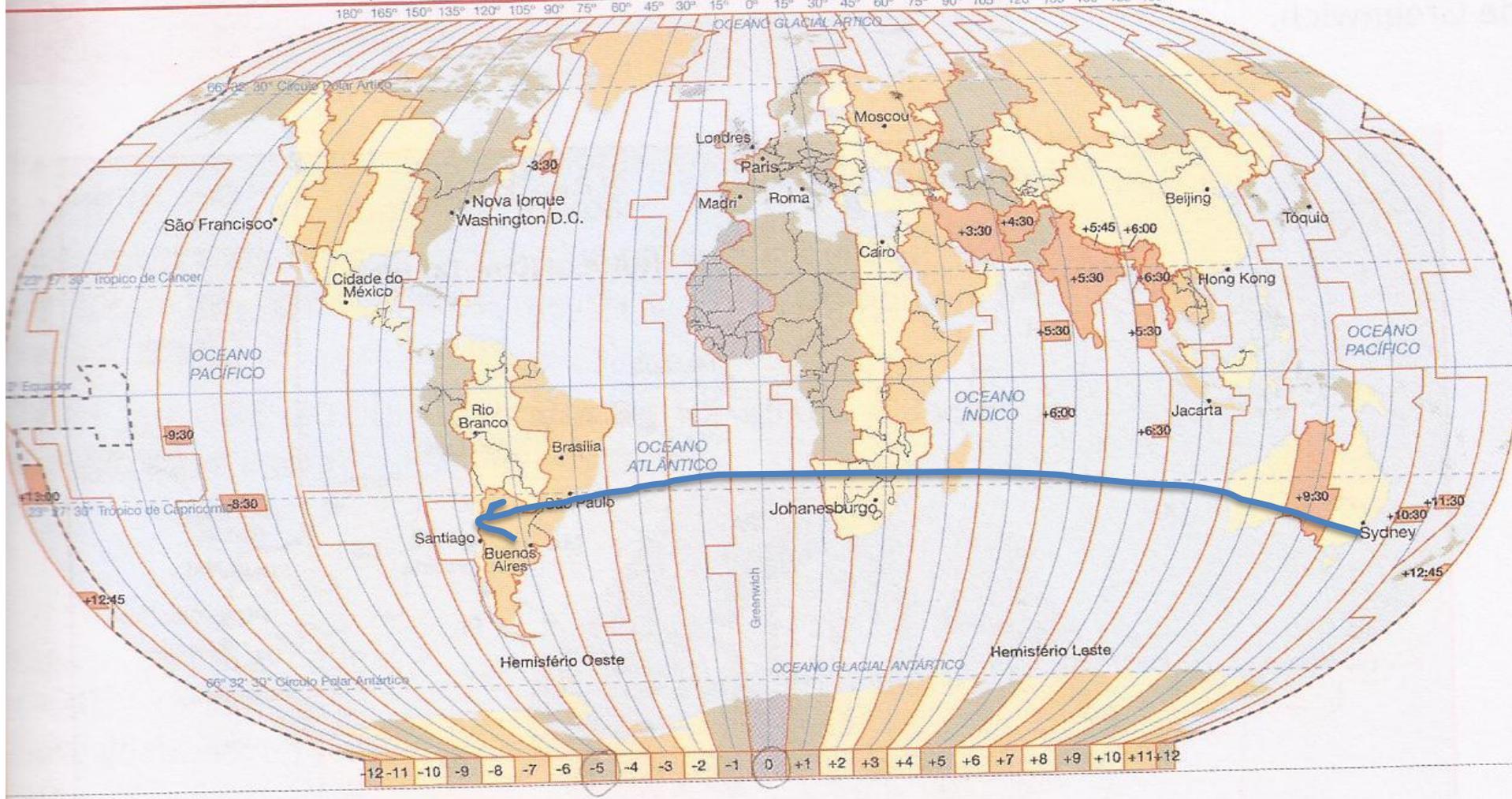
É comum dizermos que $\sqrt{x^2} = x$.

Mas, se $x = -2$, por exemplo?

$\sqrt{(-2)^2} = 2$, pois $(-2)^2 = 4$ e $\sqrt{4} = 2$.

Logo,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$



$$10 - (-5) = 10 + 5 = 15 = 15h$$

ou

$$|-5 - (+10)| = |-5 - 10| = |-15| = 15h$$

FUNÇÃO MODULAR



A função modular é definida por duas sentenças, com base no conceito de módulo, ou seja:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |x - 2|$$

$$h(x) = |x| + 2$$

$$g(x) = |x^2 - 7x + 10|$$

$$i(x) = |x|/x$$

FUNÇÃO MODULAR

A função associa cada número real x ao seu módulo, assim, f é definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} pela lei $f(x) = |x|$.

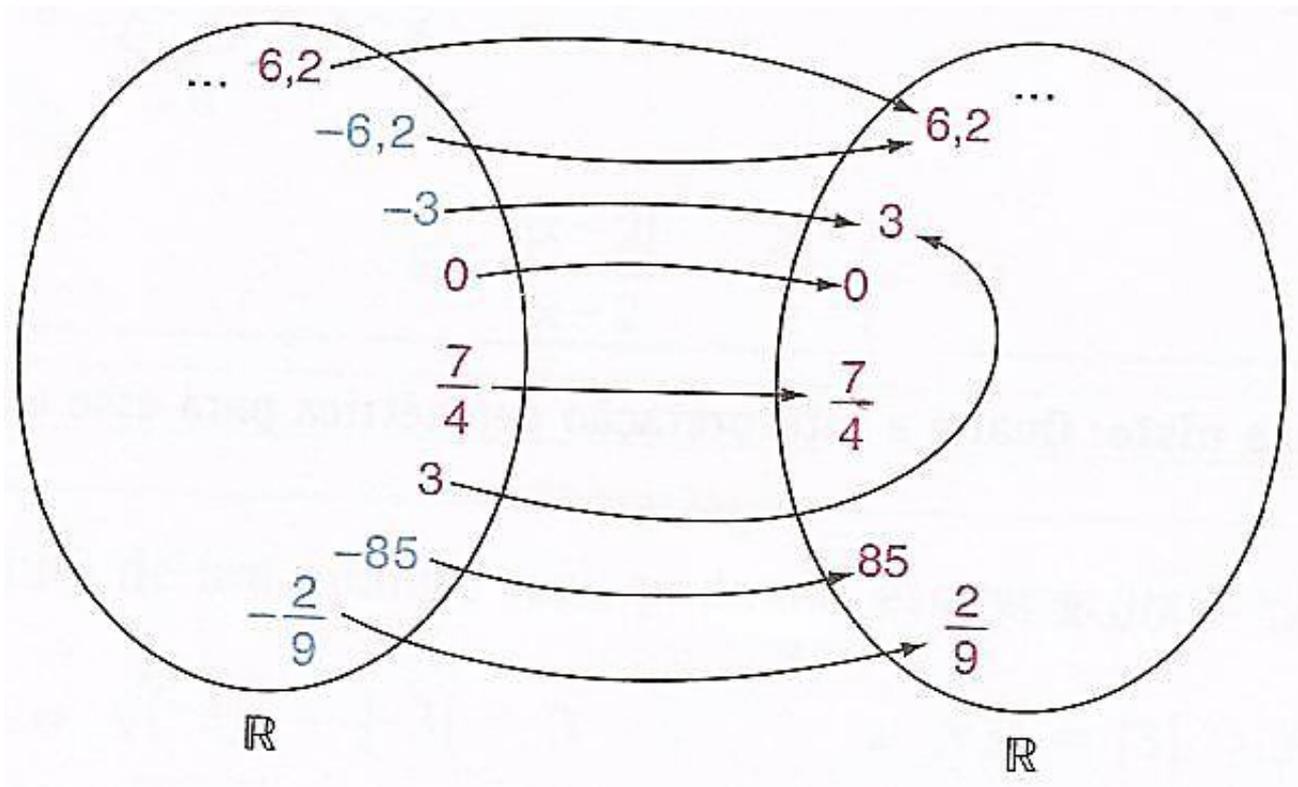


GRÁFICO DA FUNÇÃO MODULAR

Como o módulo de um número é sempre um valor positivo, não teremos gráfico nos quadrantes negativos do plano cartesiano, ou seja, $\text{Im} = \mathbb{R}^+$.

O gráfico da função modular sempre será a união dos gráficos de cada sentença.

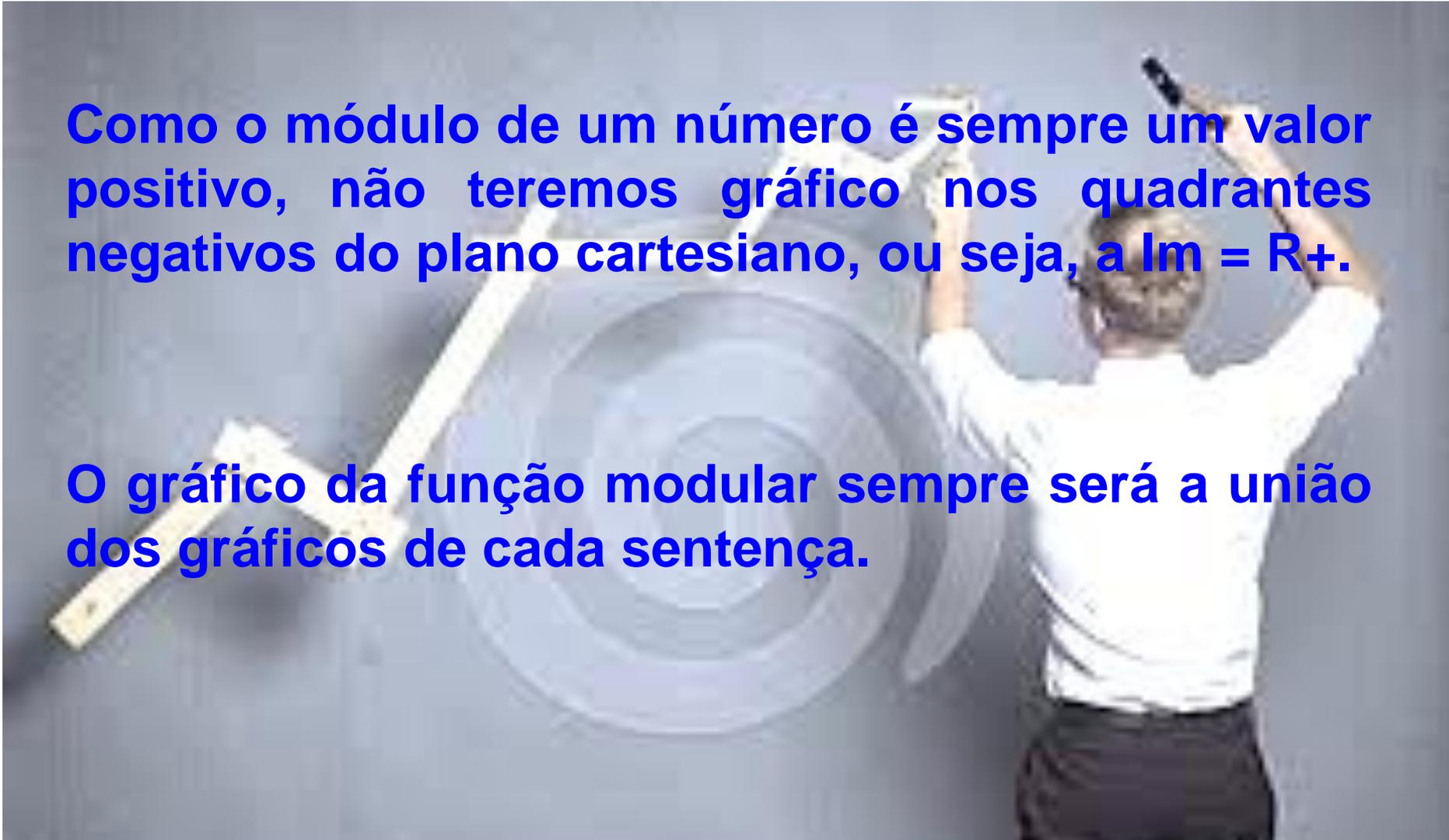


GRÁFICO DA FUNÇÃO MODULAR

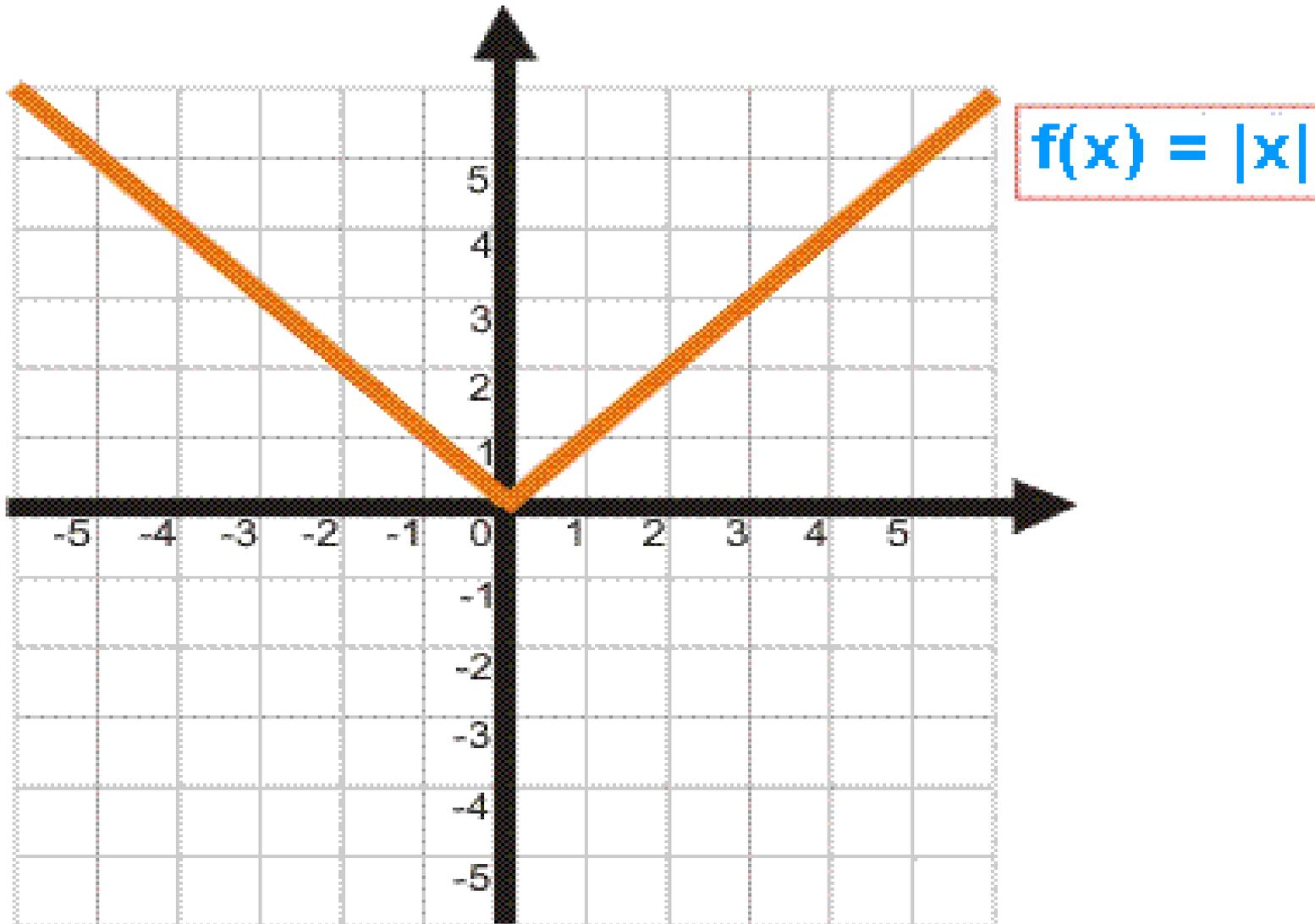
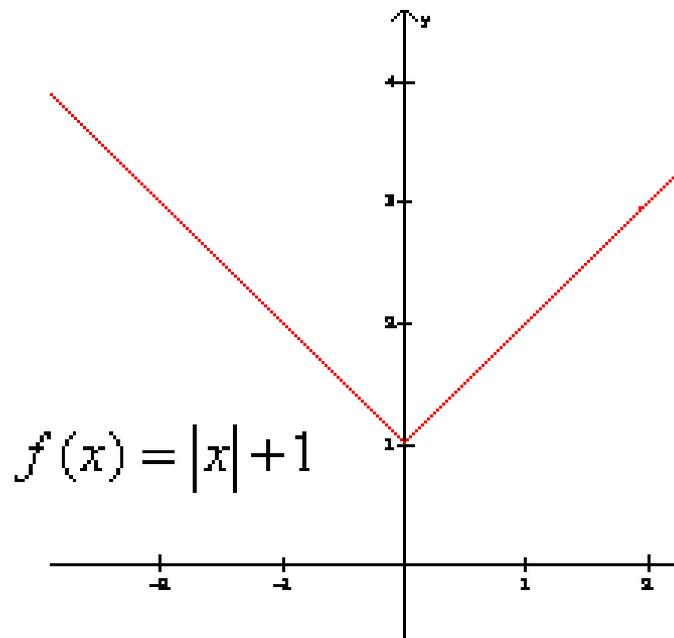


GRÁFICO DA FUNÇÃO MODULAR

$$f(x) = |x| + k$$

deslocar o gráfico k
unidades acima



$$f(x) = |x| - k$$

deslocar o gráfico k
unidades abaixo

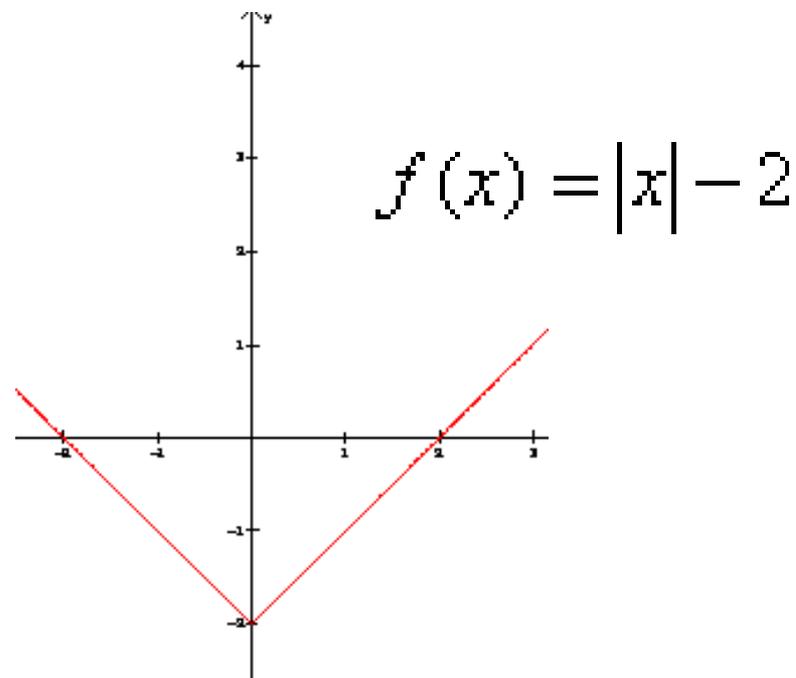


GRÁFICO DA FUNÇÃO MODULAR

$$f(x) = |x - k|$$

deslocar o gráfico k
unidades à direita

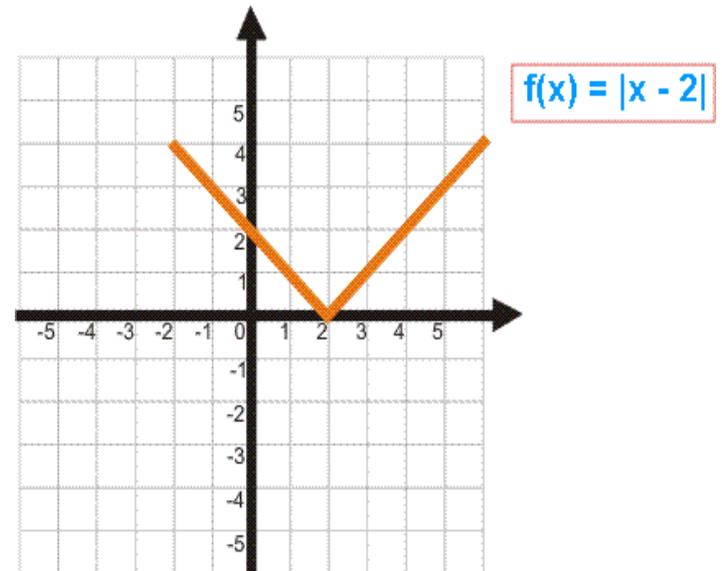
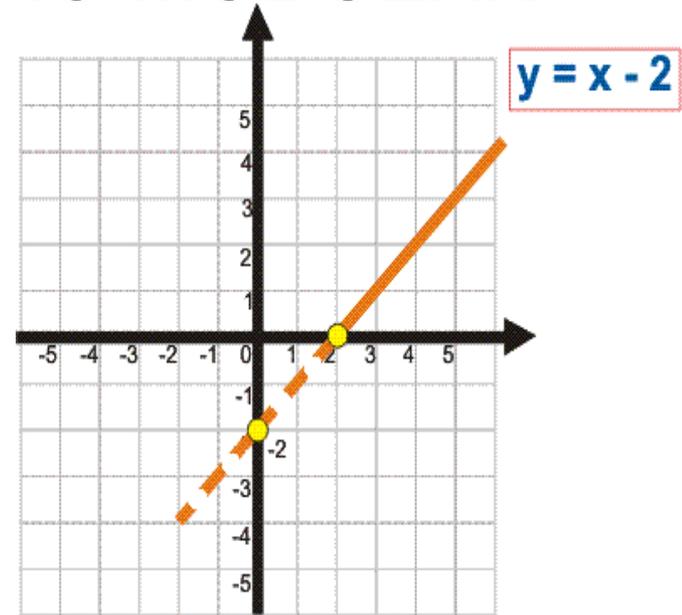
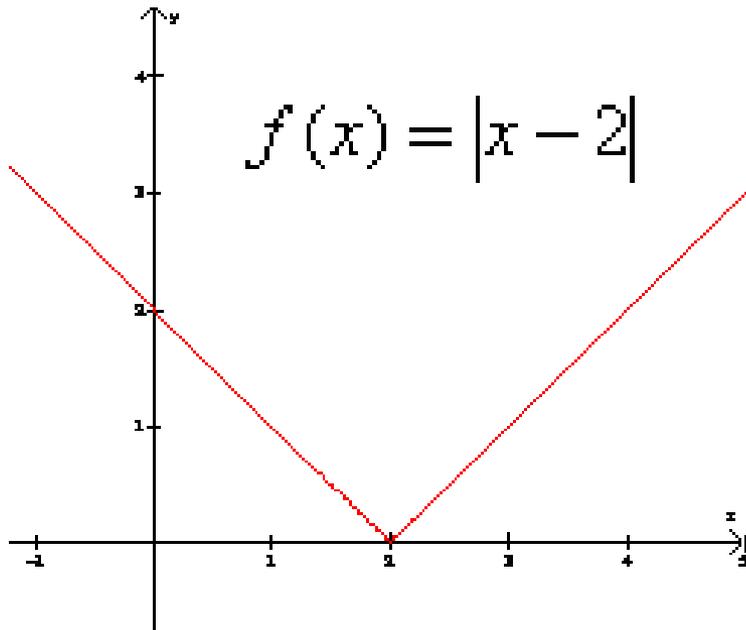
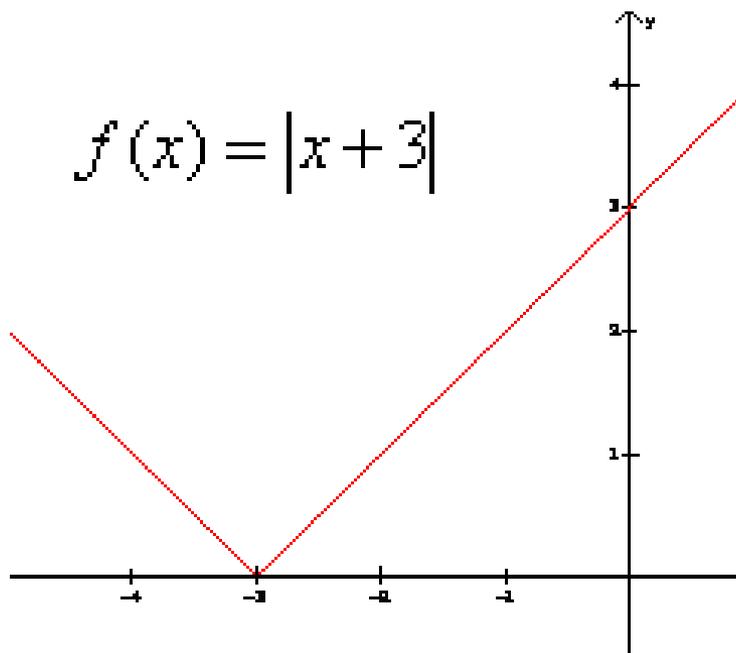


GRÁFICO DA FUNÇÃO MODULAR

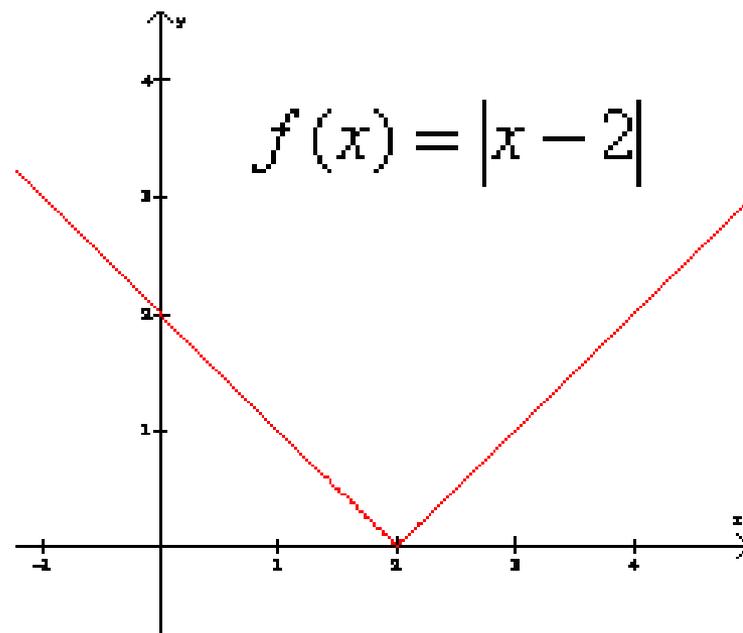
$$f(x) = |x + k|$$

deslocar o gráfico k
unidades à esquerda



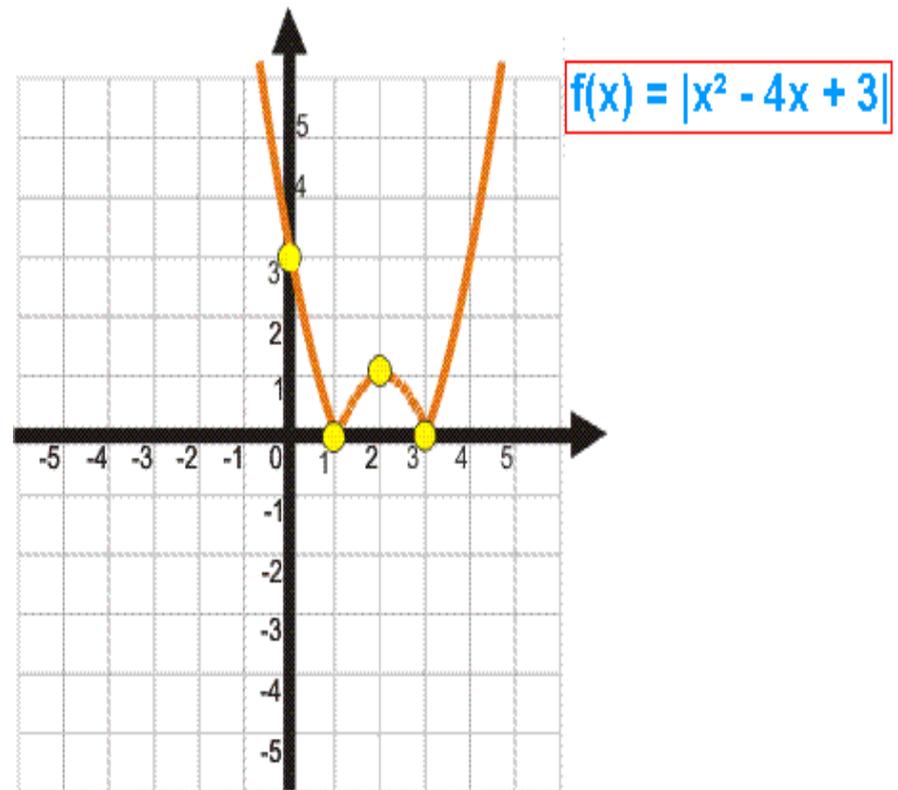
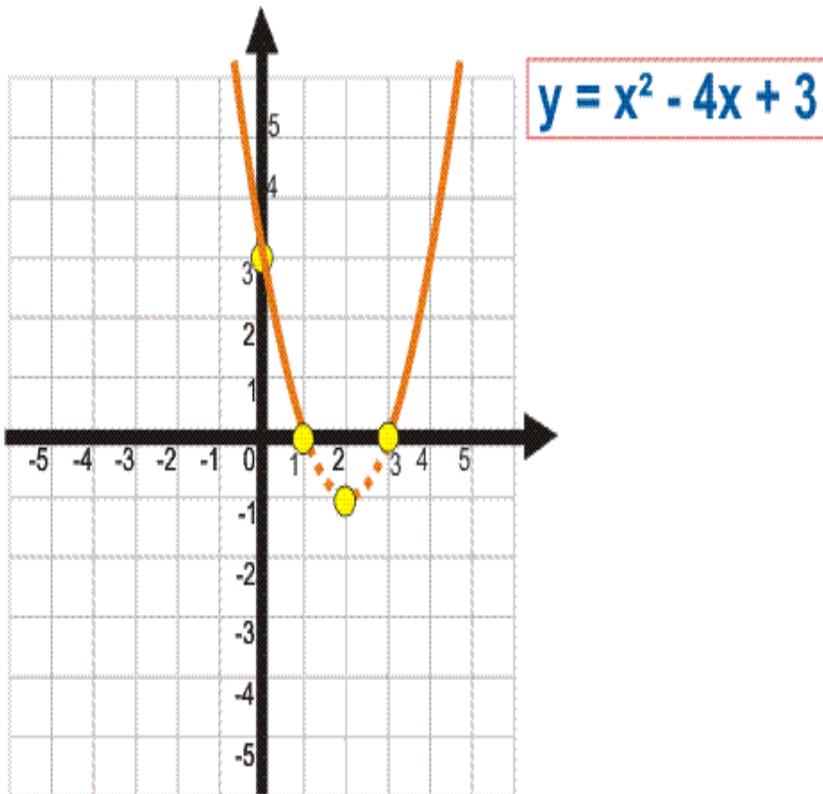
$$f(x) = |x - k|$$

deslocar o gráfico k
unidades à direita



EXERCÍCIO

Construir o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.



EQUAÇÃO MODULAR

Independente se x é positivo ou negativo, $|x|$ sempre será o seu valor positivo.

Então, sendo k um número positivo:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

Utilizando essa propriedade resolvemos equações modulares.

EQUAÇÃO MODULAR

Em um determinado mês verificou que o número n de pessoas que compravam no supermercado Alagoas era dado pela lei $n(x) = 20 \cdot |x - 25| + 300$ em que $x = 1, 2, 3, \dots, 30$ representa cada dia do mês.



Em quais dias do mês, 400 pessoas compraram neste supermercado?



EQUAÇÃO MODULAR



$$n(x) = 20 \cdot |x - 25| + 300$$

$$400 = 20 \cdot |x - 25| + 300$$

$$|x - 25| = (400 - 300)/20$$

$$|x - 25| = 5$$

$$x - 25 = 5$$

$$x = 30^\circ \text{ dia}$$

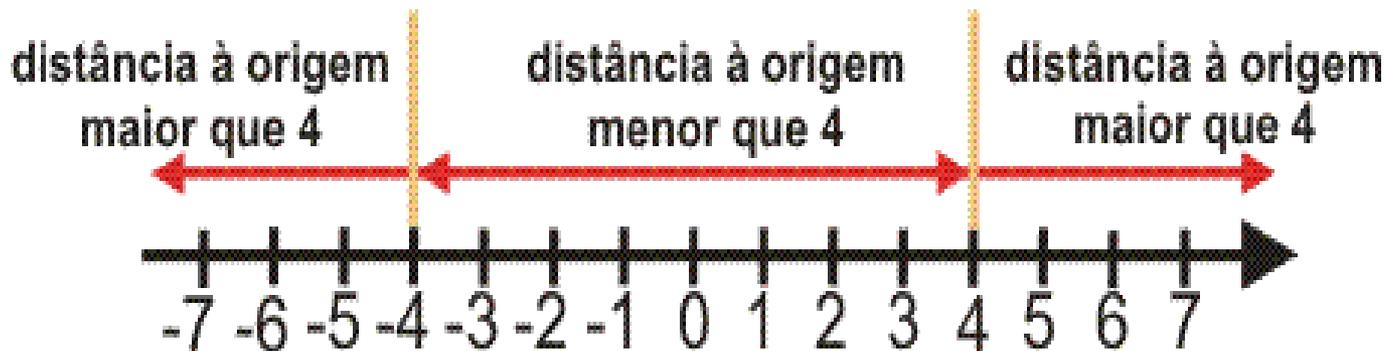
ou

$$x - 25 = -5$$

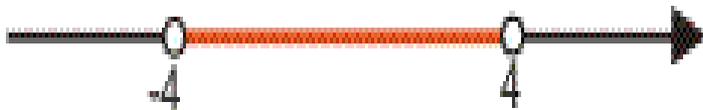
$$x = 20^\circ \text{ dia}$$

INEQUAÇÃO MODULAR

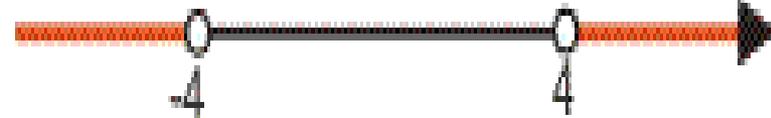
Na reta real abaixo, observe quando a distância à origem é menor que 4 e quando a distância à origem é maior que 4:



$$|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$$



$$|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4 \text{ ou } x > 4$$



INEQUAÇÃO MODULAR

Seja $a > 0$:

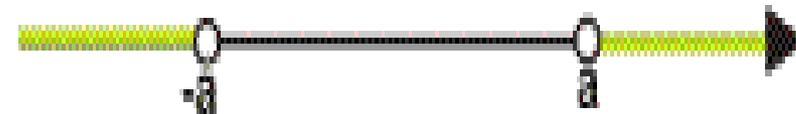
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$



$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$



$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a$$

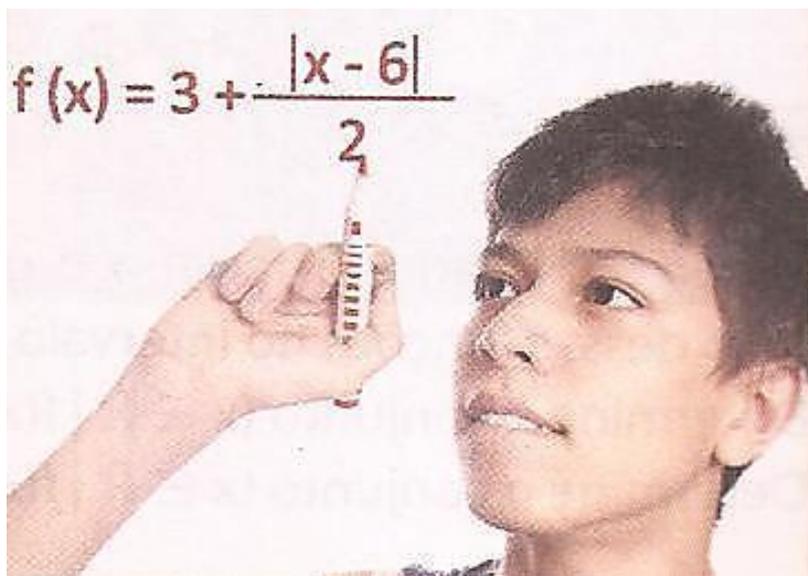


$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$$



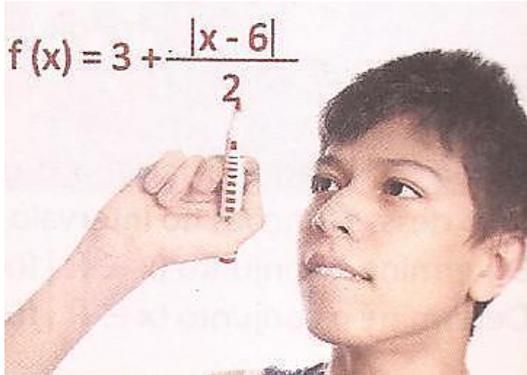
INEQUAÇÃO MODULAR

No ano passado, Vitor participou de um curso de Matemática em que, todo mês, foi submetido a uma avaliação. A função $f(x)$ ilustrada na imagem, representa a nota obtida por Vitor no mês x ($x = 1$ corresponde ao mês de janeiro).


$$f(x) = 3 + \frac{|x - 6|}{2}$$

Em que mês Vitor ficou acima de 5?

INEQUAÇÃO MODULAR



$$f(x) > 5$$
$$|x - 6| > (5 - 3) \cdot 2$$
$$|x - 6| > 4$$

$$x - 6 > 4$$

ou

$$x - 6 < -4$$

$$x > 4 + 6$$

ou

$$x < -4 + 6$$

$$x > 10$$

ou

$$x < 2$$

Ele tirou acima de 5 no mês de novembro (11),
dezembro (12) ou janeiro (1).